Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ ορίζουμε

$$S_U(x) \equiv Sx = \min\{y \in U \mid x < y\}, \text{ εφόσον υπάρχει } y \in U \text{ με } x < y$$
$$seg(x) = \{y \in U \mid y < x\},$$

όπου $x \in U$.

Για δύο μερικά διατεταγμένους χώρους $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ ορίζουμε $P =_o Q$ αν υπάρχει $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow Q$ 1-1 και επί που **σέβεται τις διατάξεις**, δηλαδή για κάθε $x, y \in P$ ισχύει

$$x \leq_P y \iff \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο P είναι **όμοιος** με τον Q και η πιο πάνω π ονομάζεται **ομοιότητα**

Άσκηση 1. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος. Δείξτε ότι για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$seg(Sx) = seg(x) \cup \{x\}.$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο

$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$

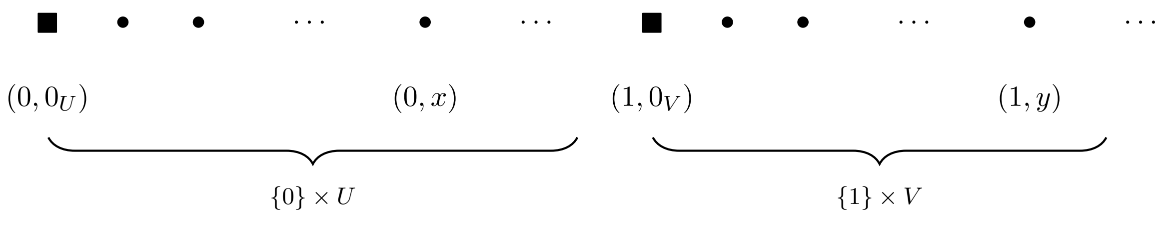
μαζί με τη διάταξη

$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \;\&\; x \leq_P y] \;\vee\; [i = j = 1 \;\&\; x \leq_Q y] \;\vee\; [i = 0 \;\&\; j = 1]$$

όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:



Άσκηση 3 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε τα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.

Άσκηση 4 (Απαιτητική)**.**

(i) Έστω V ένας καλά διατεταγμένος χώρος που είναι άπειρο σύνολο και που δεν έχει οριακά σημεία. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to V$ με

$$f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V \quad \text{και} \quad f(n + 1_{\mathbb{N}}) = \begin{cases} S_V(f(n)), & \text{αν υπάρχει } y \in V \text{ με } f(n) <_V y \\ 0_V, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιότητα και επομένως ισχύει $V =_o \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε το $0_{\mathbb{N}}$ στο 0_V, το $1_{\mathbb{N}}$ στο $S_V(0_V)$ κ.ο.κ. Η δεύτερη περίπτωση στη διακλάδωση του ορισμού της f (δηλαδή το "αλλιώς") μπαίνει γιατί δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι για κάθε n θα υπάρχει $y \in V$ με $f(n) <_V y$. Το "αλλιώς" δεν θα συμβαίνει όμως ποτέ, δηλαδή θα είμαστε πάντα στην πρώτη περίπτωση.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο V που είναι άπειρο σύνολο έχουμε $1 + V =_0 V$, όπου $1 = \{\emptyset\}$ και $+$ είναι η πρόσθεση μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.