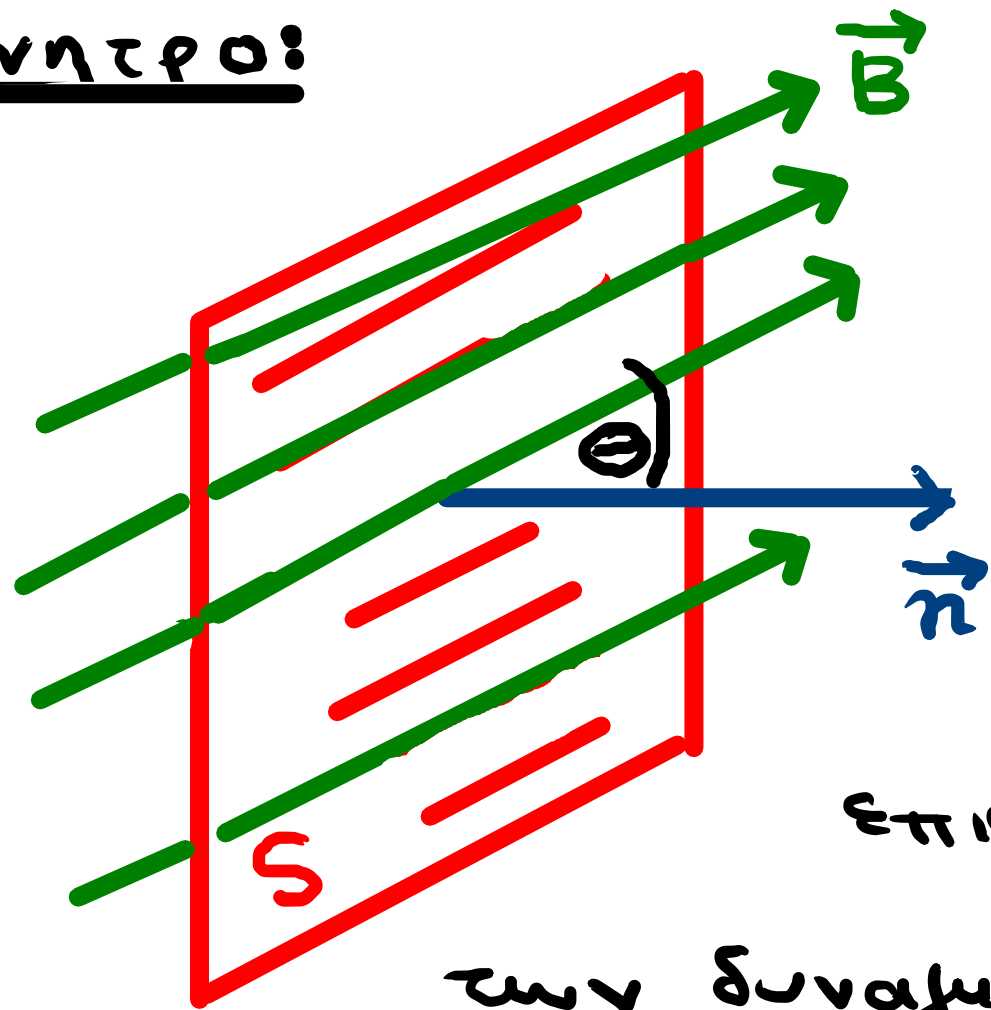


ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κίνητρο:



Έστω ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης

\vec{B} . Μέσα σε αυτό τοποθετείται
επιφάνεια ορθογ. παραλλ. εμβαδού S
ώστε

οι δυναμικές γραμμές να σχημα-
τίζουν γωνία θ με την κάθετη στην

επιφάνεια. Μαγνητική ροή Φ είναι το πλήθος

των δυναμικών γραμμών που περνάνε μέσα από
την επιφάνεια.

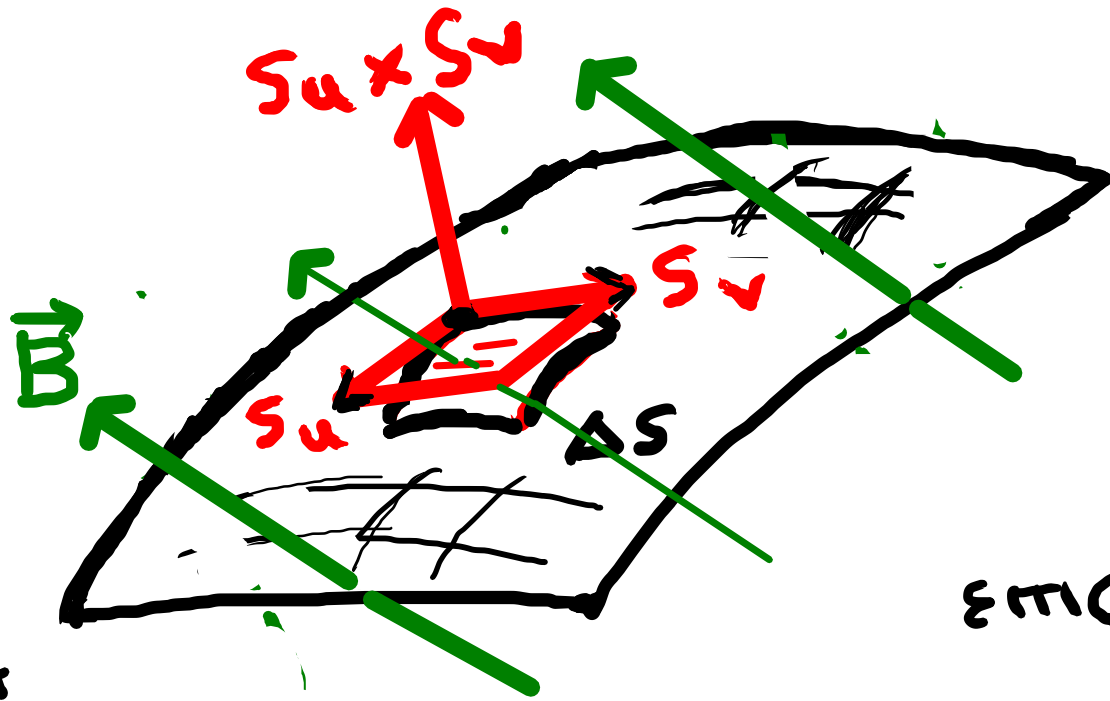
ισχύει

$$\Phi = |\vec{B}| \cdot S \cdot \cos \theta$$

Εάν \vec{n} διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με $\|\vec{n}\| = S$
 (όπως στο σχήμα),

τότε

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}$$



Έστω $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια
 μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα
 επιφάνειας εμβαδού ΔS . Υποθέτουμε ότι

$\Delta S \cong$ εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από
 τα $S_u, S_v = \|S_u \times S_v\|$ ή ότι $\vec{n} = \text{σταθερή}$
 στα σημεία της ΔS .

