Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1.

(i) Ορίστε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Αν έχουμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ορίζουμε την ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$c_n = \begin{cases} a_k, & \text{αν } n = 2k \\ b_k, & \text{αν } n = 2k+1. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ αντιστοιχεί στο ζεύγος $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ την προηγούμενη ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η f είναι 1-1 και επί.

(ii) Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο πλήθος n των παραγόντων. Για $n = 2$ έχουμε από το (i) ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$ επομένως $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι το γινόμενο n παραγόντων $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $A_1 =_c A_2$ και $B_1 =_c B_2$ τότε $A_1 \times B_1 =_c A_2 \times B_2$.

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αποτελείται από $n+1$ παράγοντες. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &=_c \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\ &=_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (\text{μέσω της } (a, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (a, x_0, x_1, x_2, \dots)) \\ &=_c \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x2.9)**.** Δείξτε ότι το σύνολο $C([0,1])$ όλων των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ καθορίζεται από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Λύση.

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ τότε $f = g$. (Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε $x \in [0,1]$ είναι το όριο μια ακολουθίας ρητών $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$, επομένως λόγω συνέχειας έχουμε $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(x)$.)

Θεωρούμε μια απαρίθμηση των ρητών αριθμών στο $[0,1]$,

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : C([0,1]) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \mapsto (f(r_n))_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

Με άλλα λόγια η π απεικονίζει τη συνεχή συνάρτηση f στην ακολουθία των τιμών της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Δείχνουμε ότι η π είναι 1-1. Έστω $\pi(f) = \pi(g)$, τότε $f(r_n) = g(r_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή η $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απαρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ έχουμε $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω έχουμε $f = g$.

Επειδή η π είναι 1-1 προκύπτει ότι $C([0,1]) \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, η τελευταία ισότητα κατά Cantor είναι γνωστή από τα προηγούμενα.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathbb{R} \leq_c C([0,1])$: σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη σταθερή συνάρτηση $c_x : [0,1] \to \mathbb{R} : y \mapsto x$ η οποία είναι φυσικά συνεχής. Είναι σαφές ότι η συνάρτηση $(x \in \mathbb{R} \mapsto c_x)$ είναι 1-1.

Με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\mathbb{R} <_c ([0,1] \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Λύση.

Από ένα θεώρημα του Cantor έχουμε $\mathbb{R} <_c \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.

Αρχικά θεωρούμε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : \mathbb{R} \rightarrowtail (0,1)$ - γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοια και μάλιστα μπορεί κανείς να την ορίσει με έναν σχετικά απλό τύπο.

Σε κάθε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη συνάρτηση $f_A : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \tau[A] \\ \\ 0, & \text{αν } x \notin \tau[A] \end{cases}$$

(Η ιδέα είναι η συνάρτηση f_A να διατηρεί όλη την πληροφορία για το σύνολο A. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την τ είναι επειδή θέλουμε η συνάρτηση f_A να ορίζεται στο $[0,1]$. Αν οι συναρτήσεις ορίζονταν σε όλο το $\mathbb{R}$ θα μπορούσαμε να πάρουμε απλά τη χαρακτηριστική συνάρτηση του A.)

Είναι σαφές ότι $f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $(A \mapsto f_A)$ είναι 1-1. Αν έχουμε $f_A = f_B$ όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τότε έχουμε για κάθε $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z \in A &\iff \tau(z) \in \tau[A] \quad \text{(χρησιμοποιούμε ότι η } \tau \text{ είναι 1-1)} \\ &\iff f_A(\tau(z)) = 1 \\ &\iff f_B(\tau(z)) = 1 \\ &\iff \tau(z) \in \tau[B] \\ &\iff z \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η απεικόνιση $(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]})$ είναι 1-1. Επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.