

# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις  
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών



## 4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:  
B. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1** (Ασκήσεις 3.13 και 3.16).

(i) Δείξτε ότι  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  και  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

(ii) Δείξτε ότι  $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$ .

**Άσκηση 2.** Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

**Άσκηση 3.** Δίνονται αντικείμενα  $x, y, a, b$ . Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα  $x, y, a, b$ .

**Άσκηση 4** (Πρόβλημα x3.2). Δίνονται σύνολα  $A$  και  $B$ . Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα  $X_1, X_2, X_3$  και  $X_4$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$z \in X_1 \iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}]$$

$$z \in X_2 \iff \text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset$$

$$z \in X_3 \iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}]$$

$$z \in X_4 \iff (\exists X)[X \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(X)]$$

όπου το  $z$  είναι αντικείμενο του κόσμου  $\mathcal{W}$ .

**Υπόδειξη:** Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο  $Y$  και κατάλληλη οριστική συνθήκη  $P$ .

**Άσκηση 5** (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή). Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  υπάρχει ένα σύνολο  $I$  έτσι ώστε για κάθε  $x$ ,

$$x \in I \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του  $I$  είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του  $\mathcal{E}$ . Εξηγήστε γιατί το  $I$  είναι μοναδικό.

**Σχόλιο:** Αυτό το μοναδικό σύνολο  $I$  ονομάζεται *τομή του  $\mathcal{E}$*  και συμβολίζεται με  $\bigcap \mathcal{E}$ . Στην περίπτωση όπου  $\mathcal{E} = \{A, B\}$  για κάποια σύνολα  $A, B$  συμβολίζουμε την τομή  $\bigcap \mathcal{E}$  με  $A \cap B$ .

Στην Άσκηση 6 δείχνουμε ότι για να ορίσουμε την τομή είναι ουσιώδες να θεωρήσουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{E}$  είναι μη κενό.

**Υπόδειξη:** Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του  $\mathcal{E}$  πρέπει να ανήκει και στην ένωση του  $\mathcal{E}$  που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

**Άσκηση 6.**

(i) Δείξτε ότι ο κόσμος  $\mathcal{W}$  δεν είναι σύνολο.

(ii) Υπάρχει σύνολο  $I$  με την ιδιότητα  $x \in I$  για κάθε  $x$ ;

(iii) Υπάρχει ένα σύνολο  $I$  όπως στην Άσκηση 5 όταν  $\mathcal{E} = \emptyset$ ;