Επειδή το διάνυσμα $S_u \times S_v$ είναι κάθετο στην S^* στο $S(u, v)$,

η στοιχειώδης μαγνητική ροή που αντιστοιχεί στην

επιφάνεια εμβαδού ΔS είναι

$$\Delta\Phi \cong \vec{B} \cdot (S_u \times S_v).$$

Ορισμός 1: Έστω $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια (Δορθογώνιο ή κλυστός δίσκος στο \mathbb{R}^2) κ' \vec{F} συνεχές διανυσματικό πεδίο σε ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ με $S^* \subset \Omega$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

του \vec{F} πάνω στην επιφάνεια S είναι το

$$\int_S \vec{F} = \int_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) \, du \, dv.$$

Εάν S απλή κανονική λεία επιφάνεια και το
διάστημα $S_u \times S_v$ - αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(u, v)$ -
"δείχνει" προς την εξωτερική πλευρά της S^* σε

κάθε σημείο $(u, v) \in \Delta \setminus E$ ($E \subset \Delta$ μέτρου 0), τότε
το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \vec{F} = \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) du dv$$

εκφράζει τη ροή του δυν. πεδίου \vec{F} διαμέσου της
επιφάνειας S .

Δηλαδή, η ροή του \vec{F} μέσω της S^* ισούται με

$$\iint_{\Delta} \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) du dv, \quad \text{όπου}$$

- $\vec{n}(u,v) = S_u \times S_v$, αν το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εξωτερικό της S^* , $\forall (u,v) \in \Delta \setminus E$
- $\vec{n}(u,v) = -(S_u \times S_v)$, αν το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^* , $\forall (u,v) \in \Delta \setminus E$.

Ορισμός 2: Έστω $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια.

Αναπαράμειξηση της S είναι μια απεικόνιση $\bar{S}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

της μορφής $\bar{S} = S \circ T$, όπου $D = \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή

κλειστός δίσκος κ' , $T: D \rightarrow \Delta$ 1-1, επί, κλάσης C^1

με $J_T(\alpha, \beta) > 0$, $\forall (\alpha, \beta) \in D$.

Πρόταση 3: Έστω Δ, D, S, T, \bar{S} όπως παραπάνω.

Τότε, \bar{S} λεία κ'

$$\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta = J_T(\alpha, \beta) (S_u \times S_v).$$

(άρα $\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta$, $S_u \times S_v$ ομόρροπα).

Απόδειξη: Έστω $T(\alpha, \beta) = (u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$, $(\alpha, \beta) \in D$.

Τότε,

$$S(\alpha, \beta) = (x(T(\alpha, \beta)), y(T(\alpha, \beta)), z(T(\alpha, \beta)))$$

όπου

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \Delta$$

\Rightarrow

$$S_\alpha = (x_u u_\alpha + x_v v_\alpha, \quad y_u u_\alpha + y_v v_\alpha, \quad z_u u_\alpha + z_v v_\alpha),$$

$$S_\beta = (x_u u_\beta + x_v v_\beta, \quad y_u u_\beta + y_v v_\beta, \quad z_u u_\beta + z_v v_\beta)$$

$$\Rightarrow S_\alpha \times S_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u u_\alpha + x_v v_\alpha & y_u u_\alpha + y_v v_\alpha & z_u u_\alpha + z_v v_\alpha \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & y_u u_\beta + y_v v_\beta & z_u u_\beta + z_v v_\beta \end{vmatrix}.$$

→ Ελάχιστων ορίσμων τάξης 1x1:

$$\begin{vmatrix} \gamma_u u_a + \gamma_v v_a & z_u u_a + z_v v_a \\ \gamma_u u_b + \gamma_v v_b & z_u u_b + z_v v_b \end{vmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} u_a & v_a \\ u_b & v_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} \gamma_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{vmatrix}$$

→ Ελάχιστων ορίσμων τάξης 1x2:

$$\begin{vmatrix} x_u u_a + x_v v_a & z_u u_a + z_v v_a \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & z_u u_\beta + z_v v_\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} u_a & v_a \\ u_\beta & v_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}.$$

→ Εξίσωσην ορίζουσα τὰς ξ, η 1×3 :

$$\begin{vmatrix} x_u u_a + x_v v_a & \gamma_u u_a + \gamma_v v_a \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & \gamma_u u_\beta + \gamma_v v_\beta \end{vmatrix} = \dots = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & \gamma_u \\ x_v & \gamma_v \end{vmatrix}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\vec{S}_a \times \vec{S}_B &= \left(J_T \cdot \begin{vmatrix} \gamma_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{vmatrix}, -J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{vmatrix}, J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & \gamma_u \\ x_v & \gamma_v \end{vmatrix} \right) \\
&= J_T \cdot \left(\begin{vmatrix} \gamma_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ \gamma_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & \gamma_u \\ x_v & \gamma_v \end{vmatrix} \right) \\
&= J_T \cdot (S_u \times S_v).
\end{aligned}$$



Πρόταση 4: Το επιφανειακό σκωλ. ενός συνεχούς διαν. πεδίου πάνω σε λεία επιφάνεια, δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας.

Απόδειξη: Έστω $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια,

$T: D \rightarrow \Delta$ 1-1, επί, κλάσης C^2 με $J_T(\alpha, \beta) > 0, \forall (\alpha, \beta) \in D$,
όπου $D, \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ ορθογώνια ή κλειστώ δίσκοι.

Έστω επιπέδον $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συνεχής, όπου Ω ανοικτῶ $\supset S^*$.

