

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Συμβολισμός. Με $[0, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $k \in \mathbb{N}$ με $k < n$. Υπειθυμίζεται ότι ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, n)$. Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο $n \in \mathbb{N}$ είναι μοναδικό. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A θέτουμε

$$\#A = \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ με } A =_c [0, n).$$

Άσκηση 1. Δείξτε τα εξής:

- (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \subseteq [0, n)$ το A είναι πεπερασμένο και $\#A \leq n$.
- (ii) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο B και κάθε $A \leq_c B$ το A είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#A \leq \#B$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε δύο **ξένα** πεπερασμένα σύνολα A, B και $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$. Δείξτε με επαγωγή στο \mathbb{N} ότι $[0, m+n) =_c A \cup B$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων A και B είναι πεπερασμένο σύνολο και πως

$$\#(A \cup B) \leq \#A + \#B.$$