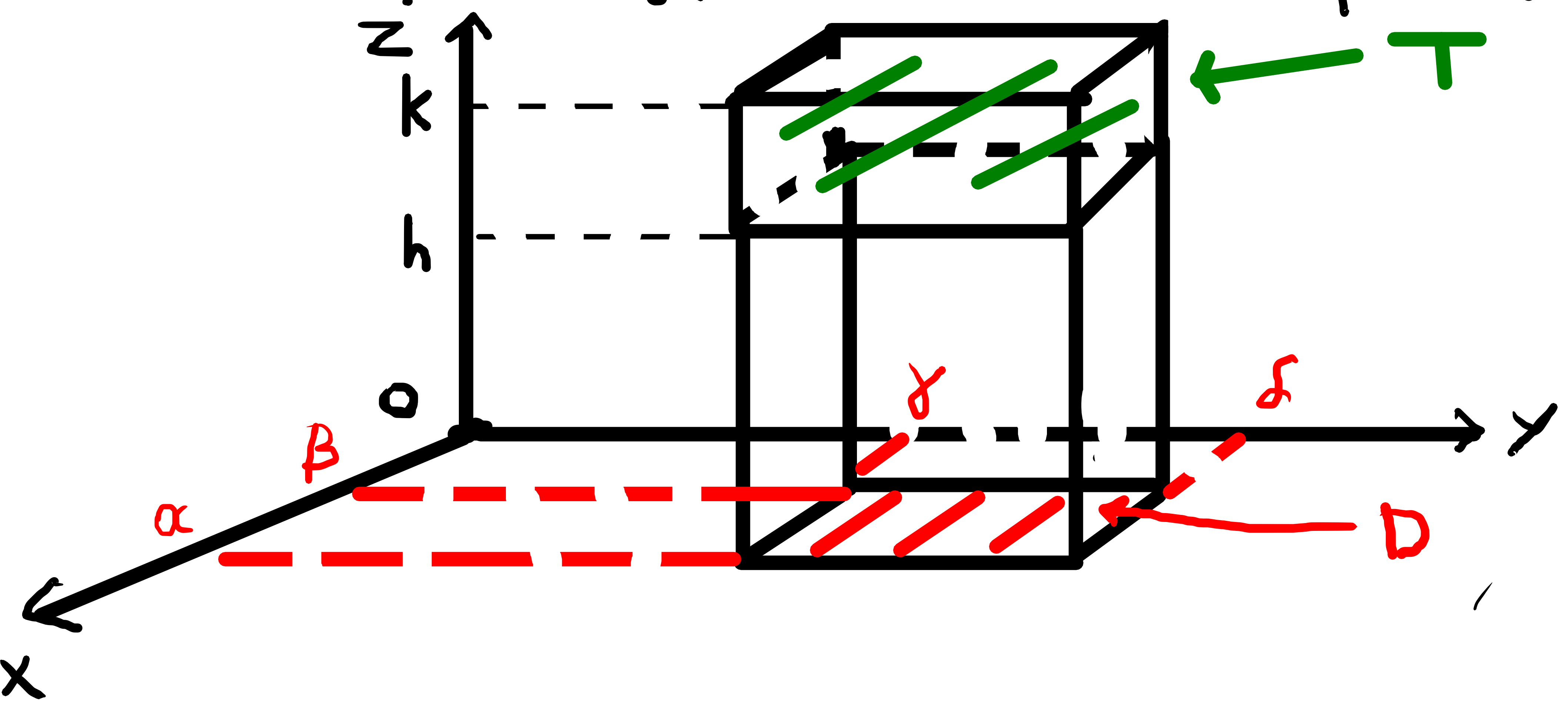
ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $T \subset \mathbb{R}^3$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες, δηλ. της μορφής $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [h, k]$, $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $h < k$.



Έστω $f(x,y,z)$ συνεχής στο T.

Τότε,
(Θ. Fubini για τριπλό ολοκλ.)

$\longrightarrow$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_h^k f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_a^b \left[\int_\gamma^\delta \left(\int_h^k f(x,y,z)\,dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_h^k \left[\int_a^b \left(\int_\gamma^\delta f(x,y,z)\,dy \right) dx \right] dz \qquad \kappa \cdot \lambda \cdot \pi.$$

Παράδειγμα: $T = [0,1] \times [1,2] \times [3,4]$.

$$J = \iiint_T (x^2 y + z)\, dx\, dy\, dz = ?$$

$$\int_0^1 (x^2 y + z)\, dx = y/3 + z, \quad \int_1^2 (y/3 + z)\, dy =$$

$$= \frac{1}{6} y^2 \Big|_1^2 + z = \frac{3}{6} + z = \frac{1}{2} + z,$$

$$\Rightarrow \quad J = \int_3^4 \left(\frac{1}{2} + z\right) dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^2 \Big|_3^4 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Ολοκλήρωση σε xy-απλά χωρία του $\mathbb{R}^3$

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο, Jordan μετρήσιμο
κι $\varphi, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

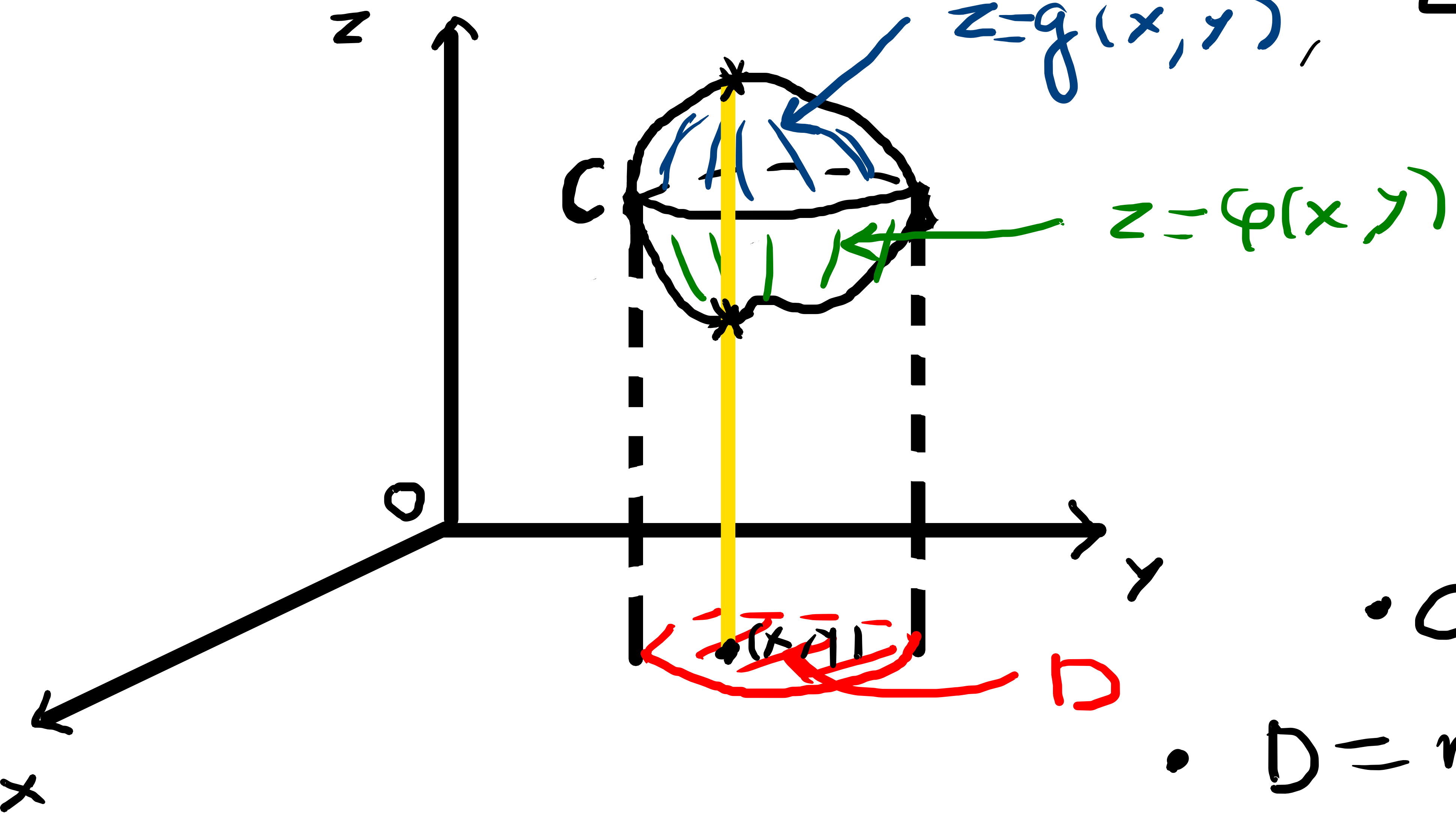
Θεωρούμε το χωρίο (στερεό) $K \subset \mathbb{R}^3$ με

$$K = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D, \ \varphi(x,y) \leq z \leq g(x,y) \}.$$

Χωρία στον $\mathbb{R}^3$ της παραπάνω μορφής λέγονται xy-απλά.

