Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

11ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. 1) Για καλά διατεταγμένους χώρους U, V ορίζουμε

$$U \leq_o V \iff \text{υπάρχει αρχική ομοιότητα } \pi : U \rightarrowtail V \quad \text{και}$$
$$U <_o V \iff U \leq_o V \ \& \ U \neq_o V.$$

2) Θεώρημα Συγκρισιμότητας Καλά Διατεταγμένων χώρων: για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U και V έχουμε $U \leq_o V$ ή $V \leq_o U$.

Άσκηση 1. Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V δείξτε ότι

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o seg_V(x)],$$

όπου $seg_V(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $y \in V$ με $y <_V x$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι τα αρχικά τμήματα του V είναι είτε το V είτε σύνολα της μορφής $seg_V(x)$ όπου $x \in V$. (Γνωστό από προηγούμενη άσκηση.)

Λύση.

($\Longrightarrow$) Θεωρούμε μια αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$. Το σύνολο $\pi[U]$ είναι αρχικό τμήμα του V. Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε είτε $\pi[U] = V$ είτε $\pi[U] = seg_V(x)$ για κάποιο $x \in V$. Στην πρώτη περίπτωση η π θα ήταν επί και επομένως θα ήταν και ομοιότητα. Τότε θα είχαμε $U =_o V$ που είναι άτοπο. Άρα συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση. Προφανώς η π είναι ομοιότητα μεταξύ του U και του $\pi[U]$, άρα $U =_o \pi[U] = seg_V(x)$.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $U =_o seg(x)$ για κάποιο $x \in V$. Κάθε ομοιότητα $\tau : U \twoheadrightarrow seg_V(x)$ είναι αρχική ομοιότητα $\tau : U \rightarrowtail V$ γιατί η τ είναι 1-1, σέβεται τις διατάξεις, και το σύνολο $\tau[U] = seg_V(x)$ είναι αρχικό τμήμα του V. Επομένως $U \leq_o V$. Αν είχαμε $U =_o V$ τότε θα είχαμε $V =_o U =_o seg_V(x)$ και επομένως ο V θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό του τμήμα που είναι άτοπο. Άρα $U \neq_o V$ και $U <_o V$.

Άσκηση 2 (7.28. Άσκηση)**.** Δείξτε ότι η σύνθεση αρχικών ομοιοτήτων είναι αρχική ομοιότητα.

Λύση.

Αν $\pi_1 : U \rightarrowtail V$ και $\pi_2 : V \rightarrowtail W$ είναι αρχικές ομοιότητες τότε η συνάρτηση $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : U \rightarrowtail W$ είναι 1-1 και για κάθε $x', x \in U$ έχουμε

$$x' \leq_U x \iff \pi_1(x') \leq_V \pi_1(x) \iff \pi_2(\pi_1(x')) \leq_W \pi_2(\pi_1(x)) \iff \pi(x') \leq \pi(x).$$

Αυτό που χρειάζεται περισσότερη δουλειά είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\pi[U]$ είναι αρχικό τμήμα του W. Θεωρούμε $w \in \pi[U]$ και $w' \leq_W w$. Πρέπει να δείξουμε ότι $w' \in \pi[U]$.

Έχουμε $w = \pi_2(\pi_1(x))$ για κάποιο $x \in U$. Αφού η π_2 είναι αρχική ομοιότητα το σύνολο $\pi_2[V]$ είναι αρχικό τμήμα του W. Από τα $w' \leq_W w$ και $w \in \pi_2[\pi_1[U]] \subseteq \pi_2[V]$ προκύπτει $w' \in \pi_2[V]$ και άρα υπάρχει $y' \in V$ με $w' = \pi_2(y')$.

Παρατηρούμε ότι

$$w' \leq_W w \iff \pi_2(y') \leq_W \pi_2(\pi_1(x)) \iff y' \leq_V \pi_1(x).$$

Αφού η π_1 είναι αρχική ομοιότητα το σύνολο $\pi_1[U]$ είναι αρχικό τμήμα του V και αφού $y' \leq_V \pi_1(x) \in \pi_1[U]$ έχουμε $y' \in \pi_1[U]$. Άρα υπάρχει $x' \in U$ με $y' = \pi_1(x')$ και επομένως $w' = \pi_2(y') = \pi_2(\pi_1(x')) \in \pi_2[\pi_1[U]] = \pi[U]$. Έχουμε δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x7.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W έχουμε

$$U <_o V \;\&\; V \leq_o W \implies U <_o W$$
$$U \leq_o V \;\&\; V <_o W \implies U <_o W.$$

(Θεωρήστε γνωστή τη μεταβατική ιδιότητα.)