Θεωρούμε την επιφάνεια $\bar{S} = S \circ T: D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$\iint_D \vec{F}(\bar{S}(\alpha, \beta)) \cdot (\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta) d\alpha d\beta \stackrel{[\text{Πρότ. 3}]}{=} \iint_D \vec{F}(S(T(\alpha, \beta))) \cdot (S_u \times S_v) J_T d\alpha d\beta$$

$$= \iint_D \vec{F}(S(T(\alpha, \beta))) \cdot (S_u \times S_v) J_T d\alpha d\beta \stackrel{(J_T > 0)!}{=} \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) du dv.$$

☒

Παράδειγμα:

(i) Να βρείτε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F} = (x, y, 0)$ διαμέσου της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$).

Λύση: Μια παραμετρηση της σφαίρας είναι

$$S: \Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$S(\theta, \varphi) = R(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta).$$

Έχουμε δείξει ότι $\forall (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$,

$$S_\theta \times S_\varphi = R \sin\theta S(\theta, \varphi) = \text{ομόρροπο του } S(\theta, \varphi)$$

\Rightarrow το $S_\theta \times S_\varphi$ αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(\theta, \varphi)$

„δείχνει“ στο εξωτερικό της \int^* \Rightarrow

$$\Rightarrow \vec{n}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \mathcal{S}(\theta, \varphi), \quad \forall (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi].$$

Εξουμε

$$\vec{F}(\mathcal{S}(\theta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\theta, \varphi) =$$

$$= R^3 (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0) \cdot (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta)$$

$$= R^3 \cdot (\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi) = R^3 \sin^3 \theta, \quad \forall (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$$

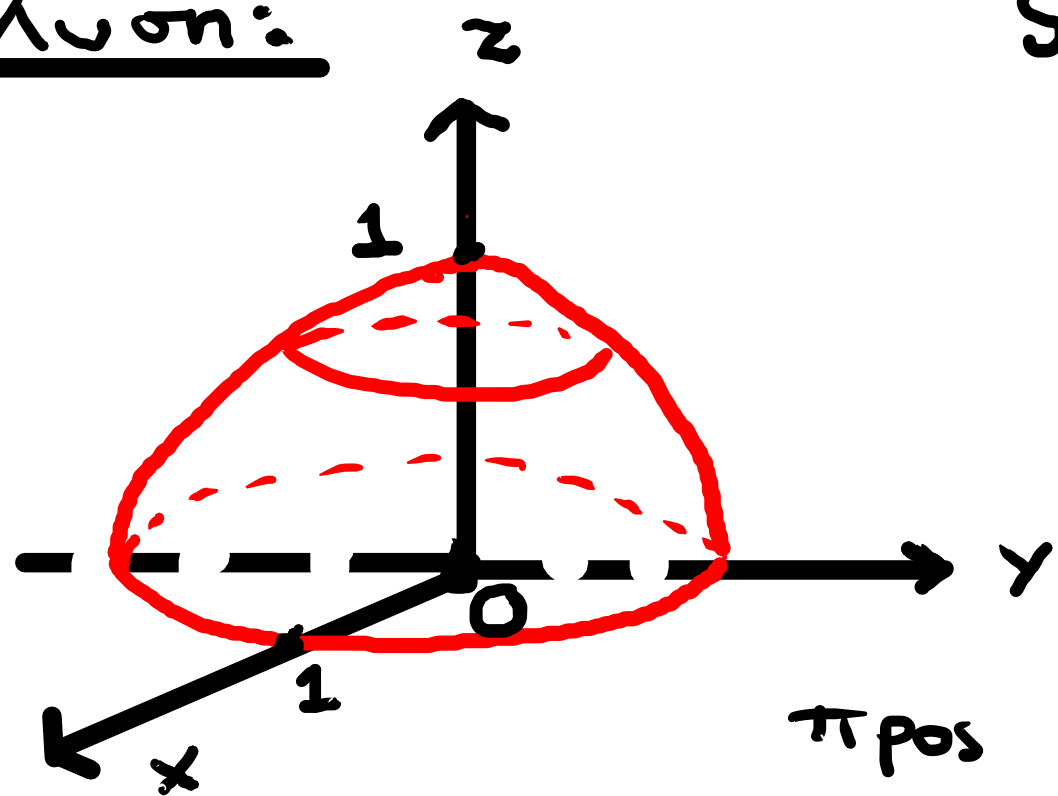
Η ητζώμενη ποσότητα με

$$R^3 \int_{\Delta} \int \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 2\pi R^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\left[\underline{w = \cos \theta} \right] \quad 2\pi R^3 \int_{-1}^1 (1 - w^2) dw = 4\pi R^3 \int_0^1 (1 - w^2) dw = 4\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 8\pi R^3 / 3.$$

(ii) Έστω S η επιφάνεια με ίχνος το μέρος του παραβολοειδούς $z = 1 - (x^2 + y^2)$ που βρίσκεται πάνω από το μοναδιαίο δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$. Να βρείτε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F} = (x, y, z)$ διαμέσου της S .

Λύση:



$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, S(u, v) = (u, v, \underbrace{1 - u^2 - v^2}_{f(u, v)}),$$

$$\Delta = \{(u, v): u^2 + v^2 \leq 1\},$$

$$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (2u, 2v, 1).$$

$$(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1) \text{ "δείχνει"}$$

προς τα έξω αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(0, 0) = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \vec{n}(u, v) = (2u, 2v, 1), \quad \forall (u, v) \in \Delta.$$

Εξο υμε $\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) =$

$$= (u, v, 1 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1)$$

$$= 2u^2 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2, \quad \forall (u, v) \in \Delta$$

