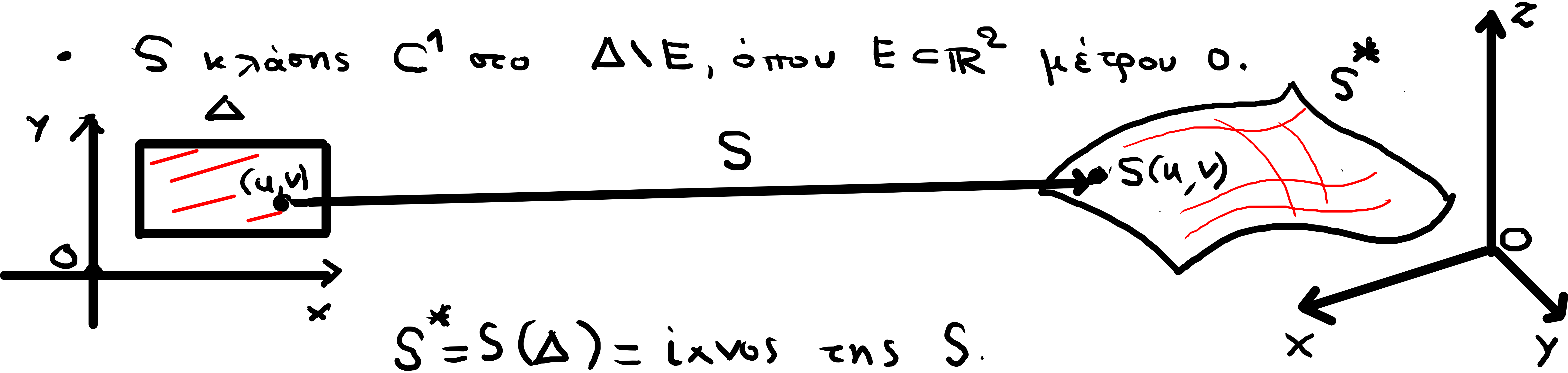
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Ορισμός 1: **Επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$** είναι μια απεικόνιση

$$S : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad \Delta \ni (u,v) \mapsto S(u,v) \in \mathbb{R}^3,$$

όπου $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος, ώστε

- S συνεχής
- S κλάσης C^1 στο $\Delta \setminus E$, όπου $E \subset \mathbb{R}^2$ μέτρου 0.



$S^* = S(\Delta) =$ <u>ίχνος της S</u>.

$$S(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big), \quad (u,v)\in\Delta,$$

$x(\cdot,\cdot),\, y(\cdot,\cdot),\, z(\cdot,\cdot) : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχείς, C^1 στο $\Delta\setminus E$.

Η S λέγεται **λεία** αν $\underline{\dfrac{\partial S}{\partial u}\times\dfrac{\partial S}{\partial v} \neq \vec{0}, \ \forall (u,v)\in\Delta\setminus E}$.

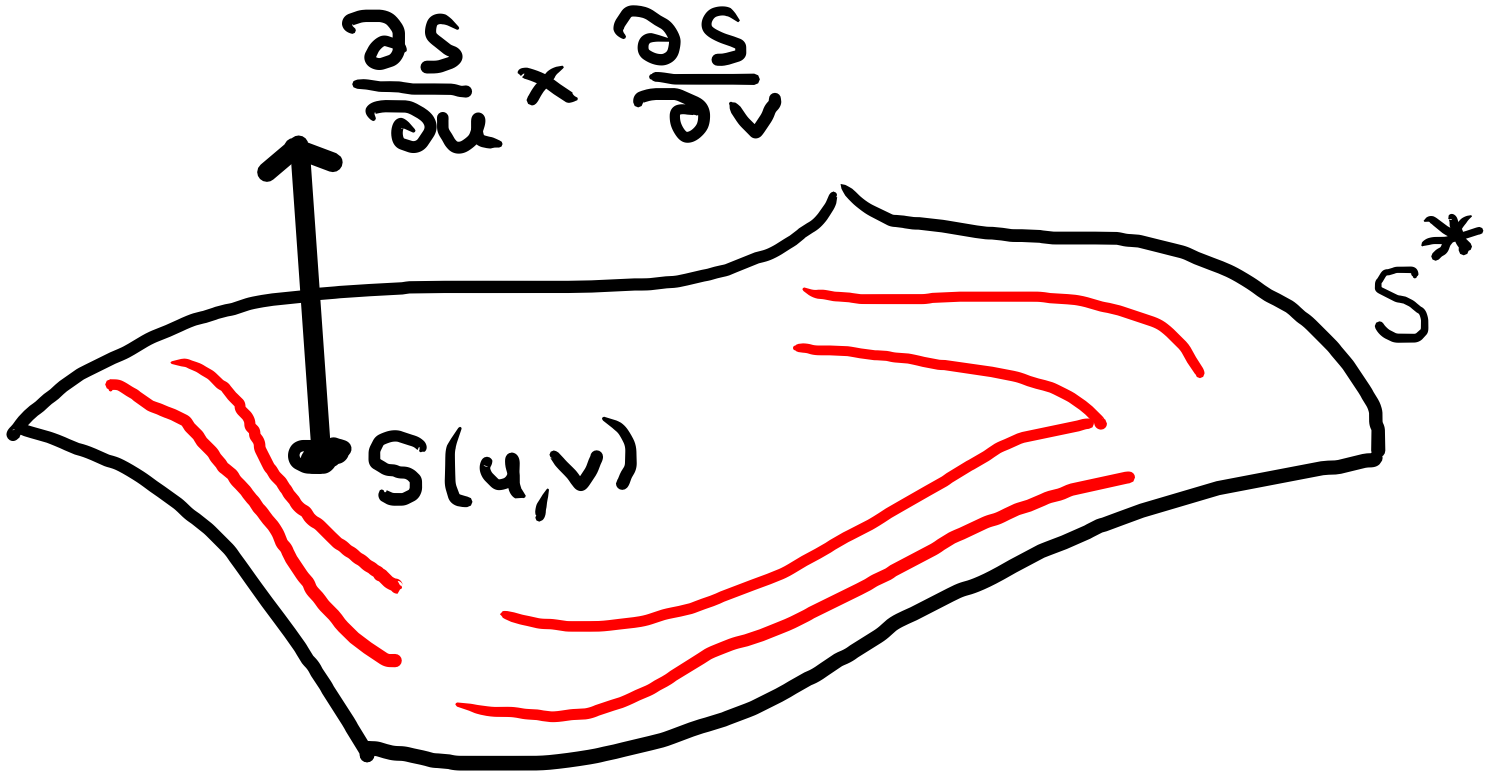
Εάν $\underline{\Phi(x,y,z)=0}$ η καρτεσιανή εξίσωση του S^*, τότε

$$\Phi\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)=0, \quad \forall (u,v)\in\Delta$$

$$\xRightarrow[\text{ως προς } u,v\,\in\,\Delta\setminus E]{\text{παραγωγ.}} \quad \begin{cases} \Phi_x x_u + \Phi_y y_u + \Phi_z z_u = 0 \\ \Phi_x x_v + \Phi_y y_v + \Phi_z z_v = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla\Phi\cdot\frac{\partial S}{\partial u} = \nabla\Phi\cdot\frac{\partial S}{\partial v} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial S}{\partial u}\times\frac{\partial S}{\partial v} \,/\!/\, \nabla\Phi$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial S}{\partial u} \times \dfrac{\partial S}{\partial v}$ κάθετο στην S^* σε κάθε σημείο $S(u,v)$, με $(u,v) \in \Delta \setminus E$.