Λύση.

Έστω $U <_o V$ και $V \leq_o W$. Τότε $U \leq_o W$. Αν είχαμε $U =_o W$ τότε $V \leq_o W =_o U <_o V$ και άρα από την Άσκηση 1 ο V θα ήταν όμοιος με κάποιο $\mathrm{seg}_V(x)$, $x \in V$, που είναι άτοπο. (Εδώ χρησιμοποιούμε ότι η σύνθεση ομοιοτήτων με αρχικές ομοιότητες είναι αρχική ομοιότητα, κάτι που είναι άμεσο από την Άσκηση 2 καθώς κάθε ομοιότητα είναι και αρχική ομοιότητα.)

Η δεύτερη συνεπαγωγή αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x7.15)**.** Αν κ, λ είναι καλά διατάξιμοι πληθάριθμοι τότε $\kappa \leq_c \lambda$ ή $\lambda \leq_c \kappa$.

Ένα μη κενό σύνολο A είναι **καλά διατάξιμο** αν υπάρχει μια καλή διάταξη $\leq$ στο A.

Λύση.

Θεωρούμε καλές διατάξεις $\leq$ και $\trianglelefteq$ στα σύνολα κ και λ αντίστοιχα. Τότε από το Θεώρημα Συγκρισιμότητας Καλά Διατεταγμένων χώρων έχουμε ή $(\kappa, \leq) \leq_o (\lambda, \trianglelefteq)$ ή $(\lambda, \trianglelefteq) \leq_o (\kappa, \leq)$. Στην πρώτη περίπτωση προκύπτει $\kappa \leq_c \lambda$ και στη δεύτερη $\lambda \leq_c \kappa$.

Άσκηση 5 (Απαιτητική)**.**

(i) Έστω V ένας καλά διατεταγμένος χώρος που είναι άπειρο σύνολο και που δεν έχει οριακά σημεία. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to V$ με

$$f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V \quad \text{και} \quad f(n + 1_{\mathbb{N}}) = \begin{cases} S_V(f(n)), & \text{αν υπάρχει } y \in V \text{ με } f(n) <_V y \\ 0_V, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιότητα και επομένως ισχύει $V =_o \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε το $0_{\mathbb{N}}$ στο 0_V, το $1_{\mathbb{N}}$ στο $S_V(0_V)$ κ.ο.κ. Η δεύτερη περίπτωση στη διακλάδωση του ορισμού της f (δηλαδή το "αλλιώς") μπαίνει γιατί δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι για κάθε n θα υπάρχει $y \in V$ με $f(n) <_V y$. Το "αλλιώς" δεν θα συμβαίνει όμως ποτέ, δηλαδή θα είμαστε πάντα στην πρώτη περίπτωση.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο V που είναι άπειρο σύνολο έχουμε $1 + V =_0 V$, όπου $1 = \{\varnothing\}$ και $+$ είναι η πρόσθεση μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.

Λύση.

(i) Αρχικά δείχνουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι για κάθε $k <_{\mathbb{N}} n$ έχουμε $f(k) <_V f(n)$ και πως για κάθε $y <_V f(n)$ υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $f(m) = y$.

Για $n = 0_{\mathbb{N}}$ το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα επειδή $f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V$ και συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοια k, y.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει για κάθε $k <_{\mathbb{N}} n$, $f(k) <_V f(n)$ και κάθε $y <_V f(n)$ υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $f(m) = y$.

Έστω $k <_{\mathbb{N}} n + 1_{\mathbb{N}}$. Από την επαγωγική υπόθεση το σύνολο $\{y \in V \mid y \leq_V f(n)\}$ είναι ίσο με το $\{f(m) \mid m \leq_{\mathbb{N}} n\}$ και επομένως είναι πεπερασμένο. Εφόσον το V είναι άπειρο σύνολο υπάρχει $y \in V$ εκτός αυτού του συνόλου και άρα $f(n) <_V y$. Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του ορισμού, δηλαδή $f(n + 1_{\mathbb{N}}) = S_V(f(n))$. Επιπλέον

$$f(k) \leq_V f(n) <_V S_V(f(n)) = f(n + 1_{\mathbb{N}}),$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και ότι $k \leq n$. Καταλήγουμε ότι $f(k) <_V f(n + 1_{\mathbb{N}})$. Θεωρούμε τώρα ένα $y <_V f(n + 1_{\mathbb{N}}) = S_V(f(n))$. Τότε $y \leq_V f(n)$. Αν $y <_V f(n)$ από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $y = f(m)$, ενώ αν $y = f(n)$ παίρνουμε $m = n$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

