Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Λύση.

(i) Έχουμε

$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x', (y, z')) = (x', y', z').$$

Τότε $x = x'$ και $(y, z) = (y', z')$. Από το τελευταίο προκύπτει $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ δύο συνόλων X_1 και X_2 είναι σύνολο. Επομένως έχουμε τα σύνολα $B \times C$ και $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45)**.** Δείξτε από τα αξιώματα ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

Σχόλιο: Το τελευταίο ερώτημα το έχουμε δείξει στο 2ο Φυλλάδιο - Άσκηση 6.

Λύση.

Θεωρούμε $\tau : A \to A'$ και $\rho : B \to B'$ 1-1 και επί συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X \biguplus Y = (\{\varnothing\} \times X) \times (\{\{\varnothing\}\} \times Y).$$

(i) Ορίζουμε $g : (\{\varnothing\} \times A) \cup (\{\{\varnothing\}\} \times B) \longrightarrow (\{\varnothing\} \times A') \cup (\{\{\varnothing\}\} \times B')$ ως εξής:

$$g(\varnothing, x) = (\varnothing, \tau(x)), \quad \text{όπου } x \in A \qquad \text{και} \qquad g(\{\varnothing\}, x) = (\{\varnothing\}, \rho(x)) \quad \text{όπου } x \in B.$$

Προκύπτει εύκολα ότι η g είναι 1-1 και επί.

(ii) Ορίζουμε $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ με $h(a, b) = (\tau(a), \rho(b))$. Τότε η h είναι 1-1 και επί.

(iii) Όπως έχουμε δει στο 2ο Φυλλάδιο - Άσκηση 6 η ζητούμενη 1-1 και επί συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$H : (A \to B) \to (A' \to B') : H(f)(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[l, bend right, "\tau^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\
B \arrow[r, "\rho"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Όλα οι προηγούμενες συναρτήσεις ορίζονται και αποδεικνύεται ότι είναι 1-1 και επί με βάση τα αξιώματα. Για παράδειγμα η H ορίζεται ως το σύνολο

$$\{(f, g) \in (A \to B) \times (A' \to B') \mid (\forall a' \in A')[g(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')]\}.$$

Στις επόμενες ασκήσεις θεωρούμε έναν ασθενή τελεστή πληθικότητας $A \mapsto |A|$.

Άσκηση 3 (Άσκηση 4.23 σελ. 48)**.** Για κάθε σύνολα A, B ισχύει

$$|A \cup B| \leq_c |A| + |B|.$$

Αν επιπλέον $A \cap B = \varnothing$ τότε

$$|A \cup B| =_c |A| + |B|.$$

Λύση.

Επειδή $|A| + |B| = |A| \uplus |B| =_c A \uplus B$ για να εξασφαλίσουμε τη ζητούμενη ανισότητα κατά Cantor αρκεί να δείξουμε ότι $A \cup B \leq_c A \uplus B$.

Ορίζουμε $f : A \cup B \to A \uplus B$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} (\varnothing, x), & \text{αν } x \in A \\ (\{\varnothing\}, x), & \text{αν } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

(Παρατηρούμε ότι $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.) Είναι σαφές ότι η f είναι 1-1.

Για τη ζητούμενη ισότητα κατά Cantor θεωρούμε την πιο πάνω f και παρατηρούμε πως αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $B \setminus A = \varnothing$. Επομένως $f(x) = (\varnothing, x)$ αν $x \in A$ και $f(x) = (\{\varnothing\}, x)$ αν $x \in B$. Προκύπτει εύκολα ότι η f εκτός από 1-1 είναι και επί.

Άσκηση 4 (Άσκηση 4.24 σελ. 48)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa_1 =_c \kappa_2$ και $\lambda_1 =_c \lambda_2$ έχουμε

$$\kappa_1 + \lambda_1 =_c \kappa_2 + \lambda_2, \qquad \kappa_1 \cdot \lambda_1 =_c \kappa_2 \cdot \lambda_2, \qquad \kappa_1^{\lambda_1} = \kappa_2^{\lambda_2}.$$

Λύση.