Εάν $f(x,y,z)$ συνεχής στο K, τότε

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy.$$



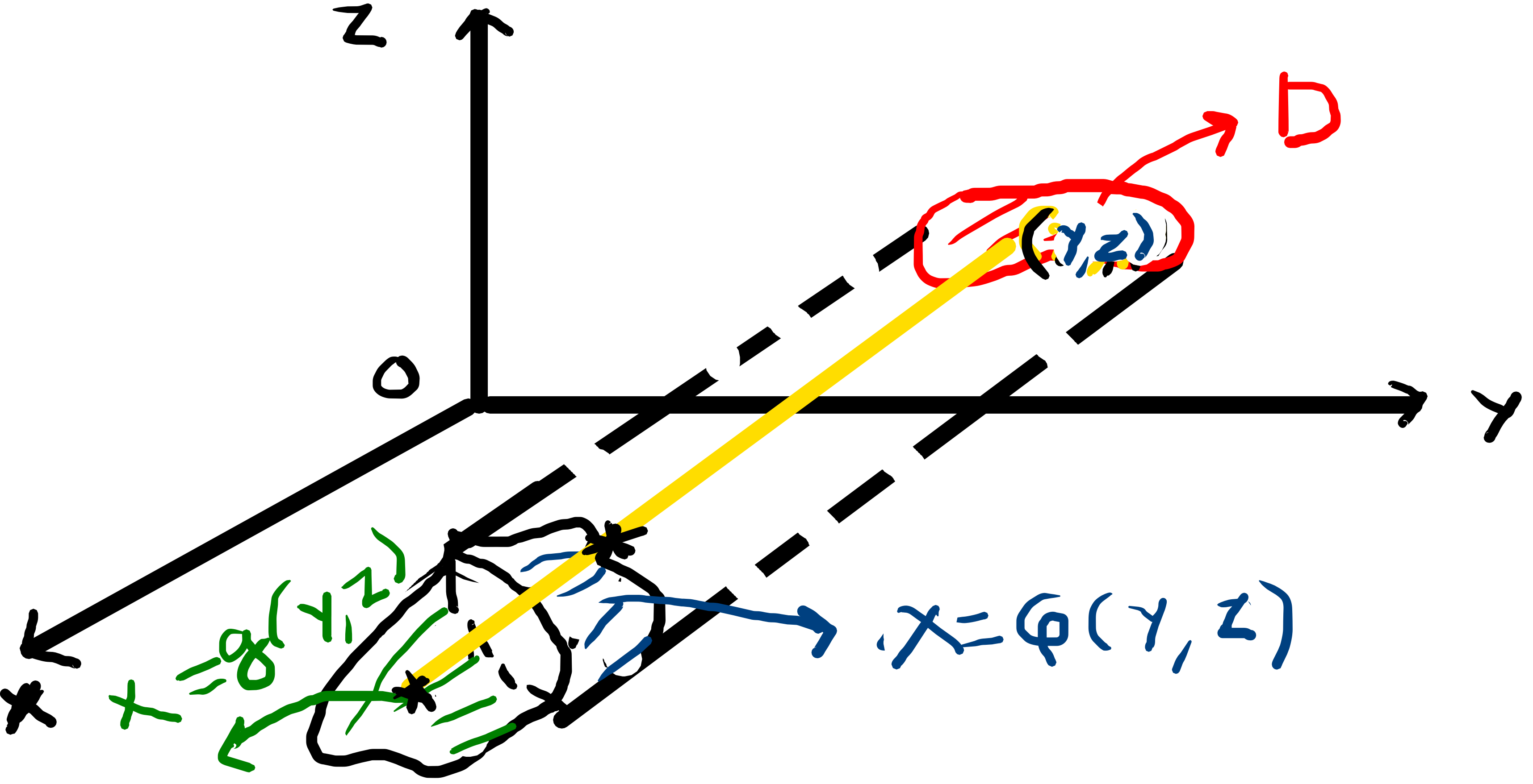
- "Συγκόλληση" των επιφανειών $z=\varphi(x,y)$, $z=g(x,y)$ κατά μήκος του $z'z$.
- C = η τομή τους
- D = η προβολή του K στο xy-επίπεδο.

Ολοκλήρωση πάνω σε yz-απλό χωρίο

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

Θεωρούμε το στερεό χωρίο

$$K = \{(x, y, z) : (y, z) \in D,\ \varphi(y,z) \leq x \leq g(y,z)\}.$$

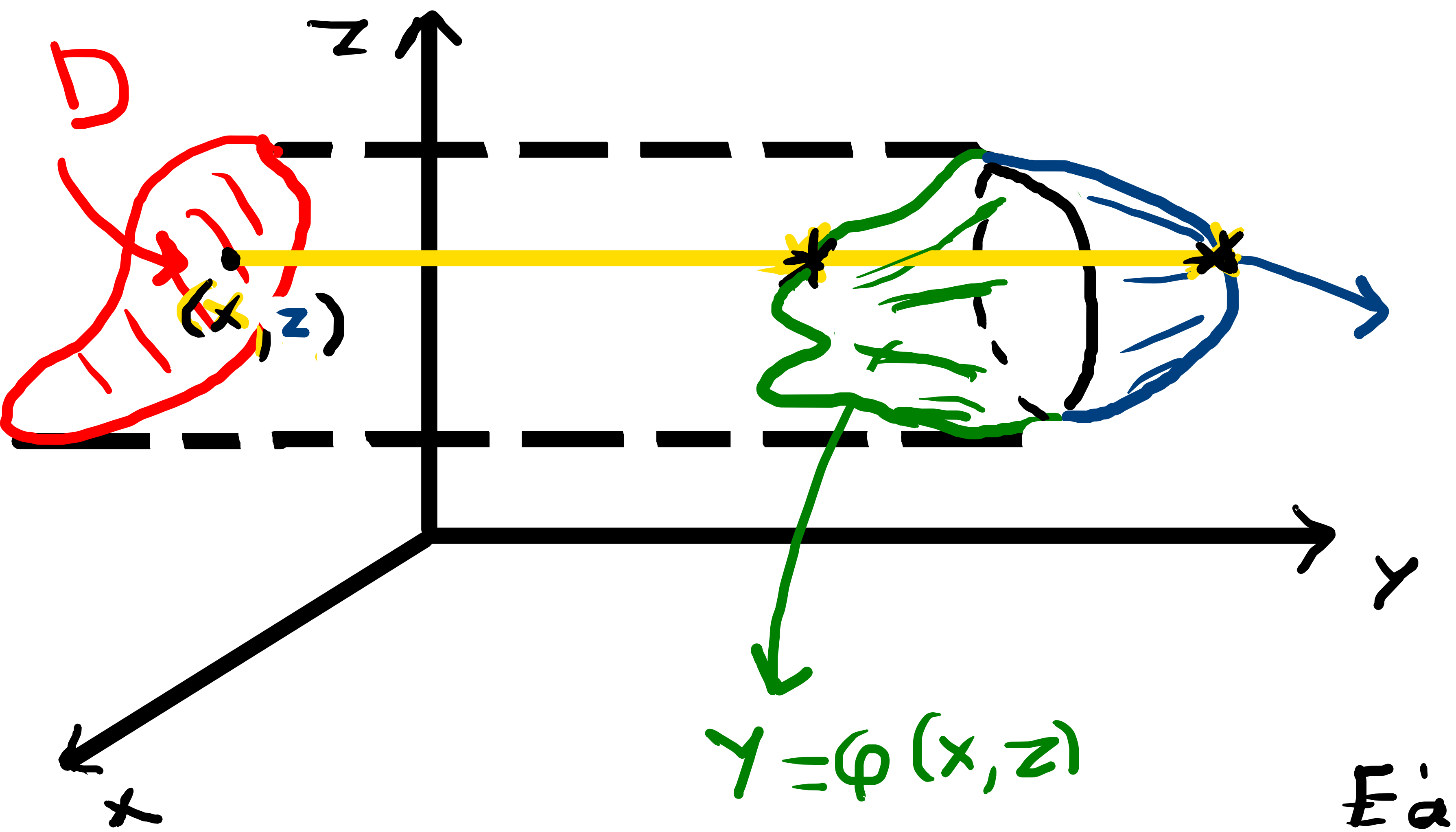


Εάν $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής,

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D \left[\int_{\varphi(y,z)}^{g(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dy\,dz$$

Ολοκλήρωση πάνω σε xz-απλό χωρίο



$D \subset \mathbb{R}^2$

$\varphi, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

$K = \{(x,y,z) : (x,z) \in D, \ \varphi(x,z) \leq y \leq g(x,z)\}$.

