

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Προφανής). Έστω (P, \leq) ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\emptyset \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση \leq' που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y που ανήκουν στο υποσύνολο P' .

Δείξτε ότι η \leq' είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ της \leq' δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Το ζεύγος (P', \leq') ονομάζεται **υπόχωρος** του (P, \leq) και η σχέση \leq' ονομάζεται **ο περιορισμός της \leq** στο σύνολο P' . Συνήθως συμβολίζουμε την \leq' πάλι με \leq όταν είναι σαφές σε ποιον χώρο αναφερόμαστε. Για παράδειγμα λέμε ότι ο (P', \leq) είναι υπόχωρος του (P, \leq) .

Λύση.

Οι ιδιότητες της μεταβατικότητας, αντισυμμετρικότητας και μεταβατικότητας για την \leq' είναι προφανείς από τις αντίστοιχες ιδιότητες της μερικής διάταξης στο P . Σχετικά με το αυστηρό μέρος παρατηρούμε

$$x <' y \iff x \leq' y \ \& \ x \neq y \iff x \leq y \ \& \ x \neq y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Άσκηση 2 (Ιδιότητες αυστηρού μέρους). Έστω (P, \leq) μερικά διατεταγμένος χώρος. Επαληθεύστε τις ακόλουθες ιδιότητες για το αυστηρό μέρος $<$ της διάταξης \leq :

$$x \not< x$$

$$x \leq y \implies y \not< x$$

$$(\text{ισοδύναμα: } y < x \implies x \not\leq y)$$

$$x < y \ \& \ y \leq z \implies x < z$$

$$x \leq y \ \& \ y < z \implies x < z$$

όπου $x, y, z \in P$.

Λύση.

Θεωρούμε τυχαία $x, y, z \in P$.

Αν είχαμε $x < x$ θα είχαμε ειδικότερα και $x \neq x$ που είναι άτοπο. Για το επόμενο, έστω $x \leq y$ και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $y < x$. Τότε έχουμε και $y \leq x$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα προκύπτει $x = y$ που είναι άτοπο γιατί $y < x$.

Στην επόμενη ιδιότητα έστω $x < y$ και $y \leq z$. Από τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $x \leq z$. Αν είχαμε $x = z$, αφού $y \leq z$ θα είχαμε και $y \leq x$. Άρα θα ίσχυε $x < y$ και $y \leq x$ που έρχεται σε αντίθεση με το προηγούμενο. Επομένως $x \neq z$ και $x < z$.

Τέλος έστω $x \leq y$ και $y < z$. Από τη μεταβατική ιδιότητα προκύπτει $x \leq z$. Αν είχαμε $x = z$, αφού $x \leq y$ θα είχαμε $z \leq y$. Άρα θα ίσχυε $z \leq y$ και $y < z$ που είναι άτοπο. Άρα $x \neq z$ και $x < z$.

Άσκηση 3 (Αντίστροφη Διάταξη). Έστω (P, \leq) ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση \trianglelefteq στο P ως εξής:

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x, y \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος (P, \trianglelefteq) είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι: α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη \leq τότε τι είναι αντίστοιχα το a ως προς τη διάταξη \trianglelefteq ;

Σημείωση: Η σχέση \trianglelefteq είναι η **αντίστροφη διάταξη** της \leq .

Λύση.

(i) Αφού $x \leq x$ έχουμε και $x \trianglelefteq x$. Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq x$, τότε $y \leq x$ και $x \leq y$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της \leq έχουμε $x = y$. Τέλος επαληθεύουμε την μεταβατική ιδιότητα για την \trianglelefteq . Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq z$. Τότε $z \leq y$ και $y \leq x$. Από τη μεταβατική ιδιότητα της \leq έχουμε $z \leq x$, άρα $x \trianglelefteq z$.

(ii) Αν το a είναι \leq -μέγιστο του S τότε $a \in S$ και για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Επομένως το a είναι \trianglelefteq -ελάχιστο του S .

Αν το a είναι \leq -μεγιστικό του S τότε $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $a < x$. Αν υπήρχε $x \in S$ με $x < a$ (δηλαδή $x \trianglelefteq a$ και $x \neq a$), τότε $a \leq x$ και $x \neq a$, ισοδύναμα $a < x$ που είναι άτοπο. Άρα $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $x < a$ που σημαίνει ότι το a είναι \trianglelefteq -ελαχιστικό του S .

Τέλος αν το a είναι άνω φράγμα του S ως προς \leq τότε για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Άρα το a είναι κάτω φράγμα του S ως προς \trianglelefteq .

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1\}$$

όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση \leq ως εξής:

$$(i, x) \leq (j, y) \iff i = j \ \& \ x \leq_{\mathbb{N}} y$$

όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών.