Οι ζητούμενες ιδιότητες προκύπτουν από τις αντίστοιχες της Άσκησης 2 και τις ιδιότητες του πληθικού τελεστή. Αρχικά θεωρούμε σύνολα A_1, A_2, B_1, B_2 με $\kappa_1 = |A_1|$, $\kappa_2 = |A_2|$, $\lambda_1 = |B_1|$ και $\lambda_2 = |B_2|$. Από τις ιδιότητες του πληθικού τελεστή έχουμε

$$\kappa_1 = |A_1| =_c A_1 =_c A_2 =_c |A_2| = \kappa_2$$

και

$$\lambda_1 = |B_1| =_c B_1 =_c B_2 =_c |B_2| = \lambda_2.$$

Για την πρώτη ισότητα κατά Cantor έχουμε

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \lambda_1 &= \left| \kappa_1 \uplus \lambda_1 \right| && \text{(εξ' ορισμού)} \\ &=_c \kappa_1 \uplus \lambda_1 && \text{(από τις ιδιότητες του πληθικού τελεστή)} \\ &=_c \kappa_2 \uplus \lambda_2 && \text{(από την Άσκηση 2 αφού } \kappa_1 =_c \kappa_2 \text{ και } \lambda_1 =_c \lambda_2\text{)} \\ &=_c \left| \kappa_2 \uplus \lambda_2 \right| && \text{(από τις ιδιότητες του πληθικού τελεστή)} \\ &= \kappa_2 + \lambda_2. && \text{(εξ' ορισμού)} \end{aligned}$$

Οι άλλες δύο ισότητες κατά Cantor αποδεικνύονται όμοια.

Άσκηση 5 (Άσκηση 4.28 σελ. 49)**.** Δείξτε ότι για κάθε σύνολα K, L, M με $L \cap M = \varnothing$ ισχύει

$$(L \cup M \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Συμπεράνετε ότι για κάθε σύνολα K, A, B ισχύει

$$(A \uplus B \to K) =_c (A \to K) \times (B \to K).$$

Λύση.

Ορίζουμε $H : (L \cup M \to K) \longrightarrow (L \to K) \times (M \to K)$ ως εξής: αν $f \in (L \cup M \to K)$ τότε $H(f) = (g_1, g_2)$ όπου

$$g_1 : L \to K : g_1(x) = f(x) \quad g_2 : M \to K : g_2(x) = f(x).$$

(Παρατηρήστε ότι η f ορίζεται σε κάθε $x \in L$ και σε κάθε $x \in M$, επομένως οι g_1, g_2 είναι καλά ορισμένες.) Προφανώς $H(f) \in (L \to K) \times (M \to K)$.

Δείχνουμε ότι η H είναι 1-1. Έστω $H(f) = (g_1, g_2)$ και $H(f') = (g_1', g_2')$ με $H(f) = H(f')$. Τότε $g_1 = g_1'$ και $g_2 = g_2'$. Θεωρούμε $x \in L \cup M$. Αν $x \in L$ τότε $f(x) = g_1(x) = g_1'(x) = f'(x)$. Όμοια αν $x \in M$ τότε $f(x) = g_2(x) = g_2'(x) = f'(x)$. Άρα $f(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in L \cup M$ και $f = f'$.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $L \cap M = \varnothing$. Θα το χρειαστούμε για να δείξουμε ότι η H είναι επί. Έστω τυχαίες συναρτήσεις $h_1 : L \to K$ και $h_2 :\to K$. Ορίζουμε $f : L \cup M \to K$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{αν } x \in L \\ h_2(x), & \text{αν } x \in M. \end{cases}$$

Επειδή $L \cap M = \varnothing$ ακριβώς μία από τις περιπτώσεις $x \in L$ και $x \in M$ συμβαίνει για κάθε $x \in L \cup M$. Επομένως η f είναι καλά ορισμένη.

Τέλος δείχνουμε ότι $H(f) = (h_1, h_2)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1, g_2 με $H(f) = (g_1, g_2)$. Έστω $x \in L$, τότε $g_1(x) = f(x) = h_1(x)$, άρα $g_1 = h_1$. Όμοια δείχνουμε ότι $g_2 = h_2$.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα κατά Cantor,

$$\begin{aligned}
(A \uplus B \to K) &= ((\{\varnothing\} \times A) \cup (\{\{\varnothing\}\} \times B) \to K) && \text{(από τον ορισμό)} \\
&=_c (\{\varnothing\} \times A \to K) \times (\{\{\varnothing\}\} \times B \to K) && \text{(από το πιο πάνω αφού τα σύνολα} \\
& && \{\varnothing\} \times A \text{ και } \{\{\varnothing\}\} \times B \text{ είναι ξένα)} \\
&=_c (A \to K) \times (B \to K) && \text{(από την Άσκηση 2 αφού} \\
& && \{\varnothing\} \times A =_c A \text{ και } \{\{\varnothing\}\} \times B =_c B).
\end{aligned}$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x4.11)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$\kappa + (\lambda + \mu) =_c (\kappa + \lambda) + \mu$$
$$\kappa + \lambda =_c \lambda + \kappa$$

Για συντομία δώστε μόνο τον ορισμό των ζητούμενων συναρτήσεων χωρίς να δείξετε ότι είναι 1-1 και επί.