Εάν $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,z)}^{g(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dx\,dz.$$

Παραδείγματα:

(i) Να βρεθεί το $\iiint_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, $T=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

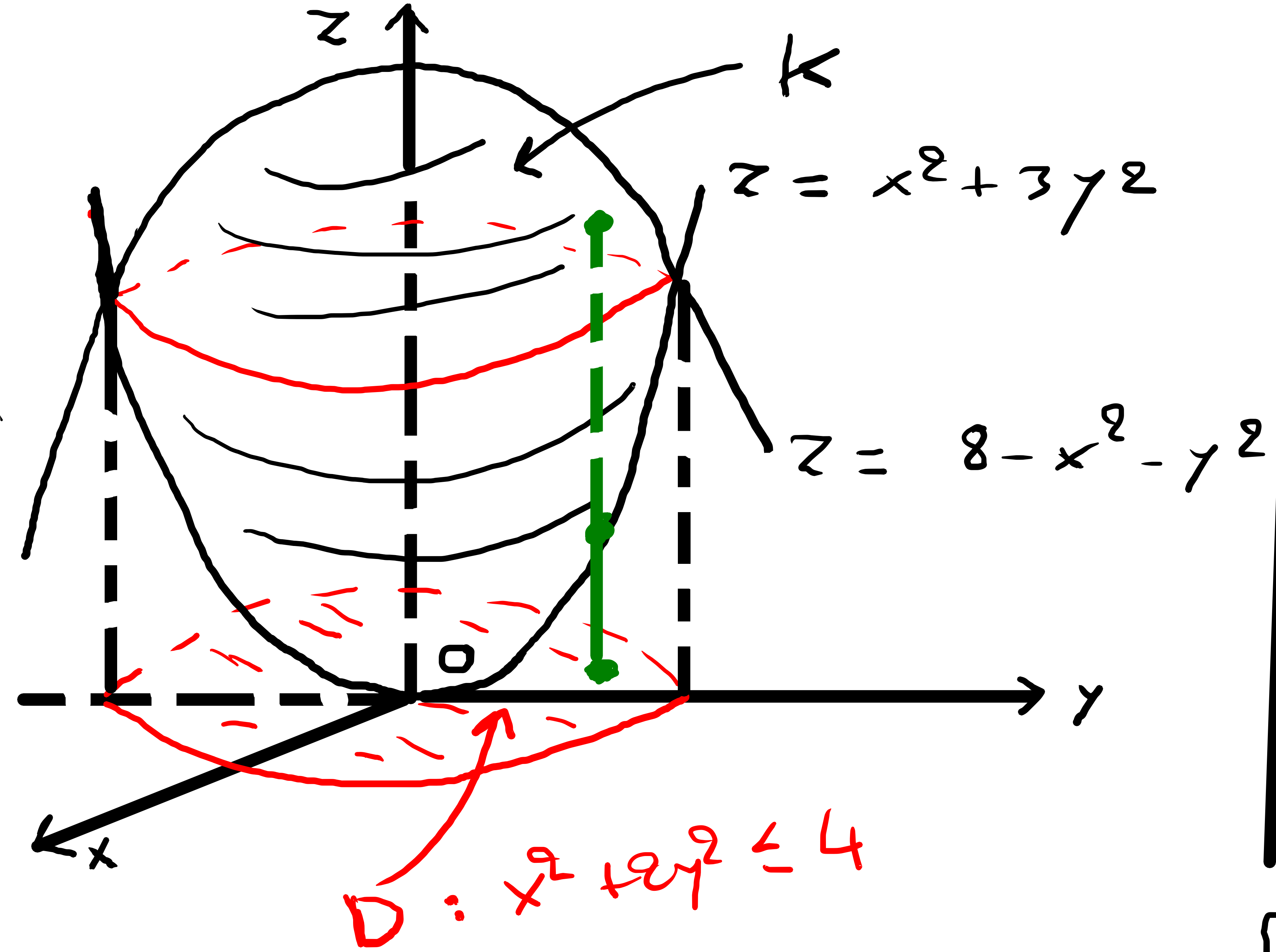
Λύση: $\int_0^1 (x+y+z)\,dx = \frac{1}{2}+y+z$, $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y+z\right)dy =$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+z = 1+z$, $\int_0^1 (1+z)\,dz = 1+1/2 = 3/2$

$\Rightarrow$ το ολοκλ. $= 3/2$.

(ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2+3y^2, \quad z = 8-x^2-y^2.$$



Τομή των επιφανειών

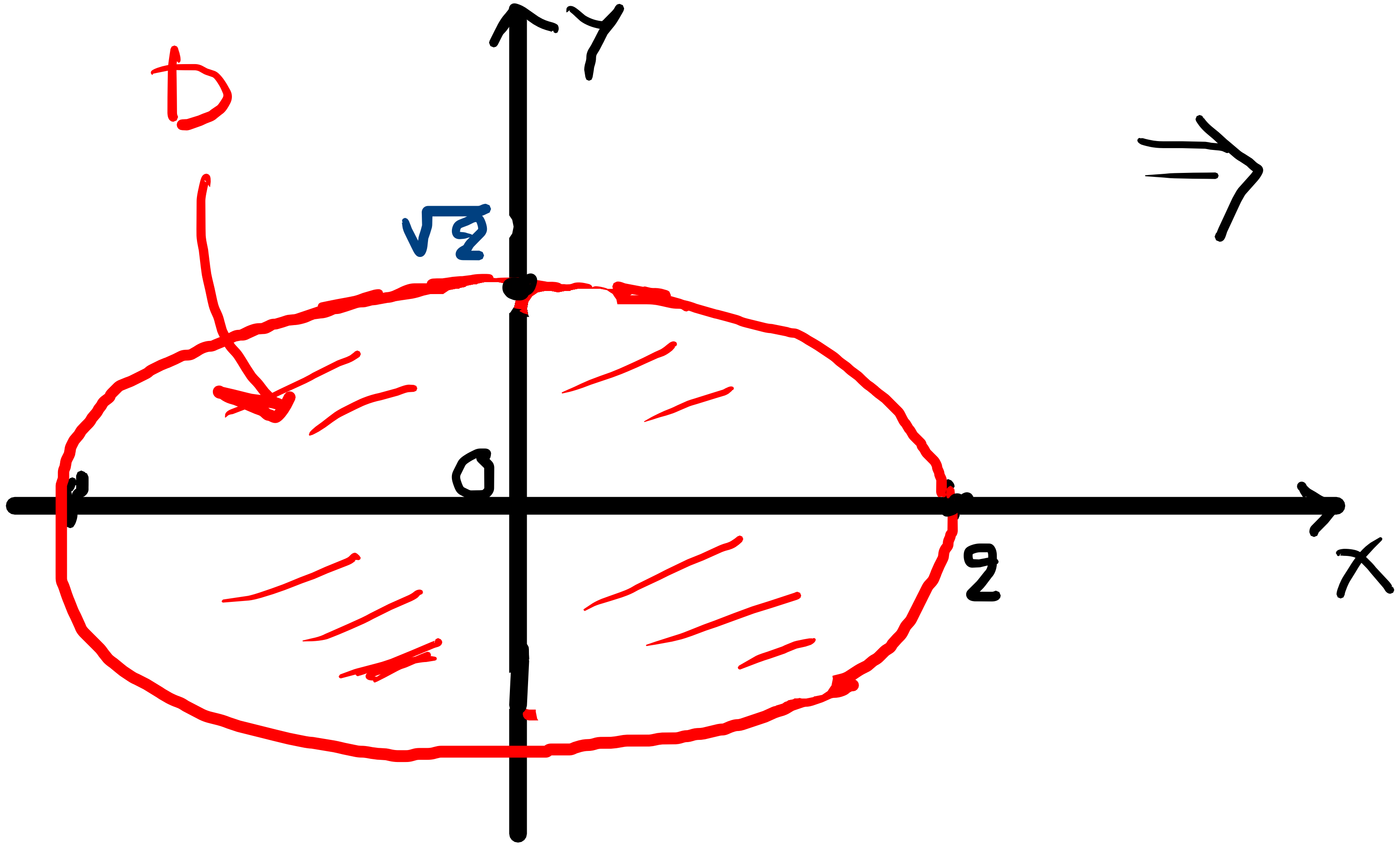
$$\left.\begin{aligned} z &= x^2+3y^2 \\ z &= 8-x^2-y^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$x^2+2y^2=4$$

Η προβολή της παραπάνω καμπύλης στο Oxy είναι η έλλειψη

$$x^2+2y^2=4$$

$$V=\iiint_K 1\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_{8-x^2-y^2}^{x^2+3y^2} dz\right)dx\,dy \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \quad V = \iint_D (8 - x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_D (4 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy.$$

$$D:\ x^2 + 2y^2 \le 4 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \le 1.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2r\cos\varphi \\ y &= \sqrt{2}\,r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y)\in D} \underline{0 \le r \le 1}, \quad \underline{0 \le \varphi \le 2\pi}$$