Συμβολ.

$$\frac{\partial S}{\partial u} = S_u, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = S_v$$

Παραδείγματα:

(i) $S : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad \Delta = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$.

$$S(\theta,\varphi) = R(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),\quad (\theta,\varphi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$$

$(R > 0)$.

$$S_\theta = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta),$$

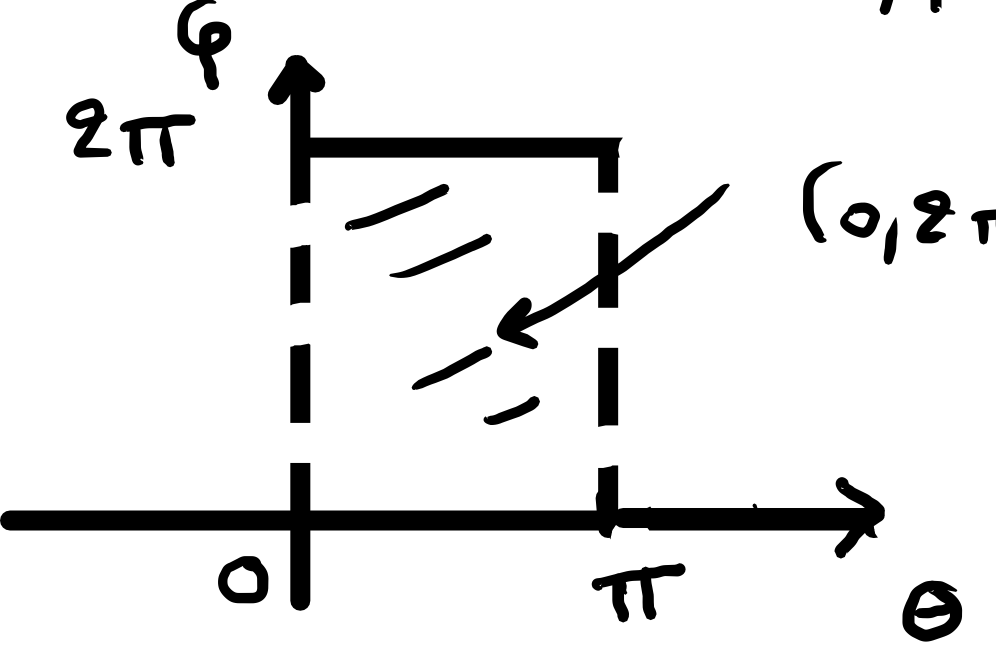
$$S_\varphi = R(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0) = R\sin\theta(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$S_\theta \times S_\varphi = R^2\sin\theta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = R\sin\theta\, S(\theta,\varphi).$$

Είναι $\|S(\theta,\varphi)\| = R > 0$, $\|S_\theta \times S_\varphi\| = R^2 \sin\theta > 0$,

$\forall (\theta,\varphi) \in (0,\pi) \times [0,2\pi]$



$(0,2\pi) \times [0,2\pi] = \Delta \setminus E$

Το $E = \{(0,\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \cup$

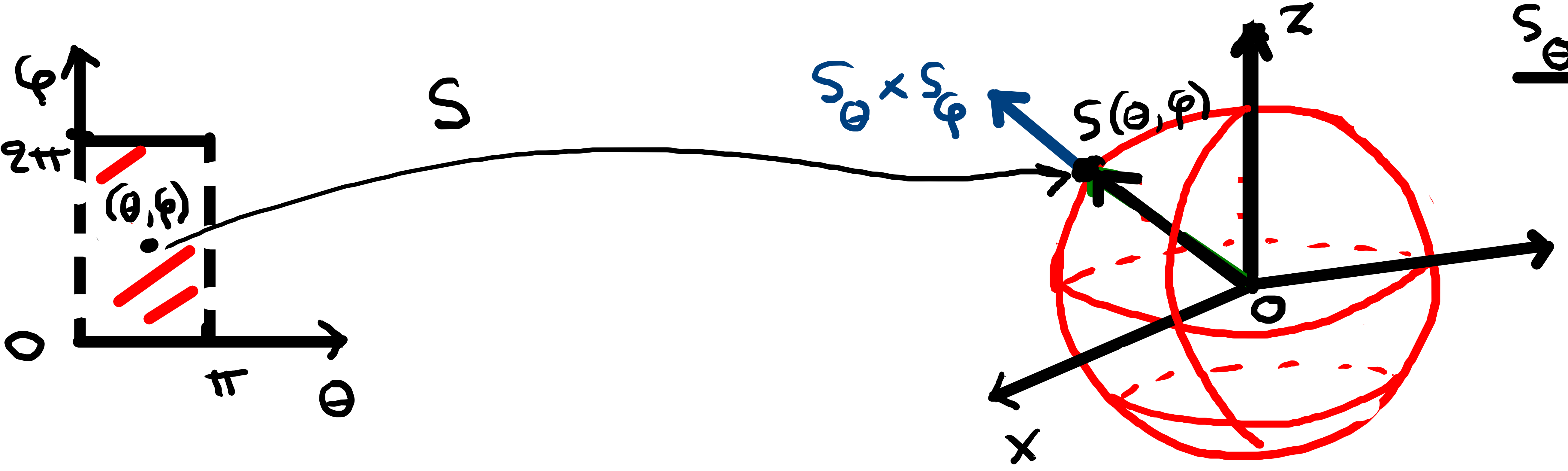
$\cup \{(\pi,\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

έχει μέτρο (εμβαδό) $= 0$

$\Rightarrow$ S λεία.

