# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

# 2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1.** Δείξτε (με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein) ότι για όλα τα σύνολα $A$, $B$, $C$ ισχύουν τα εξής:

(i) $A \not<_c A$.

(ii) Αν $A \leq_c B$ και $B <_c C$ τότε $A <_c C$.

(iii) Αν $A <_c B$ και $B \leq_c C$ τότε $A <_c C$.

**Άσκηση 2.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Άσκηση 3.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός $\pi$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

**Σχόλιο:** Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

**Άσκηση 4.** Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του $X$,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

**Άσκηση 5** (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι $1-1$ και επί, όπου $\Delta$ είναι το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

**Άσκηση 6** (Λήμμα 2.25)**.** Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

**Υπόδειξη:** Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο όλων των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

**Άσκηση 7** (Προβλήματα x2.1 και x2.2)**.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Ορίστε μία 1-1 και επί συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (a,b)$.

(ii) Ορίστε μια 1-1 και επί συνάρτηση $g : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a,b) =_c (a,b] =_c \mathbb{R}$.