ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ ΟΛΟΚΛ. ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤ.

Ορισμός 1: Έστω $S: \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο (π.χ. ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος) κ' $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S^* \subseteq U$. Το επιφανειακό ολοκλ. της f πάνω στην S είναι

$$\int_S f\,dS = \iint_\Delta f(S(u,v))\,\|S_u \times S_v\|\,du\,dv.$$

Πρόταση 2: Το επιφανειακό ολοκλ. μιας βαθμωτής συνάρτησης πάνω σε μια λεία επιφάνεια δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας.

Απόδειξη:

Έστω $S: \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια, $T: D \to \Delta$ 1-1, επί, κλάσης C^1 με $J_T(a,\beta) \geq 0$, $\forall (a,\beta) \in D$, όπου

D, Δ κλειστά κ' φραγμένα $\subset \mathbb{R}^2$ κ' $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής με U ανοικτό $\subset \mathbb{R}^3$, $U \supseteq S^*$.
Θέτουμε

$$\bar{S}: D \to \mathbb{R}^3, \quad \bar{S}(a,\beta) = S(T(a,\beta)),\ (a,\beta) \in D.$$

Τότε,

$$\int_{\bar{S}} f\,d\bar{S} = \iint_D f(S(T(a,\beta)))\,\|\bar{S}_a \times \bar{S}_\beta\|\,da\,d\beta.$$

Αλλά λόγω της Πρότ. 3 (ΑΡΧΕΙΟ "ΕΠΙΦΑΝ. ΟΛΟΚΛ!") έχουμε

$$\|\bar{S}_a \times \bar{S}_\beta\| = J_T(a,\beta)\,\|S_u \times S_v\|$$

οπότε

$$\int_{\bar{S}} f\, d\bar{S} = \iint_{T^{-1}(\Delta)} f(S(T(\alpha,\beta)))\, \|S_u \times S_v\|\, J_T(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

[Θεώρ. Αντικατ.] $$= \iint_{\Delta} f(S(u,v))\, \|S_u \times S_v\|\, du\, dv. \quad \boxtimes$$

Ορισμός 3: Το εμβαδό λείας επιφάνειας S είναι

$$\int_S 1\, dS = \iint_{\Delta} \|S_u \times S_v\|\, du\, dv,$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλ. υπάρχει.

Σχόλιο: Εάν η S^* είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $\varphi: \Delta \to \mathbb{R}^3$ ($\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό φραγμένο), τότε

$$S_u \times S_v = (-\varphi_u, -\varphi_v, 1), (u,v) \in \Delta$$

$\Rightarrow$ το επιφανειακό ολοκλ. μιας συνεχούς συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S^* \subset U$) ισούται με

$$\int_S f\, dS = \iint_{\Delta} f(u,v,\varphi(u,v)) \sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}\, du\, dv.$$

Ειδικότερα, το εμβαδόν της S ισούται με

$$\iint_{\Delta} \sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}\, du\, dv.$$

Παραδείγματα:

(i) Να υπολογισθεί το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $(R>0)$.

Λύση: Μια παραμέτρηση της σφαίρας είναι

$$S:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\quad S(\theta,\varphi)=R(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$$

κ/

$$S_\theta\times S_\varphi=\dots=R\sin\theta\, S(\theta,\varphi)$$

$\Rightarrow \|S_\theta\times S_\varphi\|=R^2\sin\theta \Rightarrow$ το εμβαδό ισούται με

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=2\pi R^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}=\underline{\underline{4\pi R^2}}.$$

(ii) Να υπολογισθεί το $\int_S \frac{x^2}{\sqrt{1+4z}}\,dS$, όπου

$$S^*:\quad z=x^2+y^2,\qquad z\le 1+2x+2y.$$

Λύση:

$$S:\Delta\to\mathbb{R}^3,\qquad S(u,v)=(u,v,\underbrace{u^2+v^2}_{\varphi(u,v)}),$$

$$\Delta=\{(u,v):\ u^2+v^2\le 1+2u+2v\}$$

$$=\{(u,v):\ (u-1)^2+(v-1)^2\le 3\},$$

$$S_u\times S_v=(-2u,-2v,1),\quad \|S_u\times S_v\|=\sqrt{4u^2+4v^2+1}.$$

Το ολοκλ. γράφεται

$$\iint_\Delta \frac{u^2}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}}\sqrt{4u^2+4v^2+1}\,du\,dv = \iint_\Delta u^2\,du\,dv.$$

Θέτουμε $u = 1+\sqrt{3}\,r\cos\varphi$, $v = 1+\sqrt{3}\,r\sin\varphi$,
$0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
κ' παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+\sqrt{3}\,r\cos\varphi)^2\, 3\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1+3r^2\cos^2\varphi+2\sqrt{3}\,r\cos\varphi\right) r\,dr\,d\varphi$$

$$= 3\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r+3r^3\cos^2\varphi+2\sqrt{3}\,r^2\cos\varphi\right) dr\,d\varphi$$

$$= 3\left(2\pi\int_0^1 r\,dr + 3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r^3\,dr + 2\sqrt{3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{0}\cdot\int_0^1 r^2\,dr\right)$$

$$= 3\left(\pi + 3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi\cdot\frac{1}{4}\right).$$

$$= 3\left(\pi+\frac{3}{8}2\pi\right) = 3\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{21\pi}{4}.$$