$S^* = S(\Delta) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$=$ σφαίρα κέντρου O κ' ακτίνας R.



$$\underline{S_\theta \times S_\varphi \perp S^*}$$

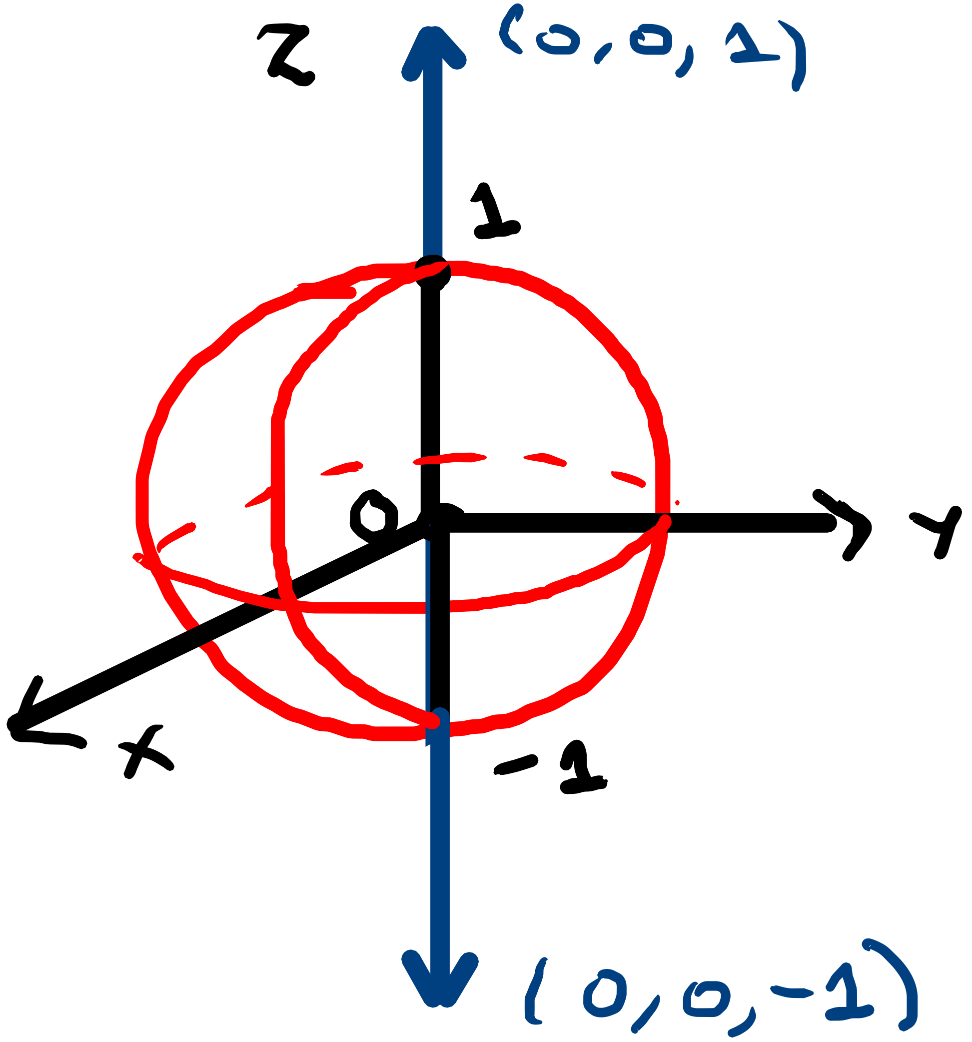
στο (θ,φ), $0<\theta<\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$

$\forall (\theta,\varphi) \in (0,\pi)\times[0,2\pi]$, $\quad S_\theta \times S_\varphi = R^2 \sin\theta \, S(\theta,\varphi)$

$\Rightarrow$ $S_\theta \times S_\varphi$ <u>ομόρροπο</u> του διανύσματος θέσης $S(\theta,\varphi)$

$\Rightarrow$ το $S_\theta \times S_\varphi$ <u>"δείχνει" προς το "εξωτερικό" της σφαίρας</u>.

Στα σημεία $S(0,\varphi)=(0,0,1)$, $S(\pi,\varphi)=(0,0,-1)$ ("βόρειος πόλος" - "νότιος πόλος" αντίστοιχα), τα διανύσματα $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ είναι κάθετα στη σφαίρα.



(ii) Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος κ' $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f|_{\mathring{\Delta}}$ κλάσης C^1 ($\mathring{\Delta}$ = εσωτερικό του Δ).

Θεωρούμε την επιφάνεια $S: \Delta \to \mathbb{R}^3$ με $S(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Τότε, S C^1 στο $\mathring{\Delta} = \Delta \setminus \partial\Delta$, $\partial\Delta$ μέτρου 0 κ' $\forall_{(u,v) \in \mathring{\Delta}}$,

$$S_u \times S_v = (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{(-f_u, -f_v, 1)} \neq (0,0,0) \Rightarrow S \text{ } \underline{\text{λεία}}.$$

S^* = <u>γράφημα της f</u>, <u>$(-f_u, -f_v, 1) \perp S^*$ στο $(u,v) \in \mathring{\Delta}$</u>.

(iii) $\Delta = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq R^2\} \; (R>0)$,

$$S : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S(u,v) = (u, v, \underbrace{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}_{f(u,v)}), \quad (u,v) \in \Delta.$$

(Ειδική περίπτωση του (ii)).

S κλάσης C^1 στο $\mathring{\Delta} = \{(u,v) : u^2+v^2 < R^2\}$ κ' $\forall (u,v) \in \mathring{\Delta}$,

το $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = \left(\dfrac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, 1 \right)$

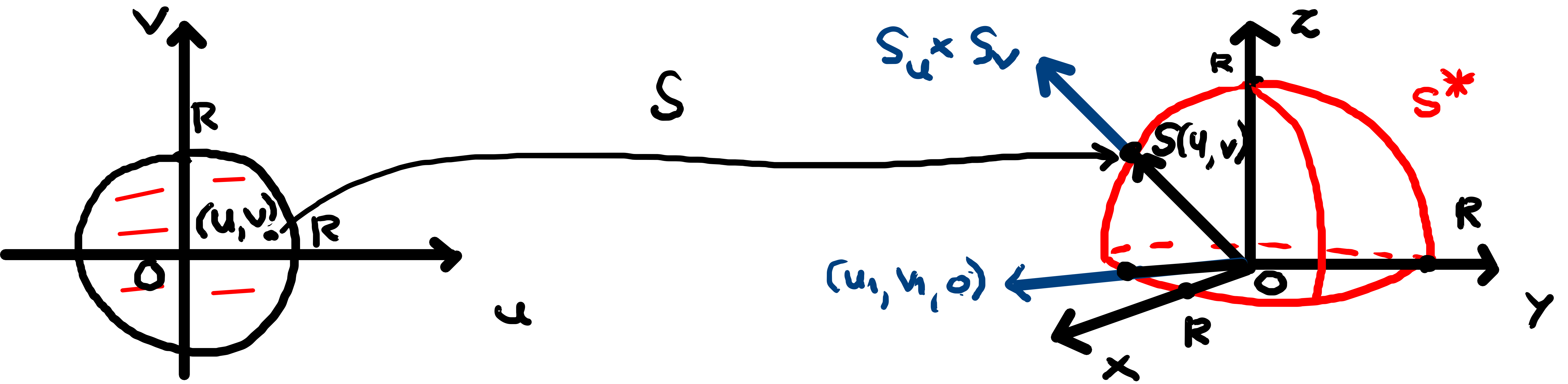
$$= \frac{1}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \, S(u,v)$$

είναι κάθετο στο S^* κ' ομόρροπο του διαν. θέσης $S(u,v)$.