Λύση.

Έχουμε

$$\kappa + (\lambda + \mu) = |k \uplus (\lambda + \mu)| =_c k \uplus (\lambda + \mu) = k \uplus |\lambda \uplus \mu| =_c \kappa \uplus (\lambda \uplus \mu)$$

και όμοια έχουμε

$$(\kappa + \lambda) + \mu =_c (\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\kappa \uplus (\lambda \uplus \mu) =_c (\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu.$$

Εξ' ορισμού

$$\kappa \uplus (\lambda \uplus \mu) = (\{\varnothing\} \times \kappa) \bigcup \{\{\varnothing\}\} \times (\{\varnothing\} \times \lambda \cup \{\{\varnothing\}\} \times \mu)$$

και

$$(\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu = \{\varnothing\} \times (\{\varnothing\} \times \kappa \cup \{\{\varnothing\}\} \times \lambda) \bigcup \{\{\varnothing\}\} \times \mu.$$

Ορίζουμε την

$$f : \kappa \uplus (\lambda \uplus \mu) \longrightarrow (\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu$$

με τον εξής τρόπο:

$$f(\varnothing, x) = (\varnothing, \varnothing, x), \quad f(\{\varnothing\}, \varnothing, y) = (\varnothing, \{\varnothing\}, y), \quad f(\{\varnothing\}, \{\varnothing\}, z) = (\{\varnothing\}, z)$$

όπου $x \in \kappa$, $y \in \lambda$ και $z \in \mu$.

Για τη δεύτερη ισότητα κατά Cantor αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varnothing\} \times \kappa \bigcup \{\{\varnothing\}\} \times \lambda =_c \{\varnothing\} \times \lambda \bigcup \{\{\varnothing\}\} \times \kappa,$$

που αυτό προκύπτει εύκολα μέσω της συνάρτησης g με

$$g(\varnothing, x) = (\{\varnothing\}, x), \quad g(\{\varnothing\}, y) = (\varnothing, y)$$

όπου $x \in \kappa$ και $y \in \lambda$.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x4.12)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) =_c (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$$
$$\kappa \cdot \lambda =_c \lambda \cdot \kappa$$
$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) =_c \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

Για συντομία δώστε μόνο τον ορισμό των ζητούμενων συναρτήσεων χωρίς να δείξετε ότι είναι 1-1 και επί.

Λύση.

Για το πρώτο ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι

$$\kappa \times (\lambda \times \mu) =_c (\kappa \times \lambda) \times \mu.$$

Αυτό είναι άμεσο διά της συνάρτησης f με

$$f(x, (y, z)) = ((x, y), z)$$

όπου $x \in \kappa$, $y \in \lambda$ και $z \in \mu$.

Για το δεύτερο ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι

$$\kappa \times \lambda =_c \lambda \times \kappa,$$

το οποίο είναι και αυτό άμεσο διά της συνάρτησης g με $g(x, y) = (y, x)$ όπου $x \in \kappa$ και $y \in \lambda$.

Για το τελευταίο ζητούμενο έχουμε

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = |\kappa \times (\lambda + \mu)| =_c \kappa \times (\lambda + \mu) = \kappa \times (|\lambda \uplus \mu|) =_c \kappa \times (\lambda \uplus \mu) = \kappa \times (\ \{\varnothing\} \times \lambda\ \cup\ \{\{\varnothing\}\} \times \mu\ )$$

και

$$\kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu = \cdots =_c \kappa \times \lambda \uplus \kappa \times \mu = \{\varnothing\} \times \kappa \times \lambda \bigcup \{\{\varnothing\}\} \times \kappa \times \mu.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση h ως εξής:

$$h(x, \varnothing, y) = (\varnothing, x, y), \quad h(x, \{\varnothing\}, z) = (\{\varnothing\}, x, z)$$

όπου $x \in \kappa$, $y \in \lambda$ και $z \in \mu$.