(i) Δείξτε ότι ο (P, \leq) είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Αναπαραστήστε τον χώρο (P, \leq) με ένα διάγραμμα στο επίπεδο.

(iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του (P, \leq) .

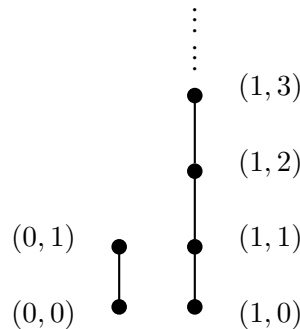
(iv) Δείξτε ότι το $(0, 1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του (P, \leq) .

(v) Εξηγήστε γιατί ο (P, \leq) δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Λύση.

(i) Είναι προφανές ότι $(i, x) \leq (i, x)$ για κάθε i, x . Αν $(i, x) \leq (j, y)$ και $(j, y) \leq (i, x)$ τότε $i = j$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} x$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x = y$. Για τη μεταβατική ιδιότητα υποθέτουμε ότι $(i, x) \leq (j, y) \leq (k, z)$. Τότε $i = j = k$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} z$ και από τη μεταβατική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x \leq_{\mathbb{N}} z$. Άρα $(i, x) \leq (k, z)$.

(ii) Το P δίνεται ήδη ως υποσύνολο του επιπέδου, επομένως είναι άμεση η αναπαράστασή του στο επίπεδο. (Φυσικά η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους.) Συνδέουμε με γραμμές τα σημεία που συγκρίνονται.



(iii) Πρώτα δείχνουμε ότι τα $(0, 0)$ και $(1, 0)$ είναι ελαχιστικά. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $(i, x) < (0, 0)$. Τότε $(i, x) \leq (0, 0)$ επομένως $i = 0$ και $x \leq_{\mathbb{N}} 0$. Επομένως $x = 0$ και $(i, x) = (0, 0)$ που είναι άτοπο. Ομοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει (i, x) με $(i, x) < (1, 0)$.

Μετά δείχνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο ελαχιστικό στοιχείο. Έστω $(i, x) \in P$ με $(i, x) \notin \{(0, 0), (1, 0)\}$. Θα βρούμε ένα (j, y) με $(j, y) < (i, x)$.

Αν $i = 0$ τότε αναγκαστικά $(i, x) = (0, 1)$ το οποίο δεν είναι ελαχιστικό γιατί $(0, 0) < (0, 1) = (i, x)$. Αν $i = 1$, τότε $x \neq 0$ και επομένως $x = St$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}$. Προφανώς $(i, t) < (i, x)$.

(iv) Πρώτα δείχνουμε ότι το $(0, 1)$ είναι μεγιστικό στοιχείο. Έστω $(i, x) \in P$ με $(0, 1) \leq (i, x)$. Τότε $i = 0$ και $1 \leq_{\mathbb{N}} x$. Αφού $(i, x) \in P$ έχουμε $x = 1$ και άρα $(i, x) = (0, 1)$. Επομένως δεν υπάρχει $(i, x) \in P$ με $(0, 1) < (i, x)$.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα $(i, x) \in P \setminus \{(0, 1)\}$ και δείχνουμε ότι το (i, x) δεν είναι μεγιστικό. Αν $i = 0$ τότε $x = 0$ οπότε έχουμε $(i, x) = (0, 0) < (0, 1)$. Αν $i = 1$ τότε $(i, x) = (1, x) < (1, Sx)$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $(j, y) \in P$ με $(i, x) < (j, y)$ και άρα το (i, x) δεν είναι μεγιστικό.

(v) Ο (P, \leq) δεν έχει ελάχιστο γιατί έχει δύο διαφορετικά ελαχιστικά στοιχεία. Επίσης δεν έχει μέγιστο γιατί αν είχε αυτό θα ήταν το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο. Από το (iv) το μέγιστο στοιχείο θα ήταν το $(0, 1)$. Αλλά τότε θα είχαμε $(j, y) \leq (0, 1)$ για κάθε $(j, y) \in P$ που δίνει άτοπο για $j = 0$ (και y τυχαίο φυσικό).

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική). Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P , ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος (P, \leq) με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Λύση.

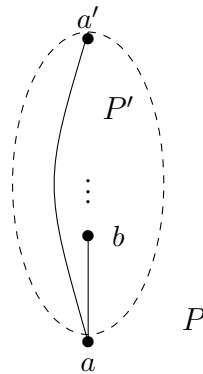
Ασχολούμαστε αρχικά με την ύπαρξη μεγιστικού στοιχείου. Αν το P έχει μόνο ένα στοιχείο τότε αυτό είναι προφανώς μεγιστικό. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος (P, \leq) με το P να έχει το πολύ n στοιχεία και να είναι μη κενό, έχει μεγιστικό στοιχείο.