Άρα, το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο "εξωτερικό" της επιφάνειας.

$$S^* = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, \ z \geq 0 \}$$

= άνω ημισφαίριο με κέντρο O κ' ακτίνα R.



Εάν $u_1^2+v_1^2 = R_1^2$ το $(u_1, v_1, 0) \perp S^*$ στο (u_1, v_1).

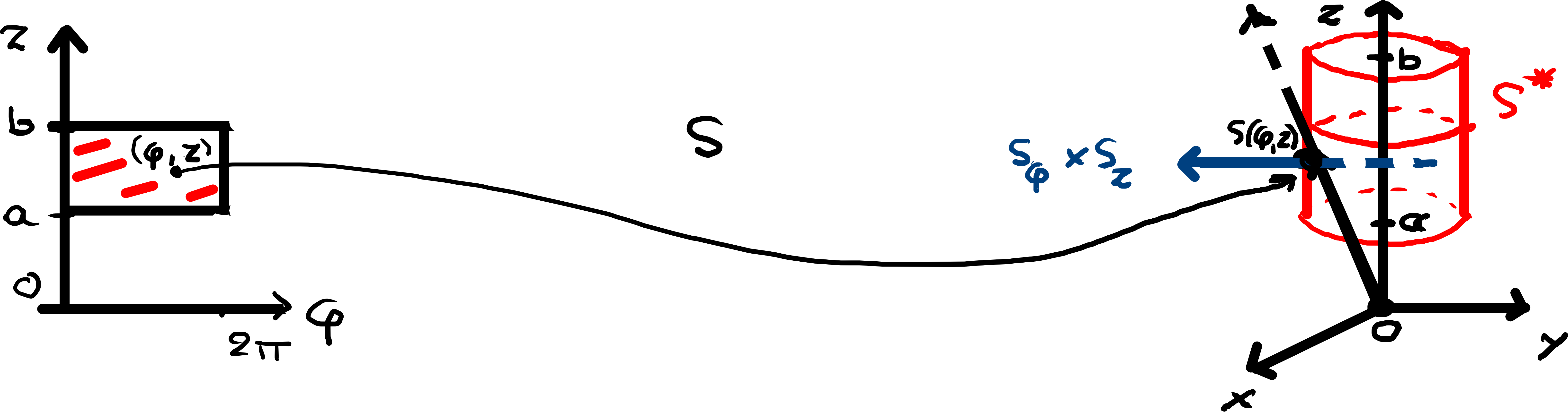
(iv) $\Delta = [0, 2\pi] \times [a, b]\ (a < b)$, $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$,

$$S(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z),\ (\varphi, z) \in \Delta$$

$$S_\varphi \times S_z = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \neq (0, 0, 0)$, $\forall (\varphi, z) \in \Delta \Rightarrow S$ λεία επιφάνεια.

$(S_\varphi \times S_z) \cdot S(\varphi, z) = 1 > 0 \Rightarrow$ η γωνία των $S_\varphi \times S_z$, $S(\varphi, z)$ είναι οξεία $\Longrightarrow$ το διάνυσμα $S_\varphi \times S_z$ "δείχνει" στο "εξωτερικό" της S^*.



$$S^* = S\left([0,2\pi]\times[a,b]\right) = \{(x,y,z) : \; x^2+y^2 = 1, \; a \le z \le b\}$$

$=$ κύλινδρος (όπως στο σχήμα).

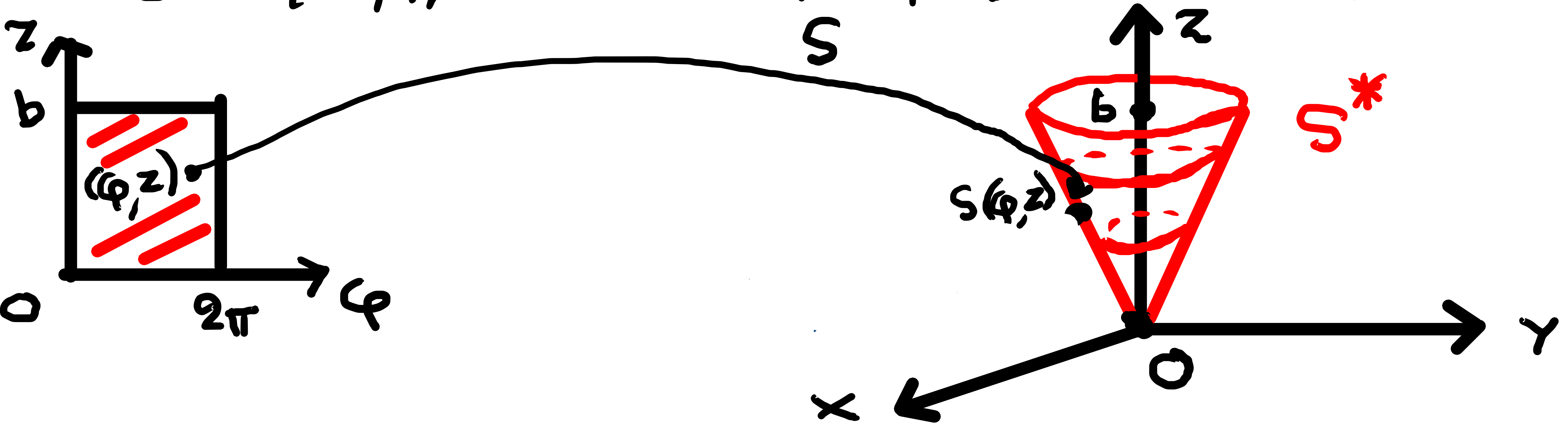
(v) Έστω $R>0$, $b>0$, $\Delta=[0,2\pi]\times[0,b]$. Θέτουμε

$$S:\Delta\to\mathbb{R}^3,\quad S(\varphi,z)=\left(\frac{z}{R}\cos\varphi,\ \frac{z}{R}\sin\varphi,\ z\right).$$

Εάν $x=\frac{z}{R}\cos\varphi$, $y=\frac{z}{R}\sin\varphi$, $0\le z\le b$

τότε $x^2+y^2=\frac{z^2}{R^2}\ \overset{z\geq 0}{\Longrightarrow}\ z=R\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow S^*=\{(x,y,z):\ z=R\sqrt{x^2+y^2}\}=$ κώνος (βλ. σχήμα)