Άσκηση 8 (Πρόβλημα x4.15)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} =_c \ \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$$
$$\kappa^{\lambda + \mu} =_c \ \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$$
$$(\kappa^{\lambda})^{\mu} =_c \ \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

Όπου χρειαστεί να ορίσετε 1-1 και επί συνάρτηση δώστε για συντομία μόνο τον ορισμό της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Στη δεύτερη ισότητα κατά Cantor εφαρμόστε την Άσκηση 5 και στην τρίτη την Άσκηση 7 του 2ου Φυλλαδίου.

Λύση.

Σχετικά με το πρώτο ζητούμενο έχουμε

$$(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = |(\mu \to \kappa \cdot \lambda)| =_c (\mu \to \kappa \cdot \lambda) = (\mu \to |\kappa \times \lambda|) =_c (\mu \to \kappa \times \lambda)$$

και

$$\kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu} = |\kappa^{\mu} \times \lambda^{\mu}| =_c \kappa^{\mu} \times \lambda^{\mu} = |(\mu \to \kappa)| \times |(\mu \to \lambda)| =_c (\mu \to \kappa) \times (\mu \to \lambda).$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\mu \to \kappa \times \lambda) =_c (\mu \to \kappa) \times (\mu \to \lambda).$$

Αυτό προκύπτει εύκολα από τη συνάρτηση

$$H : f \in (\mu \to \kappa \times \lambda) \mapsto (f_1, f_2)$$

όπου

$$f_1 : \mu \to \kappa : f_1(x) = \text{ η πρώτη συντεταγμένη του } f(x) \text{ και}$$
$$f_2 : \mu \to \lambda : f_2(x) = \text{ η δεύτερη συντεταγμένη του } f(x).$$

Για το δεύτερο ζητούμενο έχουμε

$$\kappa^{\lambda+\mu} = |(\lambda + \mu \to \kappa)| =_c (\lambda + \mu \to \kappa) = (|\lambda \uplus \mu| \to \kappa) =_c (\lambda \uplus \mu \to \kappa)$$

και

$$\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = |\kappa^\lambda \times \kappa^\mu| =_c \kappa^\lambda \times \kappa^\mu = |(\lambda \to \kappa)| \times |(\mu \to \kappa)| =_c (\lambda \to \kappa) \times (\mu \to \kappa).$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\lambda \uplus \mu \to \kappa) =_c (\lambda \to \kappa) \times (\mu \to \kappa)$$

το οποίο είναι άμεσο από την Άσκηση 5.

Τέλος όσον αφορά το τρίτο ζητούμενο έχουμε

$$(\kappa^\lambda)^\mu = |(\mu \to \kappa^\lambda)| =_c (\mu \to \kappa^\lambda) = (\mu \to |(\lambda \to \kappa)|) =_c (\mu \to (\lambda \to \kappa))$$

και

$$\kappa^{\lambda \cdot \mu} = |(\lambda \cdot \mu \to \kappa)| =_c (\lambda \cdot \mu \to \kappa) = (|\lambda \times \mu| \to \kappa) =_c (\lambda \times \mu \to \kappa).$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\mu \to (\lambda \to \kappa)) =_c (\lambda \times \mu \to \kappa),$$

το οποίο είναι άμεσο από την Άσκηση 7 στο 2ο Φυλλάδιο.

Άσκηση 9 (Προβλήματα x4.10, x4.13, x4.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ ότι:

$$\begin{aligned}
&\kappa + 0 =_c \kappa, \quad \kappa \cdot 0 =_c 0, \quad \kappa \cdot 1 =_c \kappa,\\
&\kappa^0 =_c 1, \quad \kappa^1 =_c \kappa, \quad \kappa^2 =_c \kappa \cdot \kappa,\\
&|\mathcal{P}(\kappa)| =_c 2^\kappa
\end{aligned}$$

όπου $0 = |\varnothing|$, $1 = |\{\varnothing\}|$ και $2 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$. Όπου χρειαστεί να ορίσετε 1-1 και επί συνάρτηση δώστε για συντομία μόνο τον ορισμό της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο μία επιλογή για τον πληθάριθμο του κενού συνόλου, η $|\varnothing| = \varnothing$. Άρα $0 = \varnothing$.