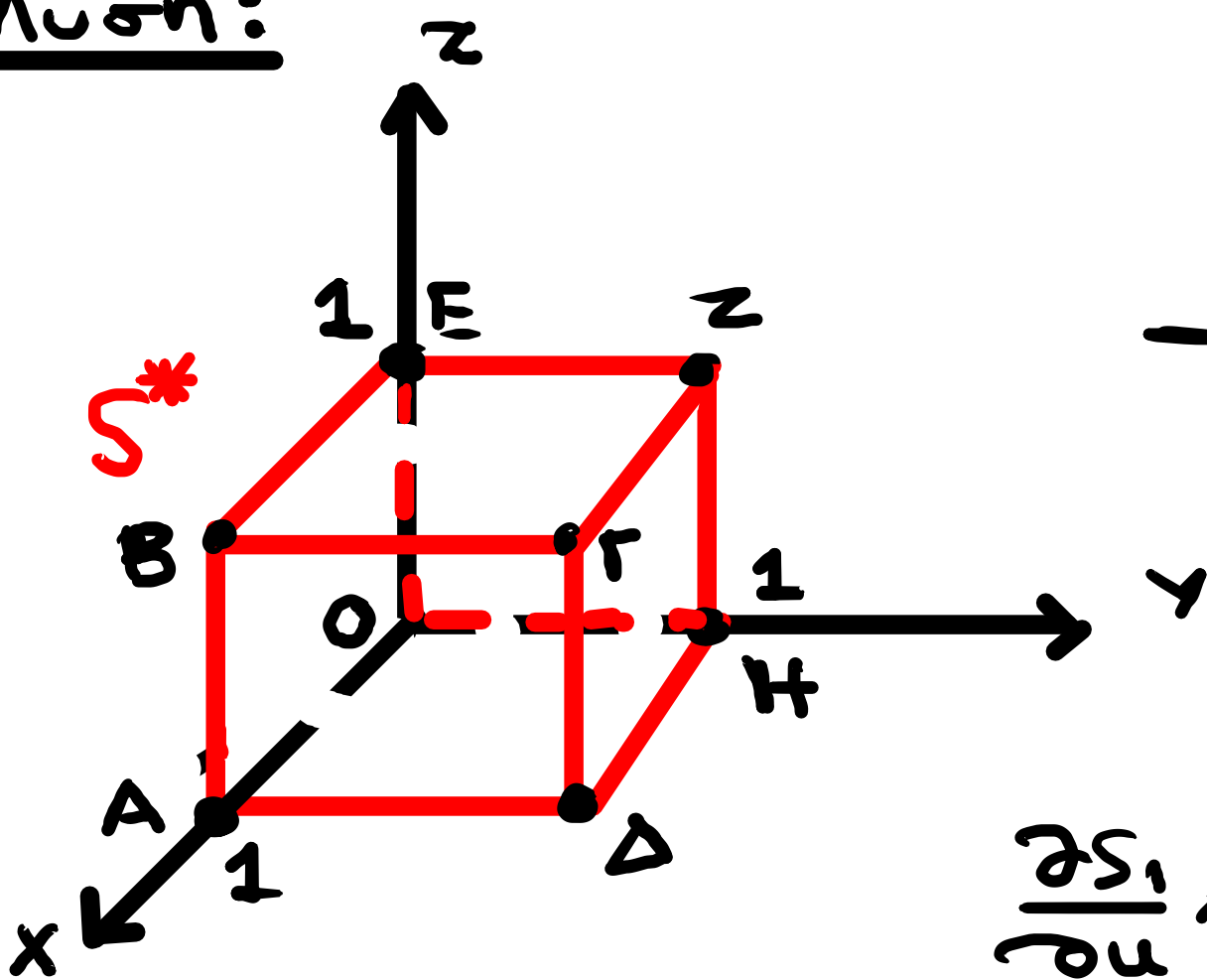
\Rightarrow η ζητούμενη ποσότητα με

$$\iint_{\Delta} (1 + u^2 + v^2) du dv \quad \begin{array}{l} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{array} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 r dr + \int_0^1 r^3 dr \right) = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

(iii) Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F} = (xy, 4yz^2, yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Λύση:



Θα υπολογίσουμε τη ροή πάνω σε κάθε μια από τις 6 έδρες του κύβου.

→ Έδρα S_1^* = ABCD:

$$x=1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$S_1(u, v) = (1, u, v), \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1]$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

"δείκνει" έτω



$$\Rightarrow \text{για να με συνν } S_1 = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(1,u,v) \cdot (1,0,0) \, du \, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u \, du \, dv = \underline{\underline{1/2}}$$

$$\rightarrow \underline{\text{Έφα } S_2^* = EOHZ : x=0, y,z \in [0,1]}$$

$$S_2(u,v) = (0, u, v), \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1],$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (0,1,0) \times (0,0,1) = (1,0,0) \text{ "δείχνει" } \omega$$

$$\underline{\text{ξωτερικό}} \text{ αν σχεδιαστεί με αρχή } \omega \quad S_2(0,0) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_2(u,v) = -(1,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ροή πάνω στην } S_2 = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(0, u, v) \cdot (1, 0, 0) du dv =$$

$$= - \int_0^1 \int_0^1 (0, 4uv^2, uv) \cdot (1, 0, 0) du dv = \underline{\underline{0}}$$

$$\rightarrow \underline{\text{Γραφή } S_3^* = \Sigma \Gamma \Delta H: y = 1, \quad x, z \in [0, 1],}$$

$$S_3(u, v) = (u, 1, v), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$$

"δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιάσει με αρχή το

$$S_3(0, 0) = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{n}_3(u, v) = (0, 1, 0) \Rightarrow$$

⇒ η ροή μέσω της S_3 είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(u, 1, v) \cdot (0, 1, 0) \, du \, dv &= \int_0^1 \int_0^1 (u, 4v^2, v) \cdot (0, 1, 0) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 4v^2 \, du \, dv = \underline{\underline{4/3}} \end{aligned}$$

→ Έδρα $S_4 = E_0 AB$: $y=0, x, z \in [0, 1]$

$$S_4(u, v) = (u, 0, v), \quad u, v \in [0, 1], \quad \frac{\partial S_4}{\partial u} \times \frac{\partial S_4}{\partial v} = (0, -1, 0)$$

'δείχνει' στο εξωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή $S(0, 0) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{n}_4(u, v) = (0, -1, 0) \quad \text{κ' } \vec{F}(u, 0, v) = 0$$

⇒ ροή στην $S_4 = 0$.

$$\rightarrow \underline{\text{Έδρα } S_5^* = \text{EB}\Gamma\text{Z}} : z = 1, x, y \in [0, 1]$$

$$S_5(u, v) = (u, v, 1), \quad \frac{\partial S_5}{\partial u} \times \frac{\partial S_5}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, -1)$$

"δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιάσει

με αρχή το $S_5(0, 0) = (0, 0, 1) \Rightarrow \vec{n}_5(u, v) = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \text{πρώτη διαμέτρηση της } S_5 = \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(u, v, 1) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 v \, du \, dv = \underline{\underline{1/2}}$$

→ Έδρα ΟΑΔΗ = S_6^* : $z=0, x, y \in [0,1]$,

$$S_6(u, v) = (u, v, 0), (u, v) \in [0,1] \times [0,1],$$

$$\frac{\partial S_6}{\partial u} \times \frac{\partial S_6}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, -1) \text{ "δειχνει"}$$

στο εξωτερικό ως σχεδίασει με αρχή το $S_6(0,0) = (0,0,0)$

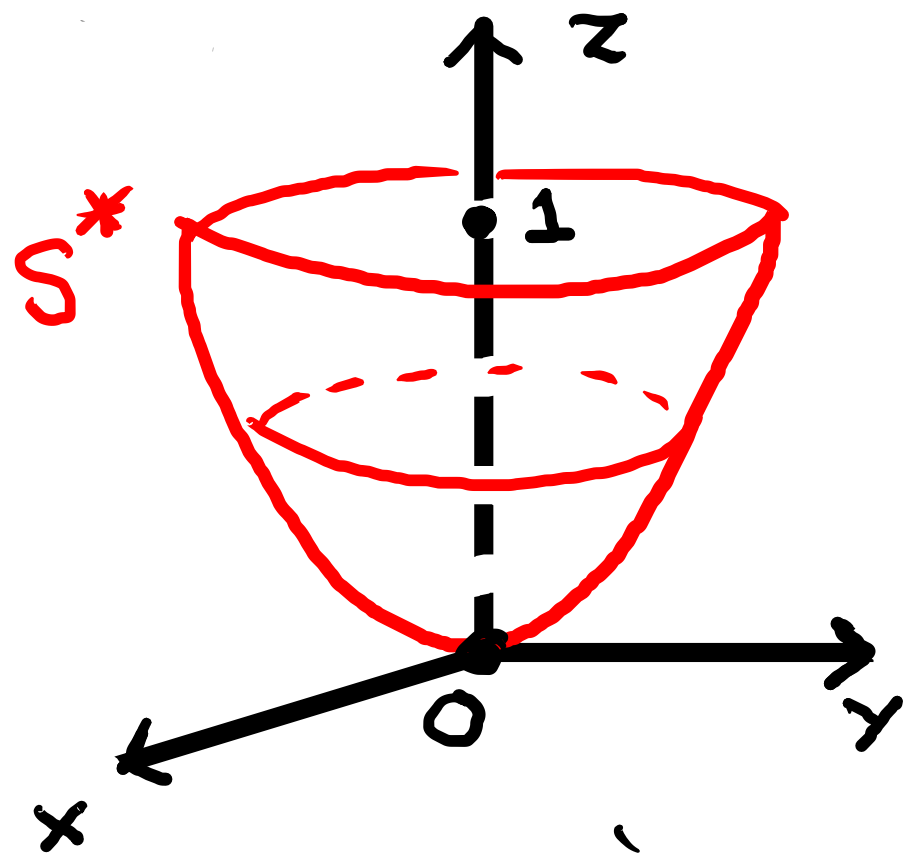
$$\Rightarrow \text{ροή διαμέσου της } S_6 = \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(u, v, 0) \cdot (0, 0, -1) = \underline{\underline{0}}.$$

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΡΟΗ:

$$\Phi = \dots = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}.$$

(iv) Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F} = (y, -x, z^2)$ διαμέσου της S^* : $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$



$$S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1),$$

$(S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$ 'δείχνει' σω

εσωτερικό αν σχεδιάσει με αρχή

$$\text{το } S(0,0) = (0,0,0) \Rightarrow \vec{n}(u,v) = (2u, 2v, 1)$$

$$\Rightarrow \text{ροή} = \iint_{\Delta} \vec{F}(u, v, u^2 + v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv$$

$$= \iint_{\Delta} (v, -u, (u^2 + v^2)^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv =$$

$$= - \int_{\Delta} (u^2 + v^2)^2 du dv \quad \begin{array}{l} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{array} \quad - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr = -2\pi/6 = -\pi/3.$$

Ορισμός 5: Μια απλή, κανονική επιφάνεια S λέγεται τμηματικά λεία αν \exists κείες απλές κανονικές επιφάνειες

S_1, S_2, \dots, S_k ώστε:

- $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup \dots \cup S_k^*$.
- $S_i^* \cap S_j^*$ έχει εμβαδό $= 0$, $\forall i \neq j$

Αν $S, S_i, 1 \leq i \leq k$ όπως παραπάνω κ' $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
συνεχές διαν. πεδίο με $S^* \subset \mathbb{R}^3$, τότε