(iii) Να υπολογίσετε το $\iint_S z \, dS$, όπου

$S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*$,

$S_1^* : \; x^2+y^2=1, \; 0 \le z \le 1+x,$

$S_2^* : \; x^2+y^2 \le 1, \quad z=1+x,$

$S_3^* : \; x^2+y^2 \le 1, \quad z=0.$

Λύση: Το ολοκλ. ισούται με

$$\int_{S_1} z \, dS_1 + \int_{S_2} z \, dS_2 + \underbrace{\int_{S_3} z \, dS_3}_{0}.$$

- $S_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^3, \; S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z),$

$\Delta_1 = \{(\varphi, z) : 0 \le z \le 1+\cos\varphi \}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$,

$$\frac{\partial S_1}{\partial z} \times \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \cdots = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} z \, dS_1 = \iint_{\Delta_1} z \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos\varphi} z \, dz \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi) d\varphi$$

$$= \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1+\cos(2\varphi)] \, d\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

- $S_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}^3$, $S_2(u,v) = (u, v, \underbrace{1+u}_{\varphi(u,v)})$,

$\Delta_2 = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$,

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-\varphi_u, -\varphi_v, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \int_{S_2} z \, dS_2 = \iint_{\Delta_2} (1+u)\sqrt{2} \, du dv \quad \left[\begin{array}{l} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{array}\right]$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r\cos\varphi) r \, dr d\varphi$$

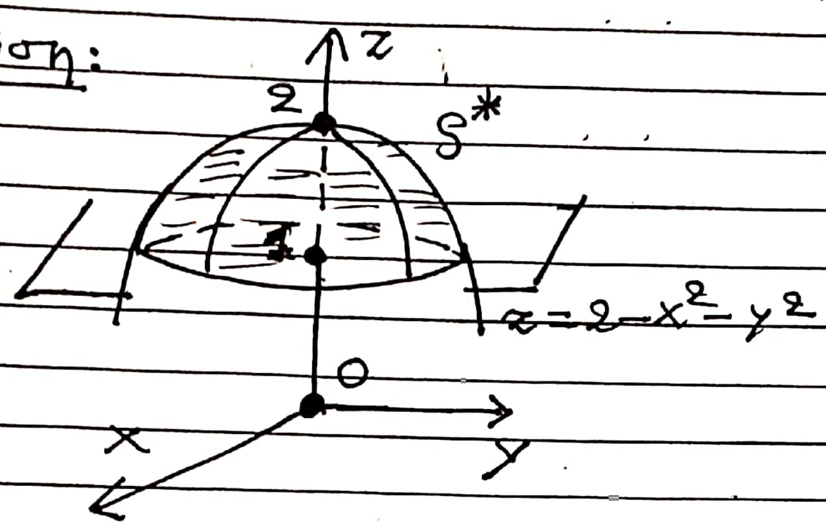
$$= \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\varphi \, dr d\varphi \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{0} \cdot \int_0^1 r^2 dr \right) = \pi\sqrt{2}.$$

Άρα, το ολοκλ. ισούται με $\underline{\underline{\frac{3\pi}{2} + \pi\sqrt{2}}}$.

(iv) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S που αποκόπτει το επίπεδο $z=1$ από το παραβολοειδές $z = 2 - x^2 - y^2$.

Λύση:



Τομή των $z=2-x^2-y^2$, $z=1$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

$$S^*: \; z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 1$$

$$S: \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S(u,v) = (u, v, 2-u^2-v^2)$$

$$\Delta = \{(u,v) : 2-u^2-v^2 \geq 1\} = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$$

$$\text{Εμβαδό}(S) = \iint_\Delta \| S_u \times S_v \| \, du\, dv$$

$$= \iint_\Delta \| (2u, 2v, 1) \| \, du\, dv$$

$$= \iint_\Delta \sqrt{1+4(u^2+v^2)} \, du\, dv \;\underset{v=r\sin\varphi}{\overset{u=r\cos\varphi}{=\!=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr \;\overset{t=1+4r^2}{=\!=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

(V) Να υπολογισεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S x^2\sqrt{2+2z}\,dS,$$

όπου S^*: $x^2+y^2=2z+1$, $x^2+y^2\leq 4$.

Λύση: $S:\Delta\to\mathbb{R}^3$, $S(u,v)=\left(u,v,\frac{u^2+v^2-1}{2}\right)$,

$\Delta=\{(u,v): u^2+v^2\leq 4\}$, $S_u\times S_v=(-u,-v,1)$,

$\|S_u\times S_v\|=\sqrt{u^2+v^2+1}$

$\Rightarrow$ το ολοκλ. γράφεται $\iint_\Delta u^2\sqrt{2+u^2+v^2-1}\sqrt{u^2+v^2+1}\,du\,dv$

$$= \iint_\Delta u^2(u^2+v^2+1)\,du\,dv \xrightarrow[v=r\sin\varphi]{u=r\cos\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2\varphi\,(r^2+1)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^2 (r^5+r^3)\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos(2\varphi)]\,d\varphi\cdot\left[r^6/6+r^4/4\right]_0^2 = \dots \frac{44\pi}{3}.$$