Από αυτό που έχουμε δείξει προκύπτει ότι η f σέβεται τις διατάξεις (και άρα είναι και 1-1) και πως το σύνολο $f[\mathbb{N}]$ είναι αρχικό τμήμα του V.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι επί. Τότε $f[\mathbb{N}] \neq V$ και επομένως υπάρχει $y \in V$ με $f[\mathbb{N}] = \mathrm{seg}_V(y)$. Προφανώς $y \neq 0_V$. **Αφού ο V δεν έχει οριακά σημεία** $y = S_V(x)$ για κάποιο $x \in V$. Τότε

$x \in \mathrm{seg}_V(y) = f[\mathbb{N}]$ άρα $x = f(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αλλά τότε $x = f(n) <_V f(n+1_{\mathbb{N}})$ και άρα $y = S_V(x) \leq f(n+1_{\mathbb{N}})$, δηλαδή $f(n+1_{\mathbb{N}}) \notin \mathrm{seg}_V(y) = f[\mathbb{N}]$, άτοπο. Επομένως η f είναι επί και άρα είναι και ομοιότητα.

(ii) Αν ο V δεν έχει οριακά σημεία τότε από το (i) $V =_o \mathbb{N}$. Έχουμε δει από προηγούμενη άσκηση ότι

$$1 + \mathbb{N} =_0 \mathbb{N} \quad \text{άρα} \quad 1 + V =_o V.$$

Επομένως υποθέτουμε ότι ο V έχει οριακά σημεία. Θεωρούμε το ελάχιστο οριακό σημείο ω_V του V. Τότε το άπειρο σύνολο $\mathrm{seg}_V(\omega_V)$ μαζί με τη διάταξη του V είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος που δεν έχει οριακά σημεία. Από τα προηγούμενα $1 + \mathrm{seg}_V(\omega_V) =_o \mathrm{seg}_V(\omega_V)$. Επιπλέον αν θέσουμε $U = \{y \in V \mid \omega_V \leq y\}$ έχουμε

$$V =_o \mathrm{seg}_V(\omega_V) + U.$$

Άρα

$$1 + V =_o 1 + (\mathrm{seg}_V(\omega_V) + U) =_o (1 + \mathrm{seg}_V(\omega_V)) + U =_o \mathrm{seg}_V(\omega_V) + U =_o V.$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x7.16 - Απαιτητική)**.** Αν κ είναι ένας άπειρος καλά διατάξιμος πληθάριθμος τότε $\kappa + 1 =_c \kappa$.

Σχόλιο. Εδώ το σύμβολο $+$ δηλώνει την πρόσθεση μεταξύ πληθαρίθμων, δηλαδή

$$\kappa + 1 = |\,(\{0\} \times \kappa) \bigcup (\{1\} \times \{1\})\,| =_c (\{0\} \times \kappa) \bigcup \{(1,1)\}.$$

Για κάθε καλή διάταξη $\leq$ στο κ μπορούμε να βρούμε εύκολα μια καλή διάταξη στο $\kappa + 1$ έτσι που ο $(\kappa + 1, \leq')$ να είναι όμοιος με τον επόμενο του $(\kappa, \leq)$.

Βλέπουμε από αυτή την άσκηση ότι οι δύο έννοιες $\leq_o$ και $\leq_c$ διαφέρουν στα άπειρα σύνολα που επιδέχονται καλής διάταξης: από τη μία έχουμε $\kappa =_c \kappa + 1$ ενώ από την άλλη $(\kappa, \leq) <_o (\kappa + 1, \leq')$.

Λύση.

Προς αποφυγήν σύγχυσης συμβολίζουμε σε αυτή την άσκηση με $+_o$ το άθροισμα μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων. Θεωρούμε μια καλή διάταξη στο κ. Προφανώς αυτή μεταφέρεται σε μια καλή διάταξη στο $\{0\} \times \kappa$ έτσι που οι δύο χώροι να είναι όμοιοι.

Μετά επεκτείνουμε την τελευταία διάταξη στο σύνολο $(\{0\} \times \kappa) \cup \{(1,1)\}$ τοποθετώντας το $(1,1)$ ως το **ελάχιστο** στοιχείο. Επομένως ο χώρος $(\{0\} \times \kappa) \cup \{(1,1)\}$ είναι όμοιος και επομένως ισοπληθικός με τον $1 +_o \kappa$.