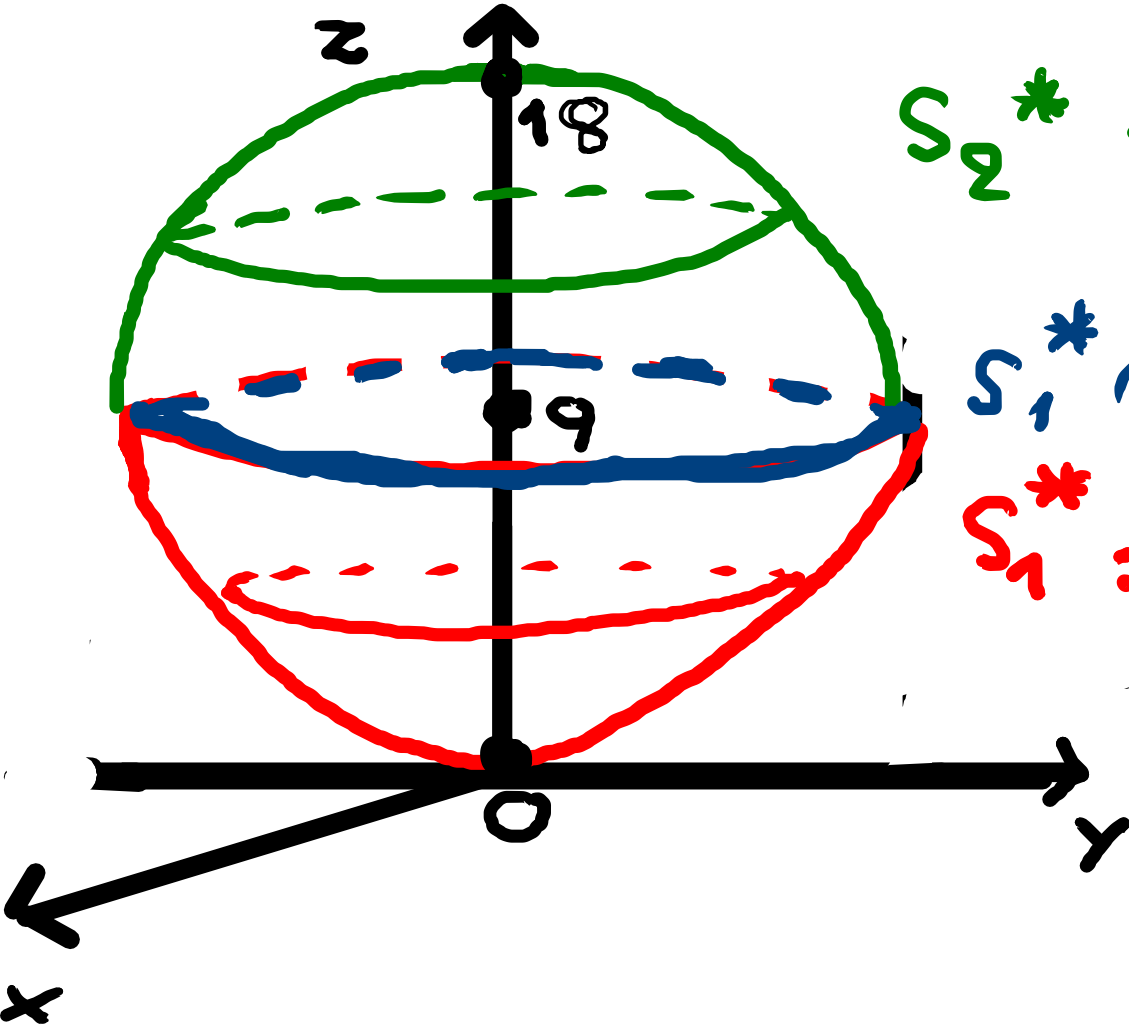
$$\int_S \vec{F} = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \vec{F}.$$

Παράδειγμα: Αν $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ κ' S^* το σύνολο των
στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 18 - x^2 - y^2,$$

να υπολογίσετε τη ροή του \vec{F} διαμέσου της S .

Λύση:



$$S_2^* : z = 18 - x^2 - y^2$$

$$S^* = S_1^* \cup S_2^*$$

$$S_1^* \cap S_2^* : (x^2 + y^2 = 9, z = 9)$$

$$S_1^* : z = x^2 + y^2$$

$$\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 9\}$$

$$S_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, S_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$S_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, S_2(u, v) = (u, v, 18 - u^2 - v^2)$$

Η ποινή διαμέσου της S ισούται με το άθροισμα των ποών διαμέσου των S_1, S_2 .

• $\Phi_1 = \text{Ποή διαμέσου της } S_1:$ $S_1(u, v) = (u, v, \underbrace{u^2 + v^2}_{f(u, v)}), (u, v) \in \Delta.$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} \right) (0, 0) = (0, 0, 1), \quad S_1(0, 0) = (0, 0, 0)$$

→ "δείχνει" σω έσωτ έφικó αν σχεδίασει με αρχή (0, 0, 0)

$$\Rightarrow \vec{n}_1(u, v) = (2u, 2v, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(S_1(u, v)) \cdot \vec{n}_1(u, v) = -(u^2 + v^2)^2$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \iint_{\{u^2 + v^2 \leq 9\}} (u^2 + v^2)^2 du dv \quad \begin{array}{l} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{array} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^5 du dv$$

$$= -2\pi \left. \frac{r^6}{6} \right|_0^3 = -\frac{\pi}{3} \cdot 3^6 = \underline{\underline{-\pi \cdot 3^5}}.$$

• $\Phi_2 =$ ρση διακρίσεων της S_2 : $S_2(u, v) = (u, v, \underbrace{18 - u^2 - v^2}_{g(u, v)})$, $(u, v) \in \Delta$.

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-g_u, -g_v, 1) = (2u, 2v, 1)$$

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} \right) (0, 0) = (0, 0, 1), \quad S_2(0, 0) = (0, 0, 18)$$

↳ "θεει x v ε" στο εξωτερικό αν σχεδιασθεί με αρχή $(0, 0, 18)$

$$\Rightarrow \vec{n}_2(u, v) = (2u, 2v, 1) \Rightarrow \vec{F}(S_2(u, v)) \cdot \vec{n}_2(u, v) =$$

$$= (18 - u^2 - v^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = \iint_{\{u^2+v^2 \leq 9\}} \vec{F}(S_2(u,v)) \cdot \vec{n}_2(u,v) \, du \, dv = \iint_{\{u^2+v^2 \leq 9\}} (18-u^2-v^2)^2 \, du \, dv$$

$$\begin{aligned} \underline{u} &= r \cos \varphi \\ \underline{v} &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 (18-r^2)^2 r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^3 (18-r^2)^2 r \, dr$$

$$\underline{[w = 18-r^2]} \quad - \pi \int_{18}^9 w^2 \, dw = \pi \int_9^{18} w^2 \, dw = \frac{\pi}{3} (18^3 - 9^3)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 9^3 \cdot (2^3 - 1) = \frac{\pi}{3} \cdot 3^6 \cdot 7 = \underline{\underline{\pi \cdot 7 \cdot 3^5}}$$

Συνολική ροή: $-\pi \cdot 3^5 + \pi \cdot 7 \cdot 3^5 = \underline{\underline{6\pi \cdot 3^5}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ (GAUSS):

Έστω S τμ.λ.εία απλή, κανονική, κλειστή επιφάνεια που είναι το σύνορο ενός φραγμένου στερεού K κ' $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 , όπου Ω ανοικτό $\supset S^* \cup K$. Η ροή της \vec{F} διαμέσου της S ισούται με

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$$

(Υπενθύμιση: αν $\vec{F} = (P, Q, R)$, τότε $\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$.)