$\forall\, (\varphi, z) \in \Delta,$

$$S_\varphi \times S_z = \left(-\frac{z}{R}\sin\varphi,\ \frac{z}{R}\cos\varphi,\ 0\right) \times \left(\frac{\cos\varphi}{R},\ \frac{\sin\varphi}{R},\ 1\right)$$

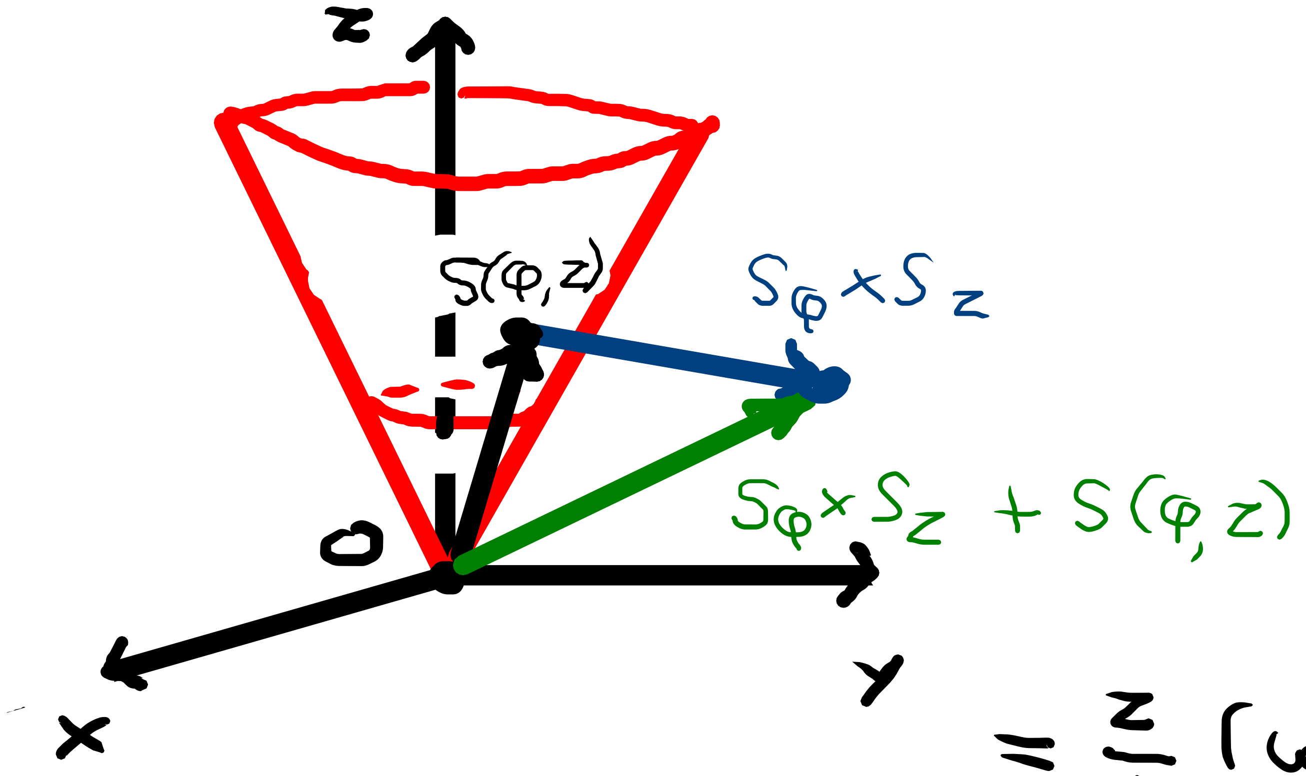
$$= \frac{z}{R^2}\left(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\right) \times \left(\cos\varphi, \sin\varphi, R\right)$$

$$= \frac{z}{R^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & R \end{vmatrix} = \frac{z}{R^2}\left(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ -1\right)$$

$$= \frac{z}{R}\left(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ -\frac{1}{R}\right).$$

$S_\varphi \times S_z \neq \vec{0},\ \forall z \in (0, b]$ κ' το $\{(\varphi, 0) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ έχει μέτρο 0

$\Longrightarrow$ <u>S λεία</u>.



Θεωρούμε σαν αρχή του $S_\varphi \times S_z$ το $S(\varphi, z)$, οπότε το πέρας του $S_\varphi \times S_z$ έχει διάνυσμα θέσης $S(\varphi, z) + S_\varphi \times S_z =$

$$= \frac{z}{R}(\cos\varphi, \sin\varphi, R) + \frac{z}{R}\left(\cos\varphi, \sin\varphi, -\frac{1}{R}\right)$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{2z}{R}\cos\varphi}_{A}, \underbrace{\frac{2z}{R}\sin\varphi}_{B}, \underbrace{z\Big(1 - \frac{1}{R^2}\Big)}_{\Gamma}\Big).$$

– Εάν $R < 1$, τότε $\Gamma < 0 \Rightarrow (A, B, \Gamma)$ εκτός του κώνου

– Εάν $R \geqslant 1$, έχουμε $R^2(A^2 + B^2) - \Gamma^2 = 4z^2 - z^2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 =$

$$= z^2\left[4-\left(1-\frac{1}{R^2}\right)^2\right] = z^2 \, \frac{4R^4-(R^2-1)^2}{R^4} = \frac{z^2}{R^4}\underbrace{\left(3R^4+2R^2-1\right)}_{\substack{(R\geq 1)\\ >0}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \Gamma < R\sqrt{A^2+B^2} \Longrightarrow (A, B, \Gamma) \text{ εντός του κώνου.}$$

Άρα, το $S_\varphi \times S_z$ <u>"δείχνει" πάντα στο εξωτερικό του κώνου.</u>

(vi) $\Delta = \{(x,y) : u^2 + v^2 \leq b\}$ $(b>0)$, $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$

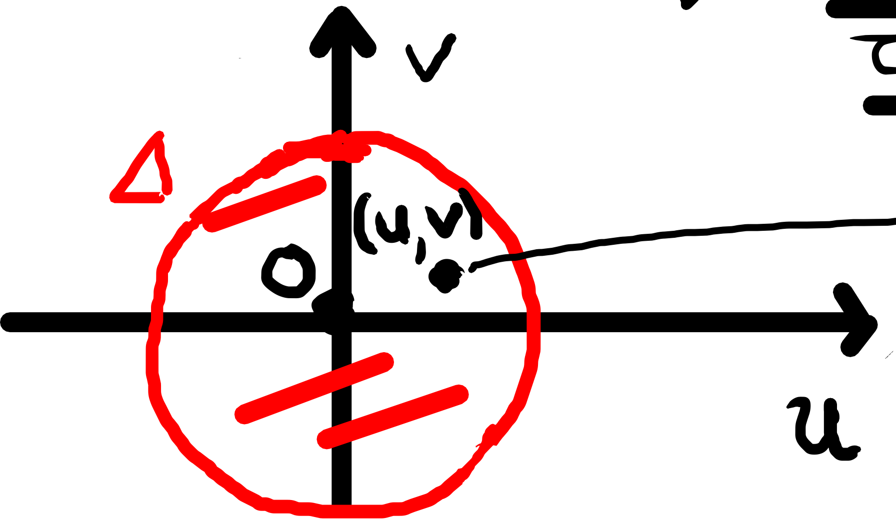
$$S(u,v) = (u, v, \underbrace{u^2+v^2}_{f(u,v)}).$$

$$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1) \neq (0,0,0), \ \forall (u,v) \in \Delta$$