Αφού το κ είναι άπειρο σύνολο έχουμε από την Άσκηση 5 ότι $1 +_o \kappa =_o \kappa$. Ειδικότερα έχουμε $1 +_o \kappa =_c \kappa$. Τέλος

$$\kappa + 1 =_c (\{0\} \times \kappa) \bigcup \{(1,1)\} =_c 1 +_o \kappa =_c \kappa.$$

Άσκηση 7. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος, A ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{D} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A)$.

Ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή την οικογένεια $(C_x)_{x \in U}$ υποσυνόλων του A ως εξής:

$$C_{0_U} = A$$

$$C_y = \mathcal{D}(C_x) \quad \text{αν } y = Sx,$$

$$C_y = \bigcap_{x<y} C_x \quad \text{αν το } y \text{ είναι οριακό σημείο.}$$

(i) Δείξτε με επαγωγή στο y ότι για κάθε $z, y \in U$ με $z \leq y$ έχουμε $C_y \subseteq C_z$.

(ii) (Για όσες/όσους γνωρίζουν τοπολογία) Αν $A = [0,1]^2$ και η συνάρτηση $\mathcal{D}$ ικανοποιεί επιπλέον την εξής ιδιότητα:

X μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2 \implies \mathcal{D}(X)$ μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$,

δείξτε ότι κάθε C_y είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.

Λύση.

(i) Θεωρούμε την ιδιότητα

$$P(y) \iff (\forall z \leq y)[C_y \subseteq C_z].$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η $P(y)$ για κάθε $y \in U$.

Έστω $y \in U$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x < y$ ισχύει η $P(x)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και $P(y)$. Αν το δείξουμε αυτό τότε από την Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής θα έχουμε το ζητούμενο.

Αν $y = 0_U$ τότε για κάθε $z \leq y$ θα έχουμε $z = 0_U$ και άρα $C_y = C_{0_U} = A = C_z$. Άρα ισχύει $P(y)$.

Αν $y = Sx$ τότε για κάθε $z \leq y$ θα έχουμε είτε $z \leq x$ είτε $z = Sx = y$. Αν $z = Sx = y$ τότε προφανώς $C_y = C_x$. Αν $z \leq x$ τότε

$$C_y = C_{Sx} = \mathcal{D}(C_x) \subseteq C_x \subseteq C_z$$

όπου στον πρώτο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ και στον δεύτερο την Επαγωγική Υπόθεση. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $C_y \subseteq C_z$ για κάθε $z \leq y$, δηλαδή ισχύει $P(y)$.

Τέλος αν το y είναι οριακό σημείο τότε για κάθε $z \leq y$ είτε $z = y$ οπότε προφανώς $C_y = C_z$ είτε $z < y$ οπότε

$$C_y = \cap_{x<y} C_x \subseteq C_z.$$

(Εδώ δεν χρειάζεται η Επαγωγική Υπόθεση.) Άρα ισχύει $P(y)$.

(ii) Δείχνουμε με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή στο y ότι κάθε C_y είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]^2$. Έστω $y \in U$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x < y$ το σύνολο C_x είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]^2$. Δείχνουμε το ίδιο για το C_y.

Αν $y = 0_U$ τότε $C_y = C_{0_U} = [0, 1]^2$ που είναι προφανώς μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]^2$.

Αν $y = Sx$ τότε $C_y = C_{Sx} = \mathcal{D}(C_x)$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το C_x είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]^2$, και από την ιδιότητα της $\mathcal{D}$ το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{D}(C_x) = C_y$.

Αν το y είναι οριακό σημείο τότε $C_y = \cap_{x<y} C_x$. Από την Επαγωγική Υπόθεση κάθε C_x είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]^2$. Επομένως το C_y είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων. Μένει να δείξουμε ότι είναι μη κενό. Εδώ χρησιμοποιούμε την έννοια της συμπάγειας.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $(C_x)_{x<y}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή για κάθε $x_1, \ldots, x_n < y$ έχουμε $\cap_{i=1}^n C_{x_i} \neq \varnothing$. Αυτό συμβαίνει λόγω του (i) και της Επαγωγικής Υπόθεσης: θεωρούμε $x_1, \ldots, x_n < y$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε από το (i) ότι $C_{x_i} \supseteq C_{x_n}$ και άρα

$$\cap_{i=1}^n C_{x_i} = C_{x_n} \neq \varnothing \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}.$$

Εφόσον η οικογένεια κλειστών συνόλων $(C_x)_{x<y}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και το $[0, 1]^2$ είναι συμπαγής χώρος προκύπτει ότι η τομή $\cap_{x<y} C_x$ είναι μη κενή.