Παραδείγματα:

(i) Να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F} = (xy, 4yz^2, yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Λύση: $P = xy, Q = 4yz^2, R = yz$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = y + 4z^2 + y = 2y + 4z^2.$$

Λόγω του ~~Θ~~ Gauss, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2y + 4z^2) dx dy dz = \int_0^1 2y dy + \int_0^1 4z^2 dz$$

$$= y^2 \Big|_0^1 + \frac{4z^3}{3} \Big|_0^1 = 7/3. \quad (\text{Ο απ' ευθείας υπολογισμός})$$

της ροής μέσω του επιφανειακού ολοκλ. είναι πολύ πιο
επίπυνη, βλ. Παράδ. (iii) παραπάνω.)

(ii) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο
 $\vec{F} = (x, y, z)$ κ' την επιφάνεια $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$).

Λύση: $S: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = R(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} S_\theta \times S_\varphi &= R \sin\theta S(\theta, \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi] \\ &= \text{ομόρροπο του } S(\theta, \varphi) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \, S(\theta, \varphi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}(S(\theta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \, S(\theta, \varphi) \cdot S(\theta, \varphi) \\ &= R^3 \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ποη διαμέτρου της } S &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = -2\pi R^3 \cos \theta \Big|_0^{\pi} = \underline{4\pi R^3}. \end{aligned}$$

Εστω $K = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$. Τότε,

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_K (1+1+1) dx dy dz =$$

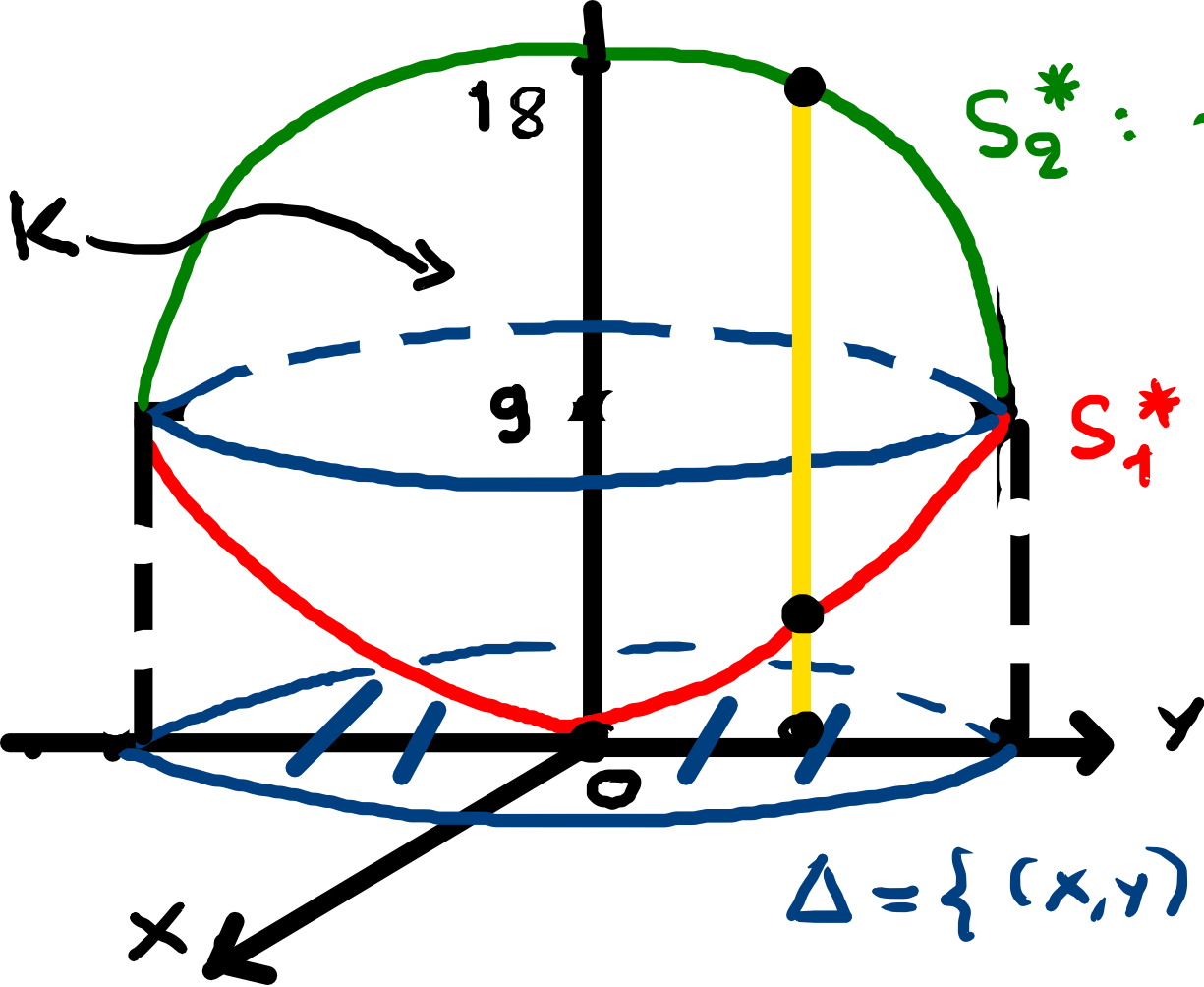
$$= 3 \cdot \text{όγκος}(K) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \underline{4\pi R^3}.$$

(iii) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο

$\vec{F} = (0, 0, z^2)$ κ' την επιφάνεια $S =$ σύνορο του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 18 - x^2 - y^2.$$

Λύση: Η ροή διαμέσου της S έχει υπολογισθεί (βλ. παράδειγμα μετά τον ορισμό 5) κ' ισούται με $6\pi \cdot 3^5$.



$$S_2^* : z = 18 - x^2 - y^2$$

$$S_1^* : z = x^2 + y^2$$

$$\Delta = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 9 \}$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} =$$

$$= \iiint_K 2z \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_{\Delta} \left(\int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} 2z \, dz \right) dx \, dy$$