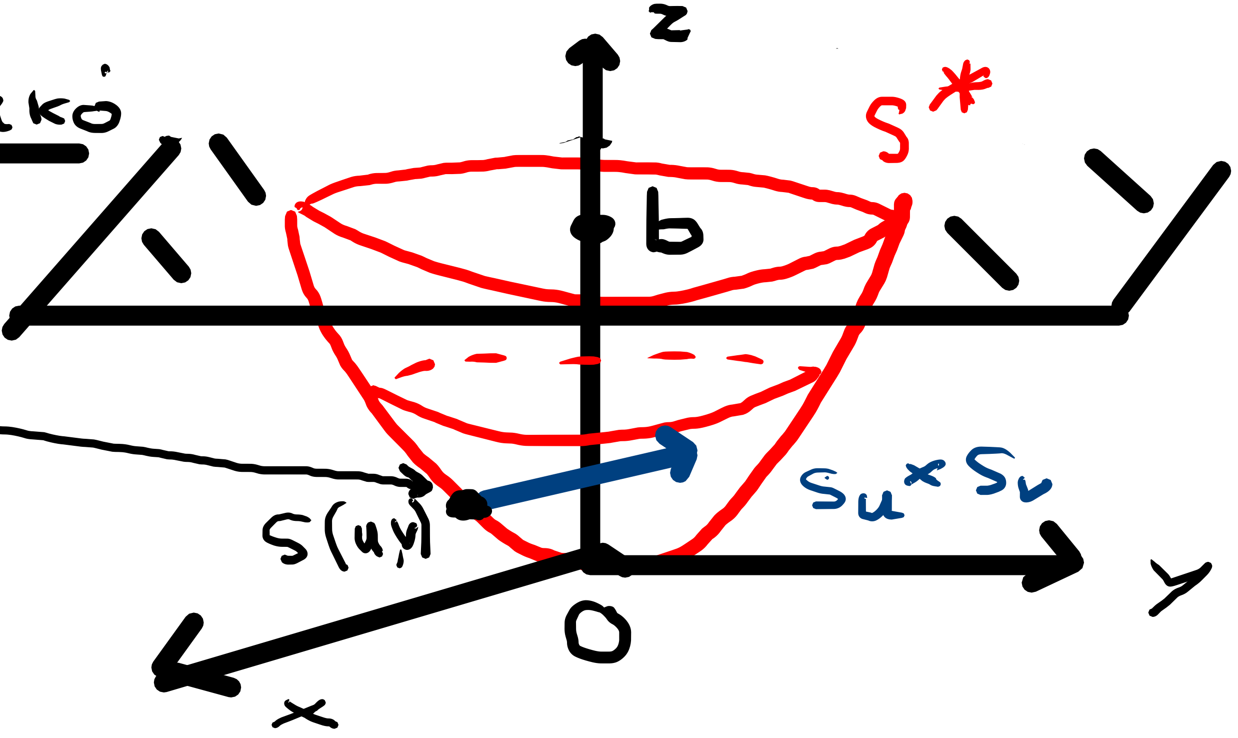
$\Rightarrow$ S λεία.

$$(S_u \times S_v) \cdot S(u,v) = -(u^2+v^2) \leq 0, \quad \forall (u,v) \in \Delta$$

$\Rightarrow$ το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^*



S



Απλές κανονικές επιφάνειες.

Θέτουμε

$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \},$$

$$\overset{\circ}{B} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \}$$

$$T = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \}.$$

Ορισμός 2: Μια λεία επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ λέγεται **απλή κανονική κλειστή** αν $\exists\ \varphi : B \to \mathbb{R}^3$ **1-1, συνεχής** ώστε

$$\varphi(T) = S^*.$$

→ Το $\varphi(\overset{\circ}{B})$ λέγεται **εσωτερικό** της S^*.

Συμβολ.: $\underline{\varphi(\overset{\circ}{B}) = \text{int}\, S^*}$.

→ Το $\mathbb{R}^3 \setminus (S^* \cup \text{int}\, S^*)$ λέγεται **εξωτερικό** της S^*.

Συμβολ.: $\underline{\text{ext}(S^*)}$.

Διαισθητικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν είναι το σύνορο ενός φραγμένου στερεού.

Εναλλακτικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν για να μπορέσουμε να μεταβούμε από την "εξωτερική όψη" της στην "εσωτερική", πρέπει να "τρυπήσουμε" την επιφάνεια.

Θέτουμε

$$B_+ = \{ (x,y,z) \in B : \ z \geq 0 \},$$

$$\overset{o}{B}_+ = \{ (x,y,z) \in B : z > 0 \}$$

$$T_+ = \{ (x,y,z) \in T : \ z \geq 0 \} = \text{άνω ημισφαίριο}$$

$$C = \{ (x,y,0) : \ x^2+y^2 = 1 \} = \text{“ ισημερινός”}.$$

Ορισμός 3: Μια λεία επιφάνεια S λέγεται <u>απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια</u> αν $\exists\, \varphi : B_+ \to \mathbb{R}^3$ <u>1-1, συνεχής</u> ώστε

$$\varphi(T_+) = S^*.$$

Το $\varphi(\overset{o}{B}_+) = \operatorname{int} S^*$ λέγεται <u>εσωτερικό της S^*</u>.

Το $\mathbb{R}^3 \setminus (S^* \cup \operatorname{int} S^*) = \operatorname{ext} S^*$ λέγεται <u>εξωτερικό της S^*.</u>

