Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45)**.** Δείξτε από τα αξιώματα ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

Σχόλιο: Το τελευταίο ερώτημα το έχουμε δείξει στο 2ο Φυλλάδιο - Άσκηση 6.

Στις επόμενες ασκήσεις θεωρούμε έναν ασθενή τελεστή πληθικότητας $A \mapsto |A|$.

Άσκηση 3 (Άσκηση 4.23 σελ. 48)**.** Για κάθε σύνολα A, B ισχύει

$$|A \cup B| \leq_c |A| + |B|.$$

Αν επιπλέον $A \cap B = \varnothing$ τότε

$$|A \cup B| =_c |A| + |B|.$$

Άσκηση 4 (Άσκηση 4.24 σελ. 48)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa_1 =_c \kappa_2$ και $\lambda_1 =_c \lambda_2$ έχουμε

$$\kappa_1 + \lambda_1 =_c \kappa_2 + \lambda_2, \qquad \kappa_1 \cdot \lambda_1 =_c \kappa_2 \cdot \lambda_2, \qquad \kappa_1^{\lambda_1} = \kappa_2^{\lambda_2}.$$

Άσκηση 5 (Άσκηση 4.28 σελ. 49)**.** Δείξτε ότι για κάθε σύνολα K, L, M με $L \cap M = \varnothing$ ισχύει

$$(L \cup M \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Συμπεράνετε ότι για κάθε σύνολα K, A, B ισχύει

$$(A \uplus B \to K) =_c (A \to K) \times (B \to K).$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x4.11)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$\kappa + (\lambda + \mu) =_c (\kappa + \lambda) + \mu$$
$$\kappa + \lambda =_c \lambda + \kappa$$

Για συντομία δώστε μόνο τον ορισμό των ζητούμενων συναρτήσεων χωρίς να δείξετε ότι είναι 1-1 και επί.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x4.12)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) =_c (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$$
$$\kappa \cdot \lambda =_c \lambda \cdot \kappa$$
$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) =_c \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

Για συντομία δώστε μόνο τον ορισμό των ζητούμενων συναρτήσεων χωρίς να δείξετε ότι είναι 1-1 και επί.

Άσκηση 8 (Πρόβλημα x4.15)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ ότι:

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu =_c \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$
$$\kappa^{\lambda+\mu} =_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$$
$$(\kappa^\lambda)^\mu =_c \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

Όπου χρειαστεί να ορίσετε 1-1 και επί συνάρτηση δώστε για συντομία μόνο τον ορισμό της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Στη δεύτερη ισότητα κατά Cantor εφαρμόστε την Άσκηση 5 και στην τρίτη την Άσκηση 7 του 2ου Φυλλαδίου.

Άσκηση 9 (Προβλήματα x4.10, x4.13, x4.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους πληθαρίθμους κ ότι:

$$\kappa + 0 =_c \kappa, \quad \kappa \cdot 0 =_c 0, \quad \kappa \cdot 1 =_c \kappa,$$
$$\kappa^0 =_c 1, \quad \kappa^1 =_c \kappa, \quad \kappa^2 =_c \kappa \cdot \kappa,$$
$$|\mathcal{P}(\kappa)| =_c 2^\kappa$$

όπου $0 = |\varnothing|$, $1 = |\{\varnothing\}|$ και $2 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$. Όπου χρειαστεί να ορίσετε 1-1 και επί συνάρτηση δώστε για συντομία μόνο τον ορισμό της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο μία επιλογή για τον πληθάριθμο του κενού συνόλου, η $|\varnothing| = \varnothing$. Άρα $0 = \varnothing$.