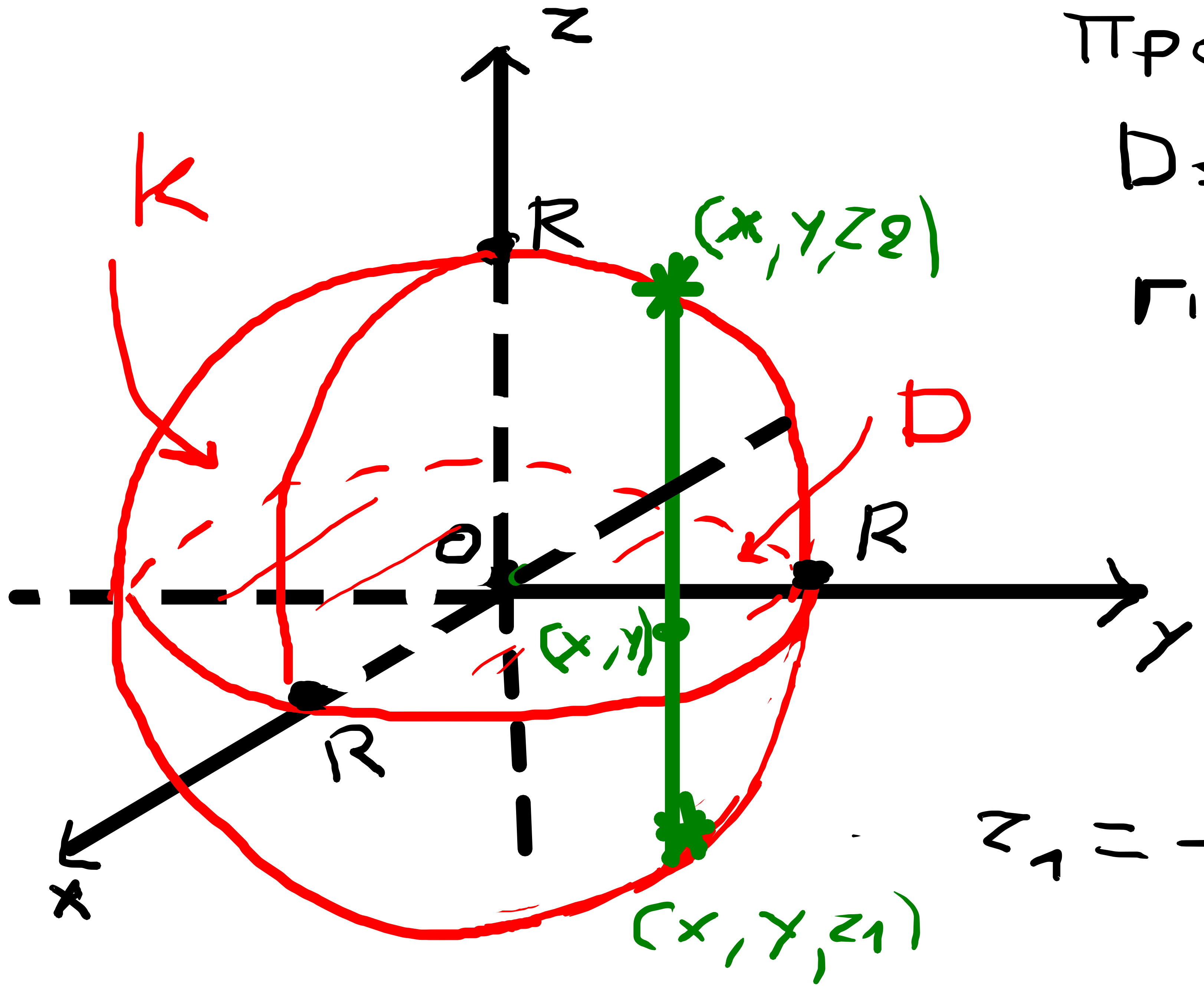
$$\underline{J = 2\sqrt{2}\,r}$$

$$\Rightarrow \quad V = 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (4-4r^2)\,2\sqrt{2}\,r\right] d\varphi$$

$$= 16\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\right] d\varphi =$$

$$= 32\pi\sqrt{2}\int_0^1 (r-r^3)\,dr = 32\pi\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{8\pi\sqrt{2}}}\,.$$

(iii) $\iiint_K z^2\,dx\,dy\,dz = ?$ $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.



Προβολή του K στο Oxy (z = 0):

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$.

Για $(x,y) \in D$ σταθερό, η κατακόρυφη από το (x,y) τέμνει τη σφαίρα στα σημεία (x,y,z_1), (x,y,z_2) με

$z_1 = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z_2 = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\Longrightarrow \iiint_K z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\iint_D \left(R^2-x^2-y^2\right)^{3/2} dx\,dy.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \overset{(x,y)\in D}{\Longrightarrow} \quad \underline{0 \le r \le R}, \ \underline{0 \le \varphi \le 2\pi} \quad \Longrightarrow$$

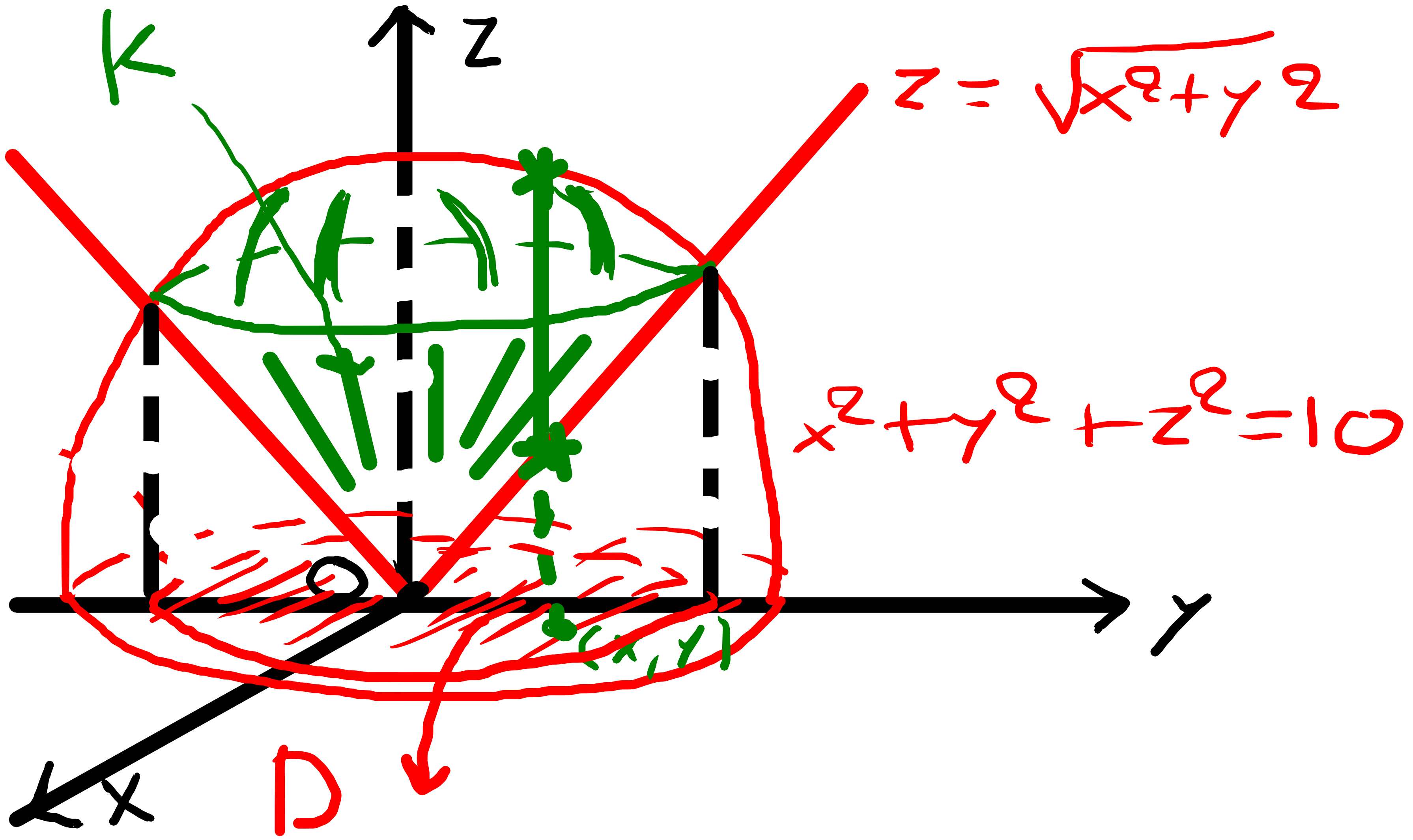
$$\Rightarrow \iiint_K z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R (R^2-r^2)^{3/2}\,r\,dr\right]d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^R (R^2-r^2)^{3/2}\,r\,dr \overset{u=R^2-r^2}{=} -\frac{2\pi}{3}\int_{R^2}^0 u^{3/2}\,du$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{R^2} u^{3/2}\,du = \frac{2\pi}{3}\,\frac{2}{5}\,u^{5/2}\Big|_0^{R^2} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{15}R^5}}.$$

(iv) Να υπολογίσετε το $\iiint_K z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$,

όπου K το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=10$ κ' από κάτω από τον κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Τομή επιφανειών

$$\left.\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=5$$

$$D: \ x^2+y^2 \le 5$$

Εάν $(x,y) \in D$ σταθεροποιημένο, η κατακόρυφη από το (x,y) τέμνει τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2+z^2 = 10$$

στα σημεία (x,y,z_1), (x,y,z_2) με

$$z_1 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad z_2 = \sqrt{10-x^2-y^2}.$$

Το ολοκλ. γράφεται

$$\iint_D \left(\int_{z_1}^{z_2} z\sqrt{x^2+y^2}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,(z_2^2 - z_1^2) =$$

$$D:\ x^2+y^2 \leq 5$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,(10 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,(5 - x^2 - y^2)\,dx\,dy \ \underset{y = r\sin\varphi}{\overset{x = r\cos\varphi}{=\!=\!=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{5}} r^2 (5 - r^2)\,dr \right] d\varphi \quad =$$