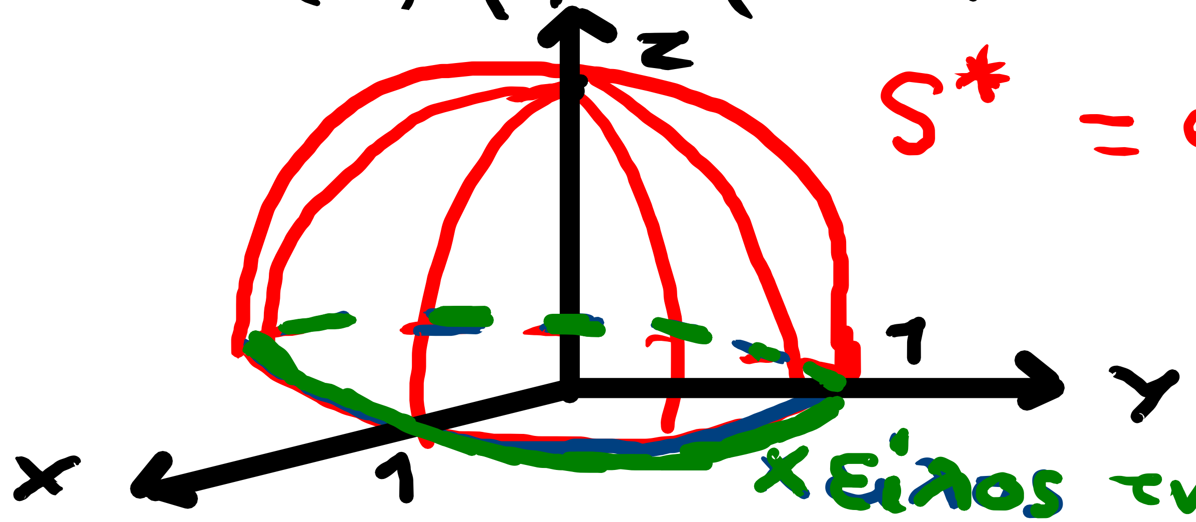
Το $\varphi(C)$ λέγεται <u>χείλος ή σύνορο της S^*.</u>

Διαισθητικά, μια επιφάνεια είναι ανοικτή αν <u>μπορούμε να μεταβούμε από την "εξωτερική" της όψη στην "εσωτερική" χωρίς να "ξεπηδήσουμε" την επιφάνεια κ' αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσω του χείλους της S^*.</u>

Παραδείγματα ανοικτών απλών κανονικών επιφανειών.