Δείχνουμε την ιδιότητα για το $n + 1$. Έστω ένας μερικά διατεταγμένος χώρος (P, \leq) που έχει το πολύ $n + 1$ στοιχεία με $P \neq \emptyset$. Θεωρούμε k το πλήθος των στοιχείων του P . Αν $k \leq n$ τότε έχουμε το ζητούμενο από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως υποθέτουμε ότι το P έχει ακριβώς $n + 1$ στοιχεία.

Θεωρούμε ένα τυχαίο $a \in P$. Αν το a είναι μεγιστικό του P έχουμε το ζητούμενο. Επομένως υποθέτουμε ότι το a δεν είναι μεγιστικό. Τότε υπάρχει $b \in P$ με $a < b$. Ορίζουμε το σύνολο

$$P' = \{x \in P \mid a < x\}.$$

Τότε $b \in P'$ και ειδικότερα $P' \neq \emptyset$. Από την άλλη $a \notin P'$ επομένως το σύνολο P' έχει το πολύ n στοιχεία. Θεωρούμε το P' με τον περιορισμό \leq' της σχέσης \leq (Άσκηση 1). Από την Επαγωγική Υπόθεση το P' έχει ένα μεγιστικό στοιχείο a' ως προς \leq' .



Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του (P, \leq) . Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in P$ με $a' < x$. Επειδή $a' \in P'$ έχουμε $a < a' < x$. Επομένως $a < x$ δηλαδή $x \in P'$. Αφού $a', x \in P'$ και $a' < x$ έχουμε $a' <' x$, όπου $<'$ είναι το αυστηρό μέρος της \leq' . Άρα υπάρχει $x \in P'$ με $a' <' x$ που είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του (P', \leq') . Συνεπώς το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του (P, \leq) .

Σχετικά με την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου θεωρούμε την αντίστροφη διάταξη \trianglelefteq ,

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x,$$

Προφανώς η \leq είναι η αντίστροφη διάταξη της \trianglelefteq . Σύμφωνα με την Άσκηση 3 ένα μεγιστικό στοιχείο του (P, \trianglelefteq) είναι ελαχιστικό του (P, \leq) . (Φυσικά μπορεί κανείς να δείξει την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου επαγωγικά όπως και με το μεγιστικό στοιχείο.)

Άσκηση 6 (Απαιτητική). Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο (P, \leq) και ένα πεπερασμένο $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S , δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S .

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Λύση.

Επειδή το a είναι μεγιστικό του S έχουμε ειδικότερα ότι $a \in S$. Αφού το a δεν είναι μέγιστο του S υπάρχει ένα $b \in S$ με $b \not\leq a$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$P' = \{x \in S \mid b \leq x\}.$$

Τότε $b \in P'$ και $a \notin P'$, ειδικότερα $P' \neq \emptyset$. Επίσης το P' είναι πεπερασμένο ως υποσύνολο του P . Από την Άσκηση 5 ο χώρος P' με τον περιορισμό της διάταξης \leq έχει μεγιστικό στοιχείο $a' \in P'$. Για ευκολία συμβολίζουμε τον περιορισμό της διάταξης \leq στο P' πάλι με \leq .

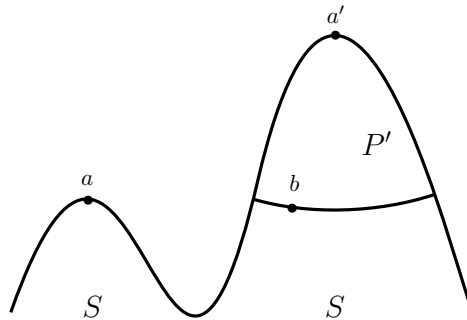
Εφόσον $a' \in P' \subseteq S$ και $a \notin P'$ έχουμε $a' \in S$ και $a' \neq a$. Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό του S .

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in S$ με $a' < x$. Αφού $a' \in P'$ έχουμε $b \leq a' < x$. Ειδικότερα $x \in S$ και $b \leq x$, δηλαδή $x \in P'$.

Καταλήγουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο του P' που είναι γνήσια μεγαλύτερο του a' ως προς την \leq . Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του P' .

Συνεπώς $a' \not< x$ για κάθε $x \in S$ και το $a' \in S$ είναι μεγιστικό του S .

Σχήμα:



Τα πιο πάνω στοιχεία a, b δεν είναι συγκρίσιμα. Από την επιλογή του b έχουμε $b \not\leq a$. Αν είχαμε $a \leq b$ τότε $a < b$ το οποίο είναι άτοπο γιατί $b \in S$ και το a είναι μεγιστικό του S .