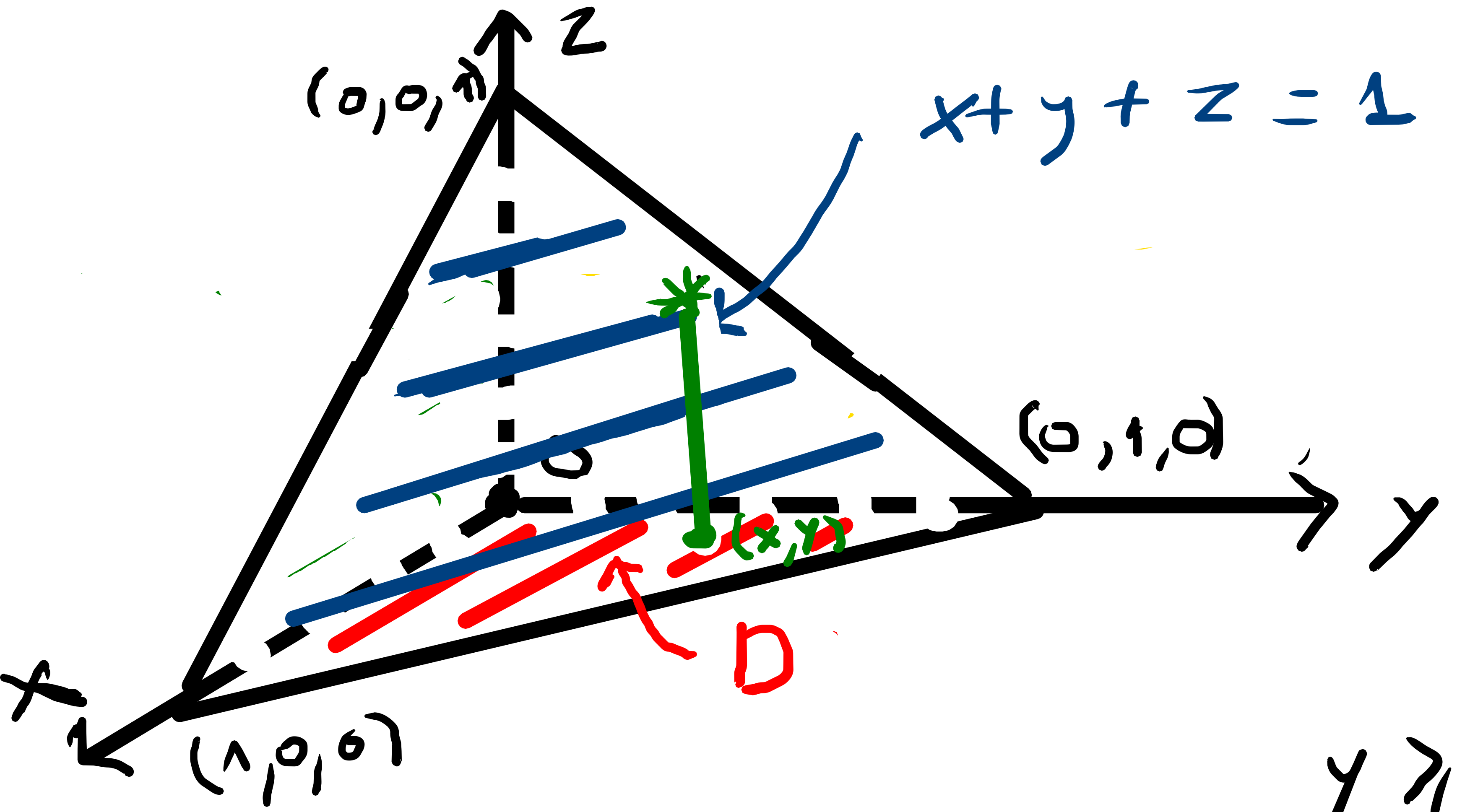
$$= 2\pi\left(5\int_0^{\sqrt{5}} r^2\,dr - \int_0^{\sqrt{5}} r^4\,dr\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{3}r^3\Big|_0^{\sqrt{5}} - \frac{r^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{3}5\sqrt{5} - \frac{25\sqrt{5}}{5}\right) = 2\pi\sqrt{5}\left(\frac{25}{3} - 5\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{5}\ \frac{10}{3} = \frac{20\pi\sqrt{5}}{3}.$$

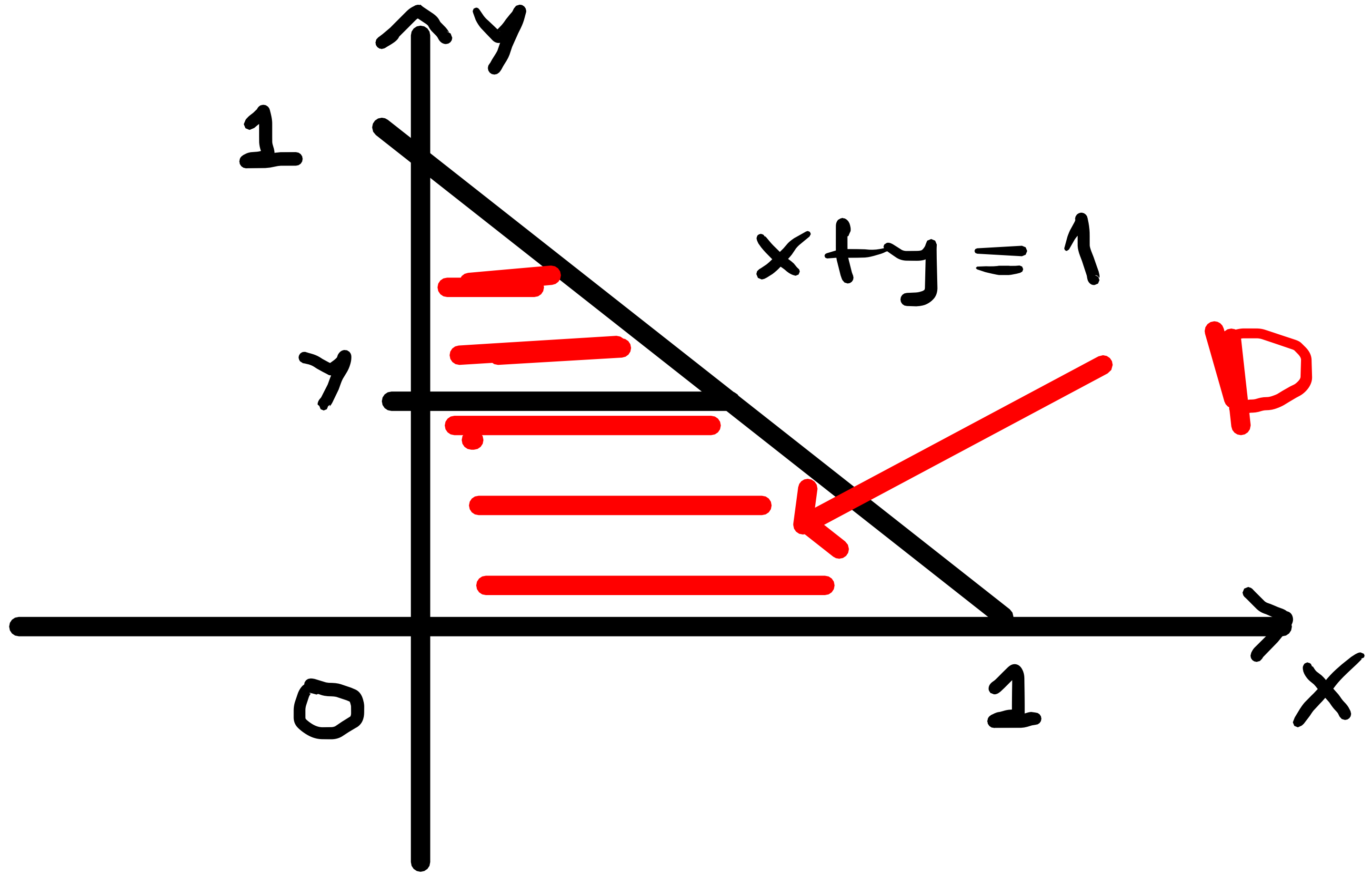
(v) $\iiint_K xy\,dx\,dy\,dz = ?$ K το στερεό τετράεδρο που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο κ' φράσσεται από τις επιφάνειες $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.



Προβολή του K στο xy-επίπεδο:

$= D = \{(x,y) \mid x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

$K = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$



$$\iiint_K xy\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xy\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D xy(1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \underbrace{\left[\int_0^{1-y} xy(1-x-y)\,dx \right]}_{I_y} dy$$

$$I_y = \int_0^{1-y} xy(1-x-y)\,dx = y\left[\int_0^{1-y} x(1-y)\,dx - \int_0^{1-y} x^2\,dx\right]$$

$$= y\left[(1-y)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{1-y} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{1-y}\right] = y\left[\frac{(1-y)^3}{2} - \frac{(1-y)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{y(1-y)^3}{6} \Longrightarrow$$ το αρχικό ολοκλ. γράφεται

:

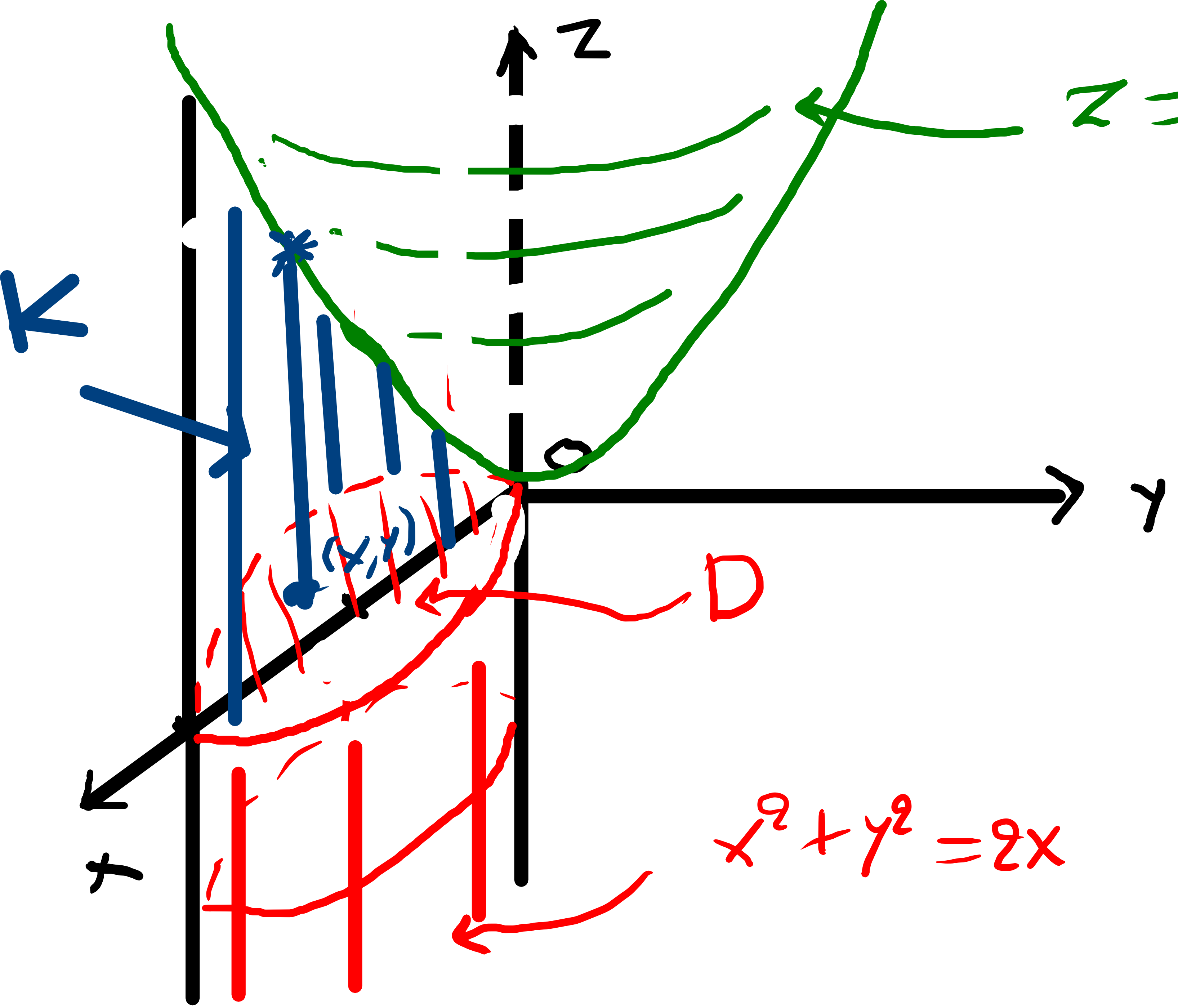
$$\frac{1}{6}\int_0^1 y(1-y)^3\,dy \overset{(u=1-y)}{=} -\frac{1}{6}\int_1^0 (1-u)\,u^3\,du = \frac{1}{6}\int_0^1 (u^3-u^4)\,du$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{120}.$$

<u>(vi)</u> Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z=x^2+y^2, \quad \underline{x^2+y^2=2x}, \quad z=0.$$

$$\hookrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$



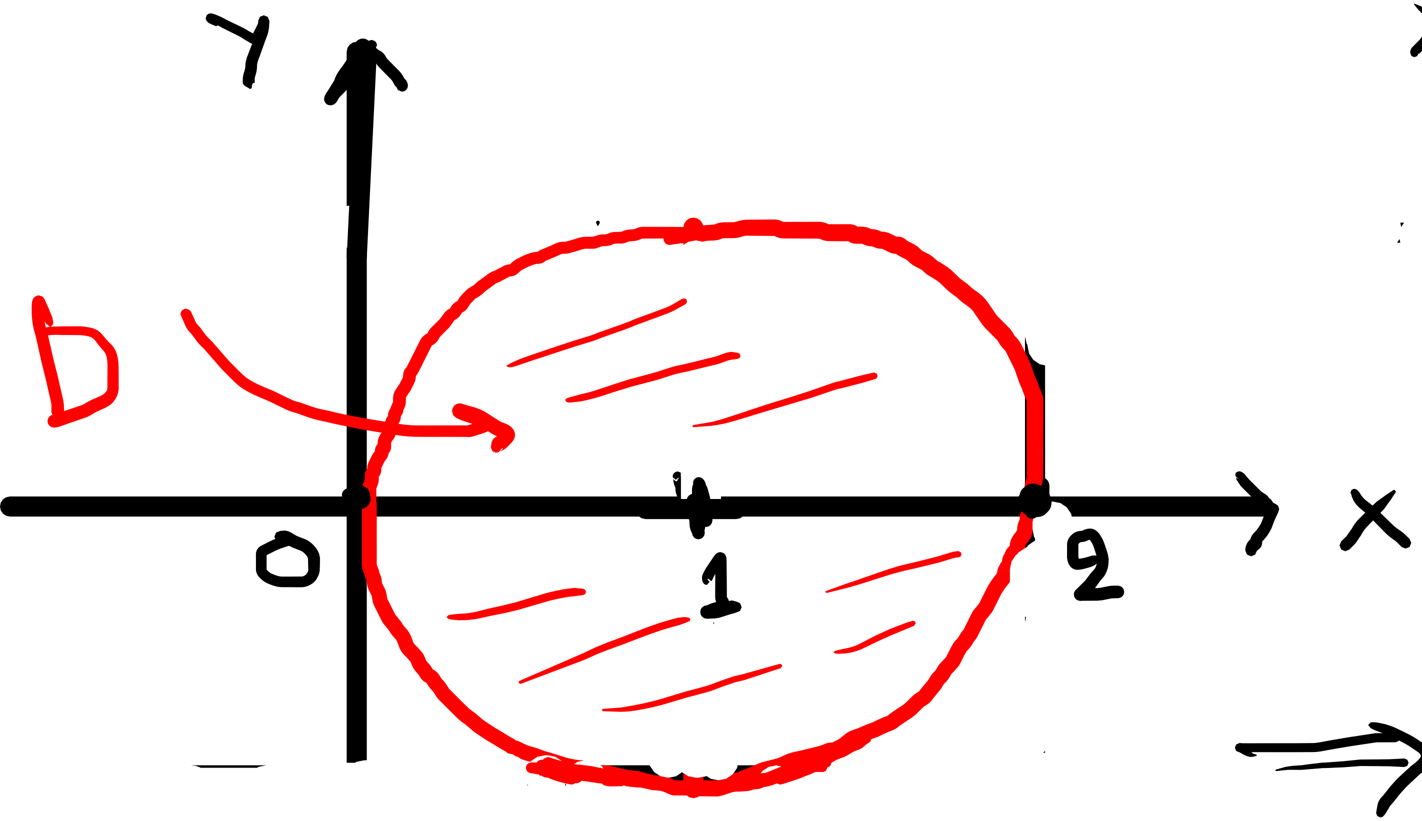
$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$V = \iiint_K dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx\,dy$$

$$=$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(x,y)\in D} r^2 \le 2r\cos\varphi$$

$$\Longrightarrow 0 \le r \le 2\cos\varphi$$

5'

$$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$$

$$\Longrightarrow V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cdot r\,dr \right) d\varphi$$

$$= \frac{16}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi \qquad = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

Αλλά

$$\cos^4\varphi = \cos^2\varphi - \cos^2\varphi \sin^2\varphi = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} - \frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)$$