(i) $S : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

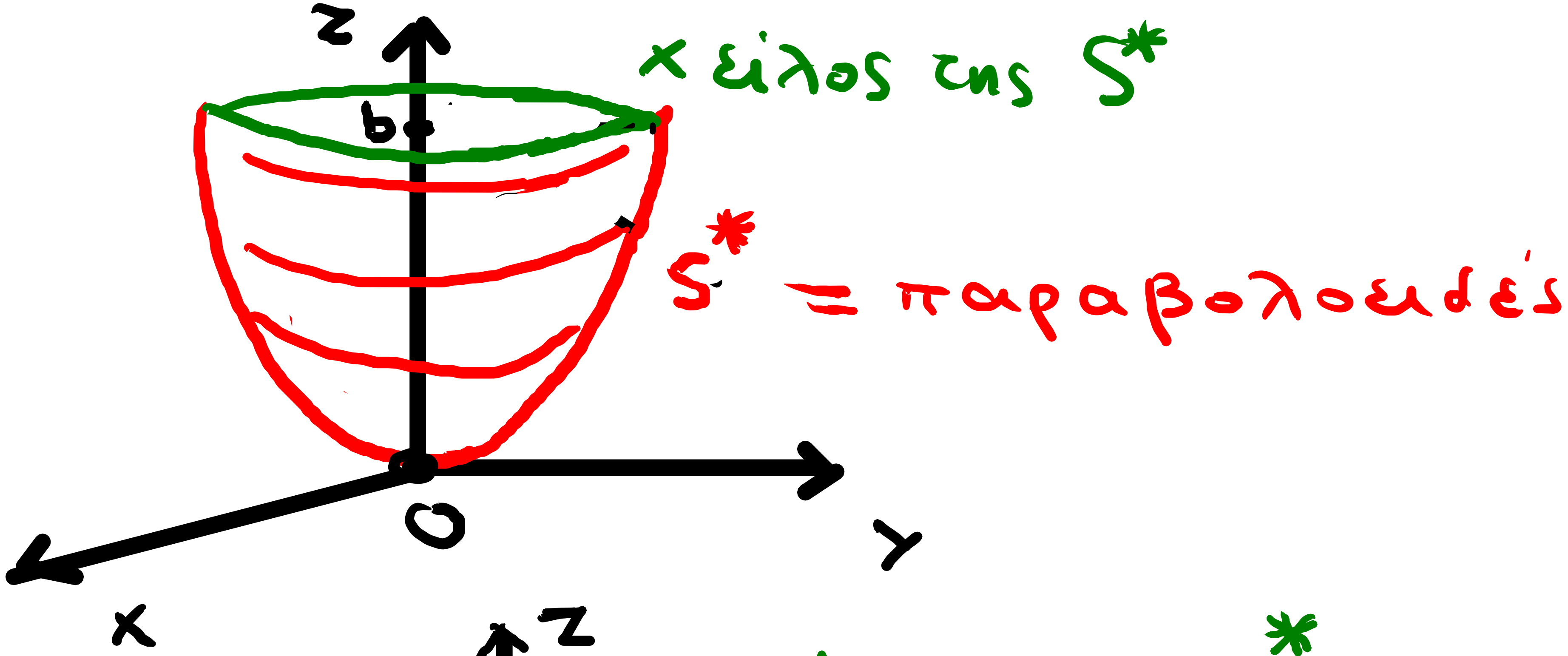


S^* = άνω ημισφαίριο

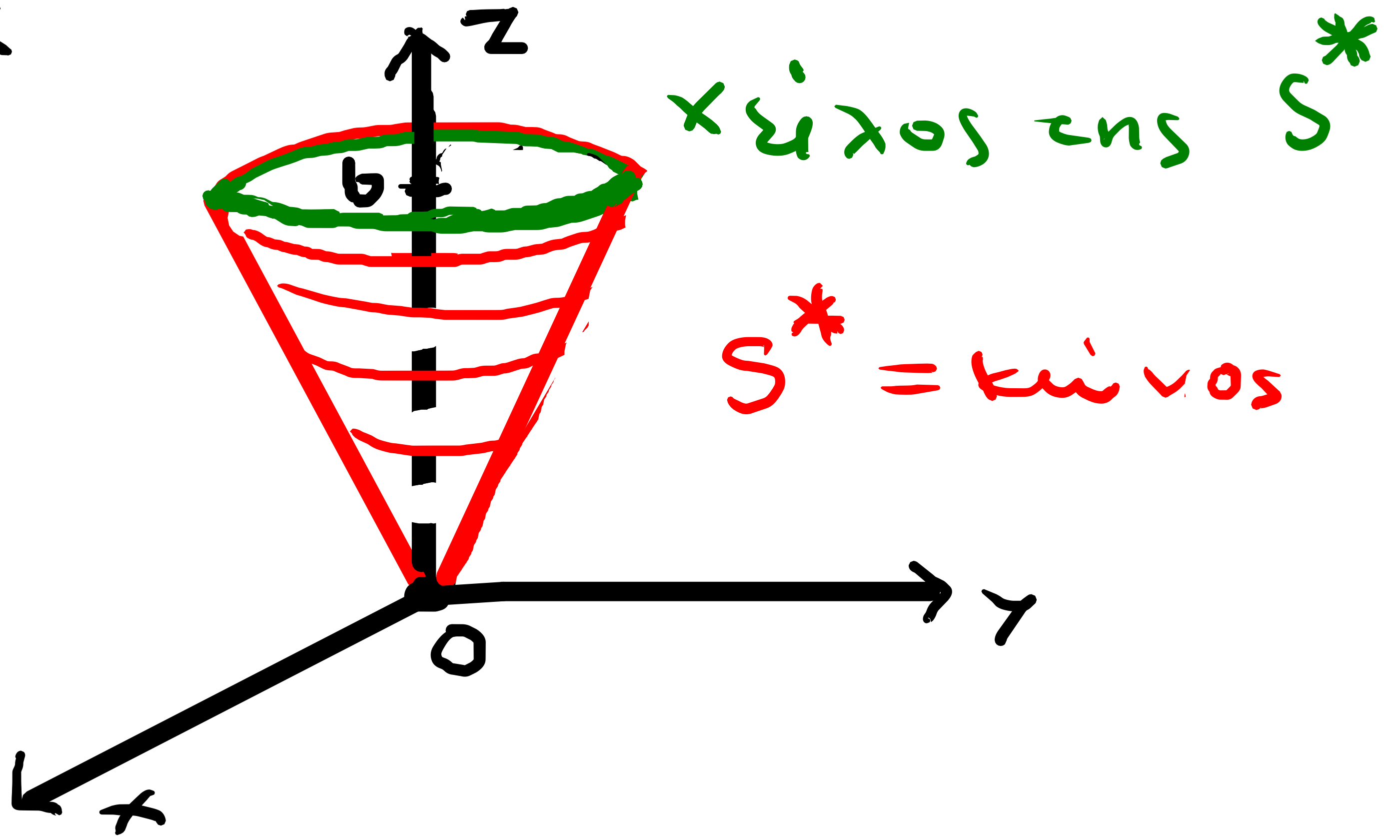
χείλος της S^*

(ii) $\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq b\}$, $\quad S : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\qquad (b > 0)$

$$S(u,v) = (u, v, u^2+v^2).$$



(iii)



$$\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq b^2\} \ (b>0)$$

$$S : \Delta \to \mathbb{R}^3$$

$$S(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right).$$

Κάθε κλειστή απλή κανονική επιφάνεια προκύπτει με "συγκόλ-ληση" δύο ανοικτών επιφανειών με κοινό χείλος.

π.χ. μια σφαίρα προκύπτει από τη "συγκόλληση" δύο ημισφαιρίων.

Θεώρημα προσανατολισμού:

Έστω $S:\Delta\to\mathbb{R}^3$ απλή κανονική επιφάνεια (ανοικτή ή κλειστή) ώστε S κλάσης C^1 στο $\Delta\setminus E$, όπου $E\subset\Delta$ μέτρου 0.

Ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

(i) $\forall (u,v)\in\Delta\setminus E$, το διάνυσμα $S_u\times S_v$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u,v)$ "δείχνει" προς το $\text{ext}(S^*)$.

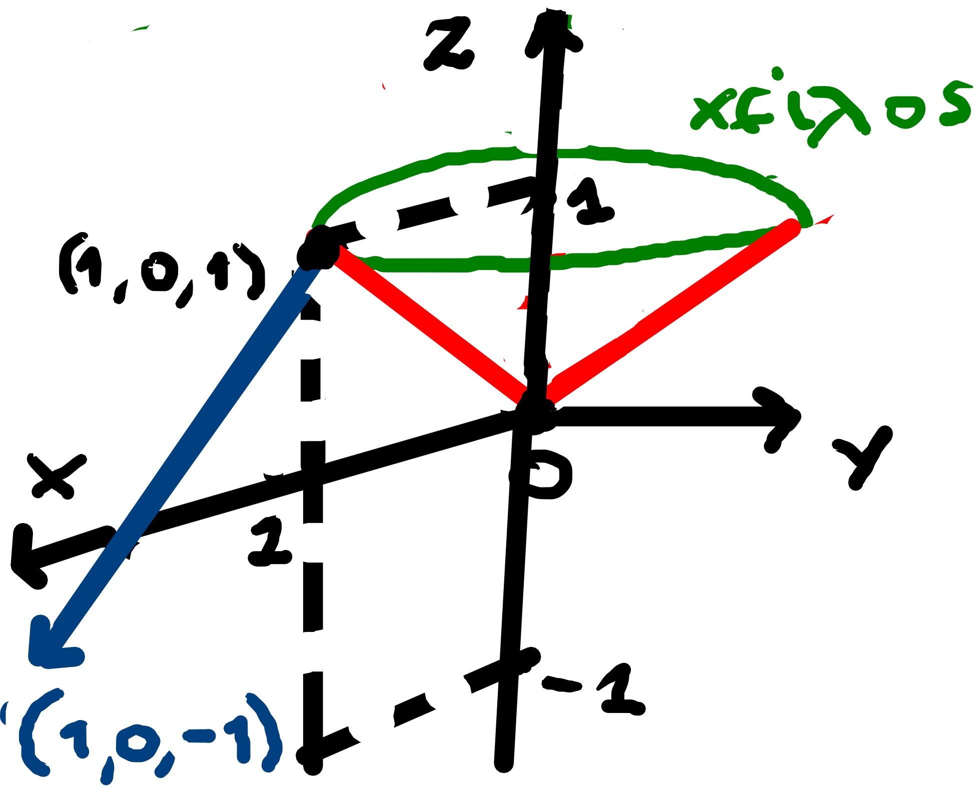
(ii) $\forall (u,v)\in\Delta\setminus E$, το διάνυσμα $S_u\times S_v$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u,v)$ "δείχνει" προς το $\text{int}(S^*)$.

Στην περίπτωση (i), θέτουμε $\vec{n}(u,v)=S_u\times S_v$, $(u,v)\in\Delta\setminus E$.

" " (ii), " $\vec{n}(u,v)=-(S_u\times S_v)$, $(u,v)\in\Delta\setminus E$.

__Παράδειγμα:__ $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$,

$$S(\varphi, z) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, z), \quad (\varphi, z) \in \Delta.$$



S ανοικτή επιφάνεια

$\forall (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times (0, 1]$,

$$(S_\varphi \times S_z)(\varphi, z) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, -z).$$

$$(S_\varphi \times S_z)(0, 1) = (1, 0, -1),$$

$$S(0, 1) = (1, 0, 1).$$

Το διάνυσμα $(1, 0, -1)$ με αρχή το $(1, 0, 1)$ "δείχνει" στο εξωτερικό του κώνου

(Θ. προσαν.) $\Longrightarrow$ $\underline{\vec{n}(\varphi, z) = S_\varphi \times S_z = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, -z), \quad (\varphi, z) \in \Delta.}$