Λύση.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\kappa + 0 &= |\kappa \uplus 0| =_c \kappa \uplus 0 = \kappa \uplus \varnothing =_c \kappa,\\
\kappa \cdot 0 &= |\kappa \times 0| =_c \kappa \times 0 = \kappa \times \varnothing = \varnothing = 0,\\
\kappa \cdot 1 &= |\kappa \times 1| =_c \kappa \times 1 = \kappa \times \{\varnothing\} =_c \kappa,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα κατά Cantor είναι άμεση από τη συνάρτηση $f : \kappa \times \{\varnothing\} \to \kappa : f(x, \varnothing) = x$.

Συνεχίζουμε

$$\kappa^0 = |(0 \to \kappa)| =_c (0 \to \kappa) = (\varnothing \to \kappa).$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $(\varnothing \to \kappa)$ έχει μόνο ένα στοιχείο, το κενό σύνολο. Αν το δείξουμε αυτό τότε από την πιο πάνω γραμμή προκύπτει $\kappa^0 =_c \{\varnothing\} =_c |\{\varnothing\}| = 1$.

Για να δείξουμε ότι $(\varnothing \to \kappa) = \{\varnothing\}$ παρατηρούμε αρχικά ότι αν $f \in (\varnothing \to \kappa)$ τότε $f \subseteq \varnothing \times \kappa = \varnothing$ και άρα $f = \varnothing$. Επομένως το σύνολο $(\varnothing \to \kappa)$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο, το $\varnothing$. Για να δείξουμε ότι το τελευταίο είναι όντως στοιχείο του συνόλου $(\varnothing \to \kappa)$ παρατηρούμε ότι η πρόταση

$$(\forall x \in \varnothing)(\exists! y \in \kappa)[(x, y) \in \varnothing]$$

είναι λογικά ισοδύναμη με την

$$(\forall x)[x \notin \varnothing \ \vee \ (\exists! y \in \kappa)[(x, y) \in \varnothing]]$$

η οποία ισχύει γιατί η υπο-πρόταση $x \notin \varnothing$ ισχύει για κάθε x. (Η υπο-πρόταση $(\exists! y \in \kappa)[(x, y) \in \varnothing]$ δεν ισχύει για κανένα x αλλά αυτό δεν μας επηρεάζει.)

Η πιο πάνω πρόταση δείχνει ακριβώς ότι $\varnothing \in (\varnothing \to \kappa)$ κι έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Συνεχίζουμε

$$\kappa^1 = |(1 \to \kappa)| =_c (1 \to \kappa) =_c (|\{\varnothing\}| \to \kappa) =_c (\{\varnothing\} \to \kappa) =_c \kappa,$$

όπου η τελευταία ισότητα κατά Cantor προκύπτει από τη συνάρτηση $g : \kappa \to (\{\varnothing\} \to \kappa)$ με $g(x) : \{\varnothing\} \to \kappa : g(x)(\varnothing) = x$, όπου $x \in \kappa$.

Για το επόμενο ζητούμενο έχουμε

$$\kappa^2 = |(2 \to \kappa)| =_c (2 \to \kappa) = (|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| \to \kappa) =_c (\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \to \kappa) =_c \kappa \times \kappa,$$

όπου η τελευταία ισότητα κατά Cantor προκύπτει από τη συνάρτηση $h : \kappa \times \kappa \to (\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \to \kappa)$ με $h(x, y) : \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \to \kappa : h(x, y)(\varnothing) = x$ και $h(x, y)(\{\varnothing\}) = y$, όπου $x, y \in \kappa$.

Τέλος

$$|\mathcal{P}(\kappa)| =_c \mathcal{P}(\kappa) =_c (\kappa \to \{\varnothing, \{\varnothing\}\})$$

όπου η τελευταία ισότητα κατά Cantor προκύπτει από τη συνάρτηση χ που απεικονίζει ένα $A \subseteq \kappa$ στη χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi(A)$,

$$\chi : \mathcal{P}(\kappa) \to (\kappa \to \{\varnothing, \{\varnothing\}\}) : A \mapsto \chi(A)$$

με

$$\chi(A) : \kappa \to \{\varnothing, \{\varnothing\}\} : \chi(A)(x) = \begin{cases} \varnothing, \ x \notin A, \\ \{\varnothing\}, x \in A. \end{cases}$$

Άρα

$$|\mathcal{P}(\kappa)| =_c (\kappa \to \{\varnothing, \{\varnothing\}\}) =_c (\kappa \to |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|) =_c (\kappa \to 2) =_c |(\kappa \to 2)| = 2^\kappa.$$