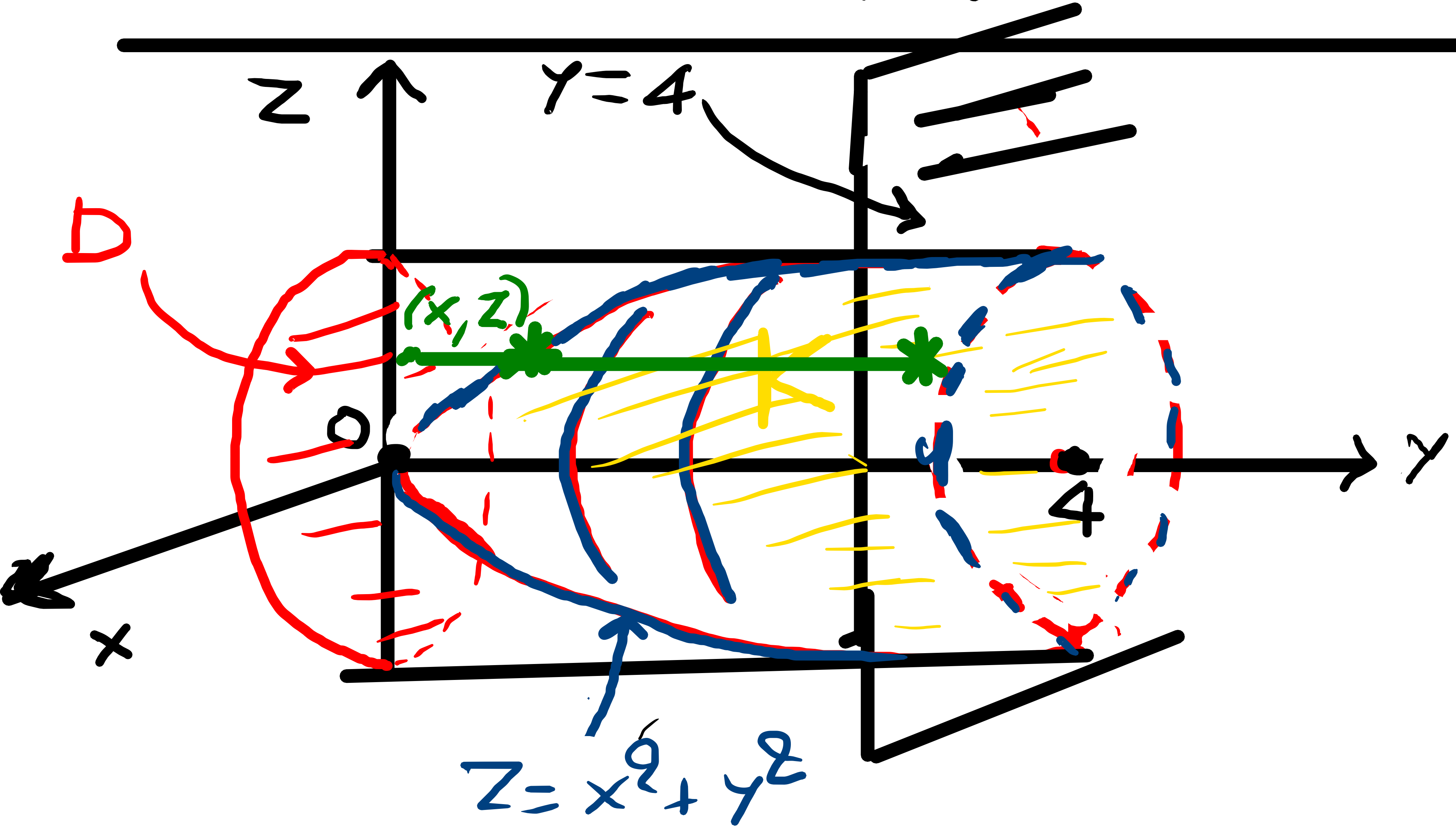
$$= \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} - \frac{1-\cos(4\varphi)}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{8}\cos(4\varphi)$$

$\Rightarrow \underline{V = 3\pi/2}$, διότι $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)\,d\varphi = 0.$

(vii) $\iiint_K \sqrt{x^2+z^2}\, dxdydz = ?$

K το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες $y = x^2 + z^2$, $y = 4$.



$D = \{(x,z) : x^2+z^2 \leq 4\}$.

Για σταθερό $(x,z) \in D$,

έχουμε

$$\underline{x^2 + z^2 \leq y \leq 4}.$$

$$\iiint_K \sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,dy \right) dx\,dz =$$

$$= \iint_D (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dz \overset{x=r\cos\varphi}{\underset{z=r\sin\varphi}{=\!=}}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (4-r^2)\, r\cdot r\, dr \right] d\varphi = 2\pi \left(\int_0^2 4r^2\,dr - \int_0^2 r^4\,dr \right)$$

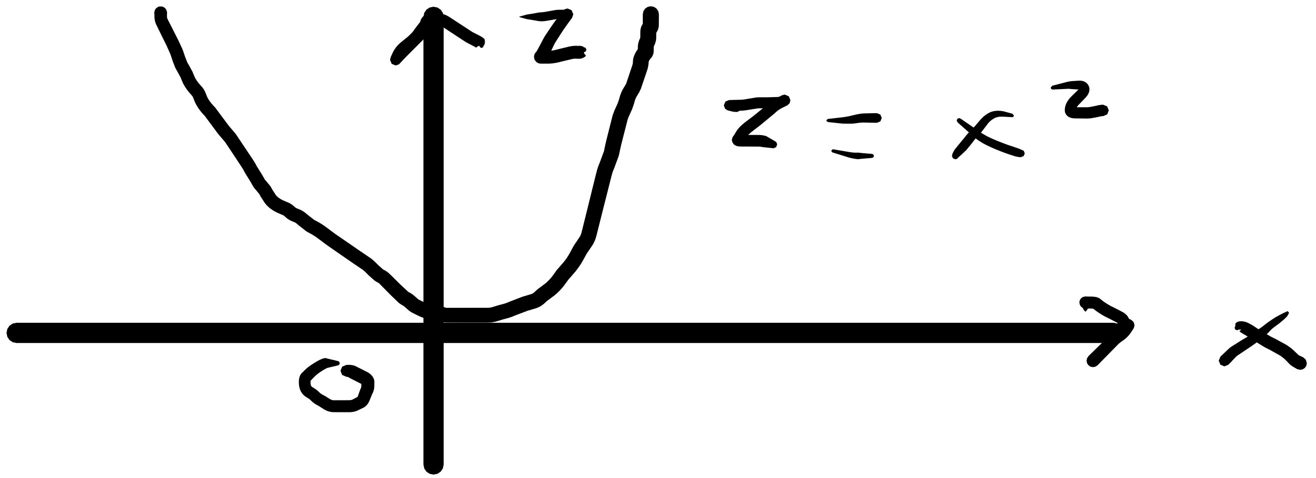
$$= 2\pi \left(4\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} \right) = 2\pi\cdot 2^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$

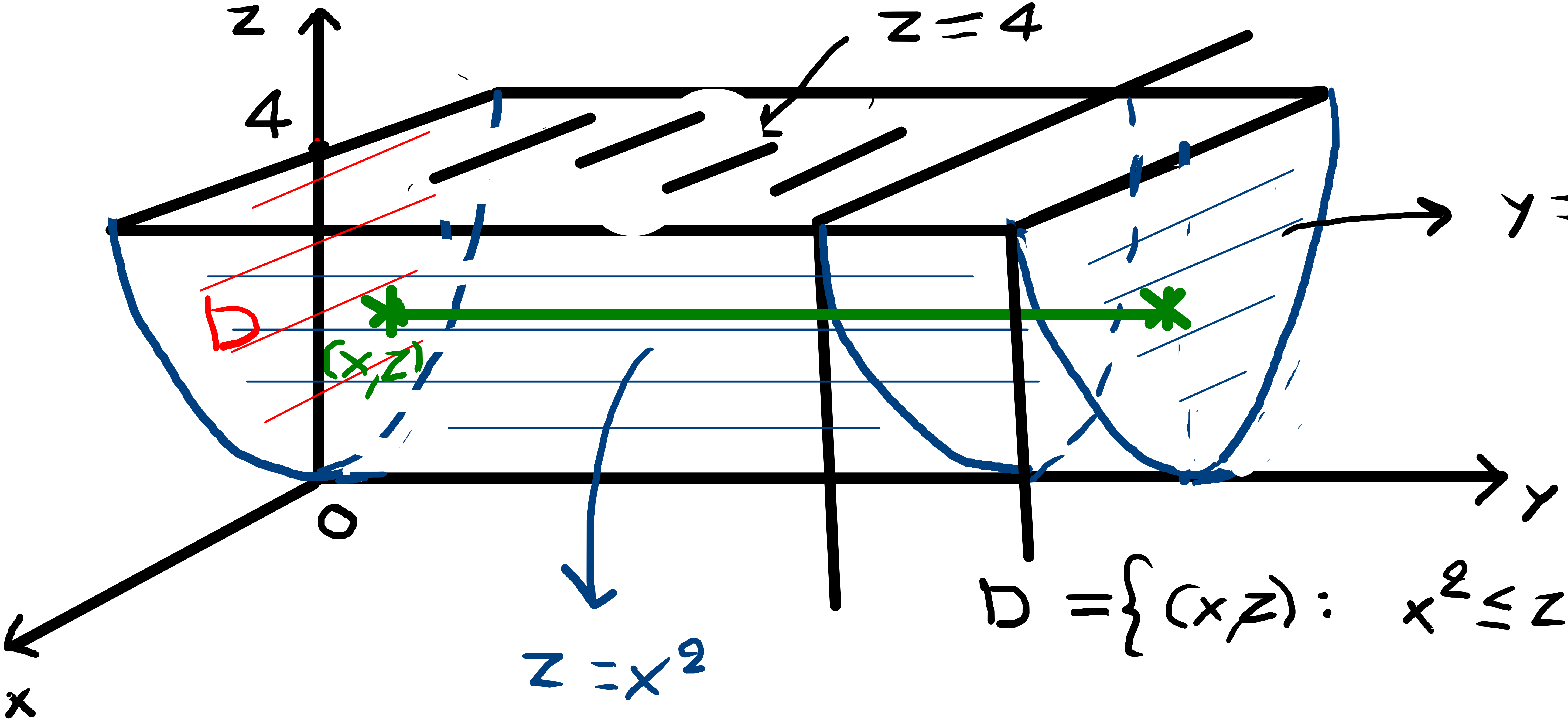
$$= 64\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{128}{15}\pi .$$