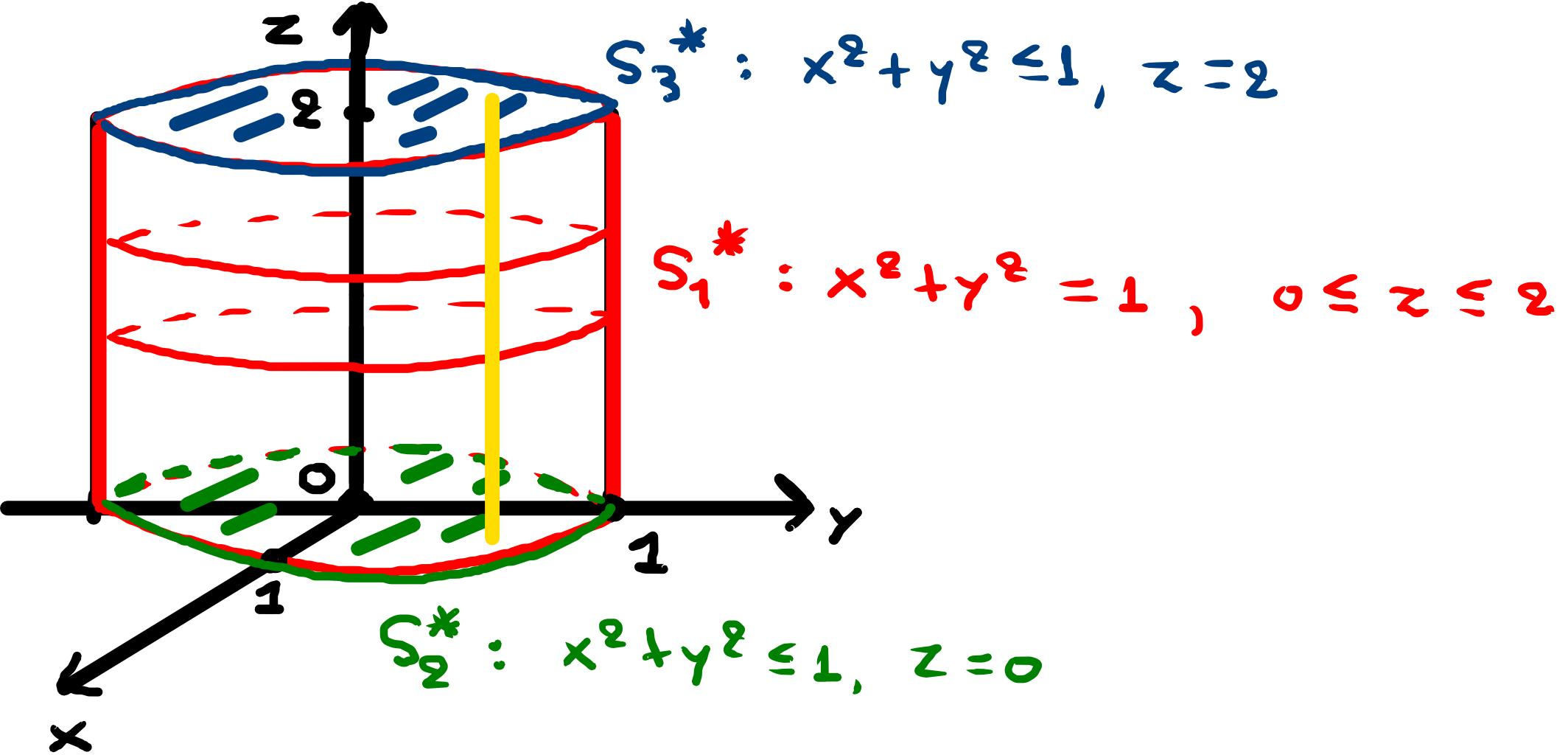
$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Delta} [(18 - x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2] \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [(18-r^2)^2 - r^4] r dr d\varphi = 2\pi \left[\int_0^3 (18-r^2)^2 r dr - \int_0^3 r^5 dr \right] = \\
 &= \dots \cdot \underline{6\pi \cdot 3^5} \cdot
 \end{aligned}$$

(iv) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (y, x, z^2)$ κ' για το στερεό $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Λύση:



• Ροή μέσω της S_1 :

$$S_1 : [0, 2\pi] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} \right) (0, 0) = (1, 0, 0), \quad S_1(0, 0) = (1, 0, 0)$$

→ "δείχνει" προς τα έξω αν σχεδιάσει με αρχή το $(1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{n}_1(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(S_1(\varphi, z)) \cdot \vec{n}_1(\varphi, z) = (\sin \varphi, \cos \varphi, z^2) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) =$$

$$= 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Ροή μέσω της } S_1 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi dz = 0$$

• Ροή διαμέσου της S_2 :

Θεωρούμε την επιφάνεια $S_2: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου

$$\Delta = \{ (u, v) : u^2 + v^2 \leq 1 \}, \quad S_2(u, v) = (u, v, 0).$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$S_2(0, 0) = (0, 0, 0)$$

↳ "δείχνει" εσωτερικά αν σχεδιαστεί με αρχή το $(0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{n}_2(u, v) = (0, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(u, v, 0) \cdot (0, 0, -1) = (v, u, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ροή μέσω της } S_2 = 0.}$$

• Ροή μέσω της S_3 : $S_3: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\},$

$$S_3(u, v) = (u, v, 2), \quad \frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

$$S_3(0, 0) = (0, 0, 2)$$

↳ "δείχνει" εξωτερικότητα

σχεδιασεί με αρχή το $(0, 0, 2)$

$$\Rightarrow \vec{n}_3(u, v) = (0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}(u, v, z) \cdot (0, 0, 1) = (v, u, 4) \cdot (0, 0, 1) = 4$$

$$\Rightarrow \text{ροή διαμέσου της } S_3 = \iint_{\Delta} 4 \, du \, dv = 4\pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$

$$\text{Άρα, συνολική ροή} = 0 + 0 + 4\pi = \underline{\underline{4\pi}}$$

Ταυτόχρονα,

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_K 2z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} \left(\int_0^2 2z \, dz \right) dx \, dy$$

$$= 4 \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} dx \, dy = 4\pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$