(viii) $\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = ?$

K το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

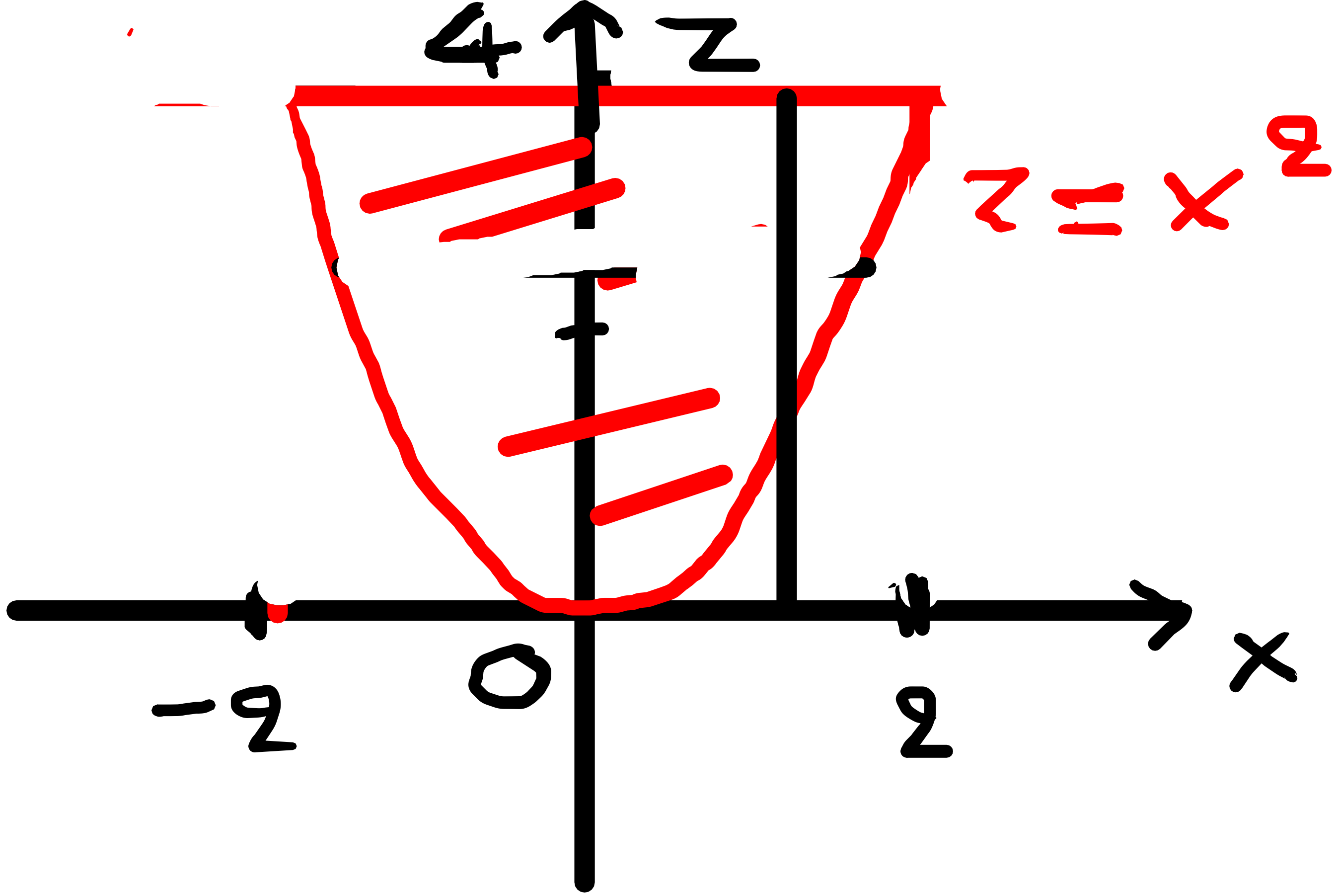
$$y=0, \quad y=8, \quad z=x^2, \quad z=4$$





$D = \{(x,z):\ x^2 \le z \le 4\}$

Για σταθερό $(x,z) \in D$, το $y \in [0,8]$.



$$\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D \left(\int_0^8 (x+y+z)\,dy \right) dx\,dz$$

$$= \iint_D \left[8(x+z) + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=8} \right] dx\,dz = \iint_D (8x + 8z + 32)\,dx\,dz$$

$$= 8 \iint_D (x+z+4)\,dx\,dz =$$

$$=8\int_{-2}^{2}\left[\int_{x^2}^{4}(x+z+4)\,dz\right]dx$$

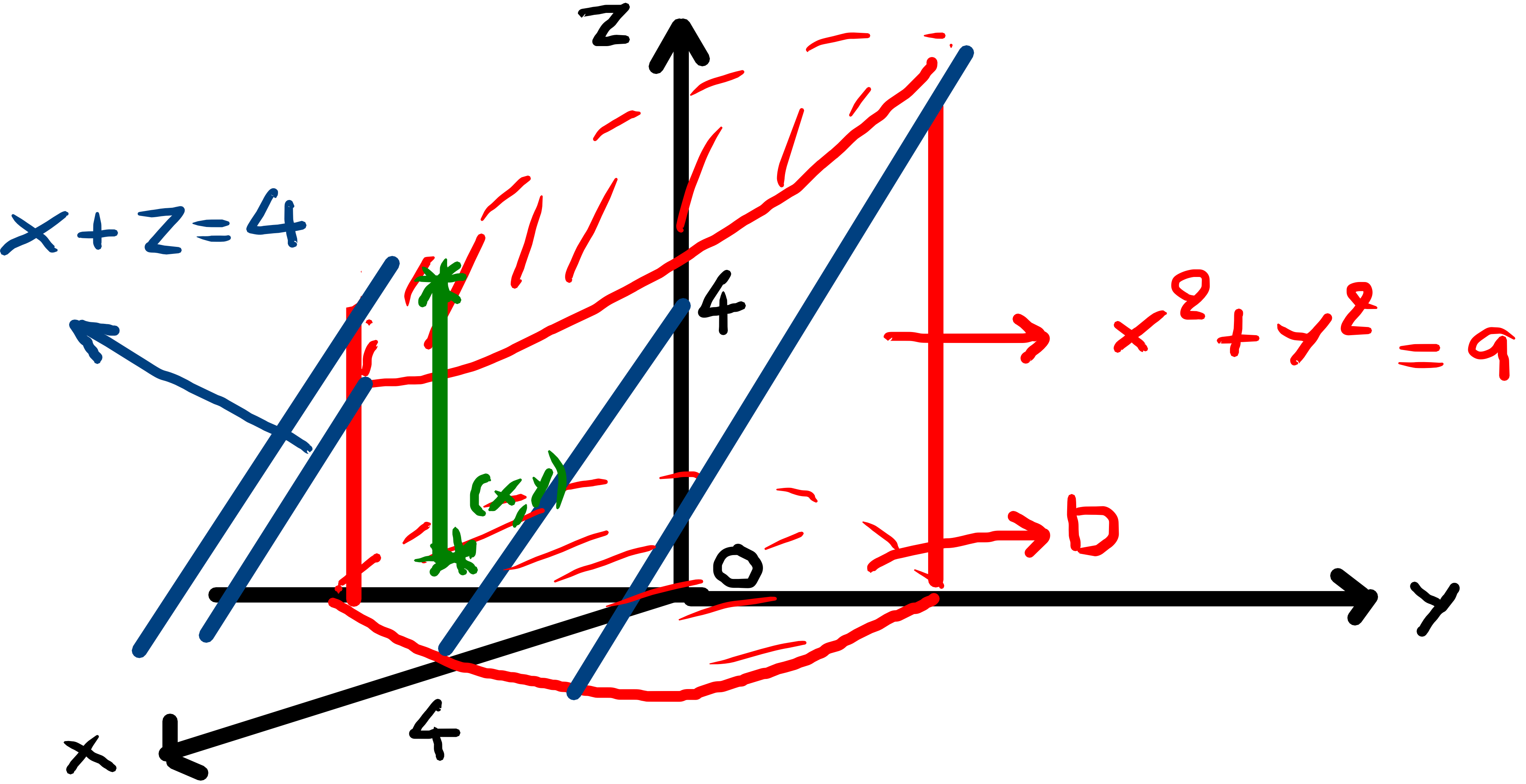
$$=8\int_{-2}^{2}\left[(4-x^2)(x+4)+\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=x^2}^{4}\right]dx$$

$$=8\left[\underbrace{\cancel{\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,x\,dx}}_{0}+4\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_{-2}^{2}\frac{16-x^4}{2}\,dx\right]$$

$$=8\left[8\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_{0}^{2}(16-x^4)\,dx\right.=\ldots$$

(ix) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$z=0$, $x+z=4$, $x^2+y^2=9$.



$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 9\}$.

Για σταθερό $(x,y)\in D$, είναι $z\in[0,\ 4-x]$.

$$V=\iint_D\left(\int_0^{4-x}dz\right)dxdy =$$

$$= \iint_D (4-x)\,dx\,dy \;\overset{x=r\cos\varphi}{\underset{y=r\sin\varphi}{=\!=\!=}}\; \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 (4-r\cos\varphi)\,r\,dr\right]d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^3 4r\,dr - \int_0^3 r^2\cos\varphi\,dr\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(2r^2\Big|_{r=0}^{r=3} - \cos\varphi\,\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=3}\right) = \int_0^{2\pi}(18-9\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \underline{\underline{36\pi}}.$$