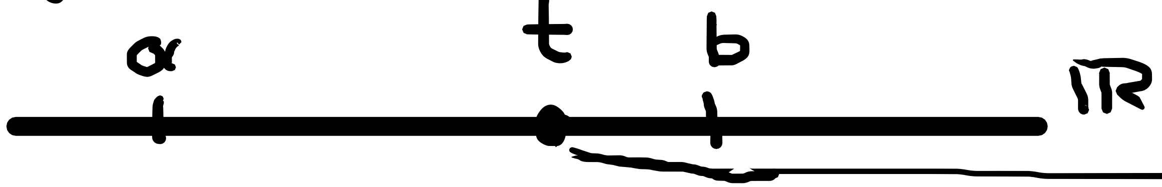
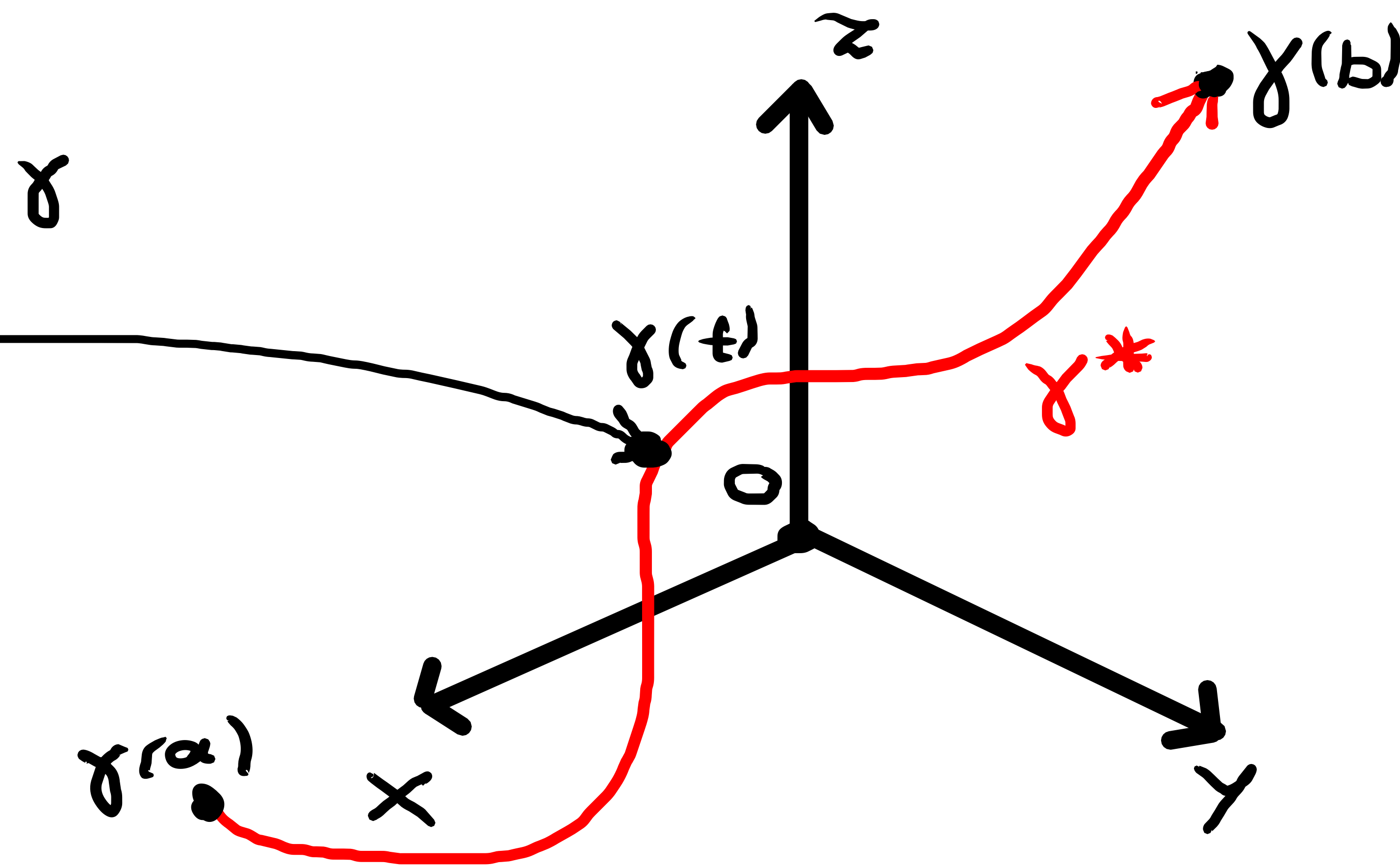
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛ. ΣΤΟ ΧΩΡΟ.

I. Καμπύλες στο χώρο.

Ορισμός I.1: Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνεχής απεικόνιση

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \ (a<b).$





$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a,b].$

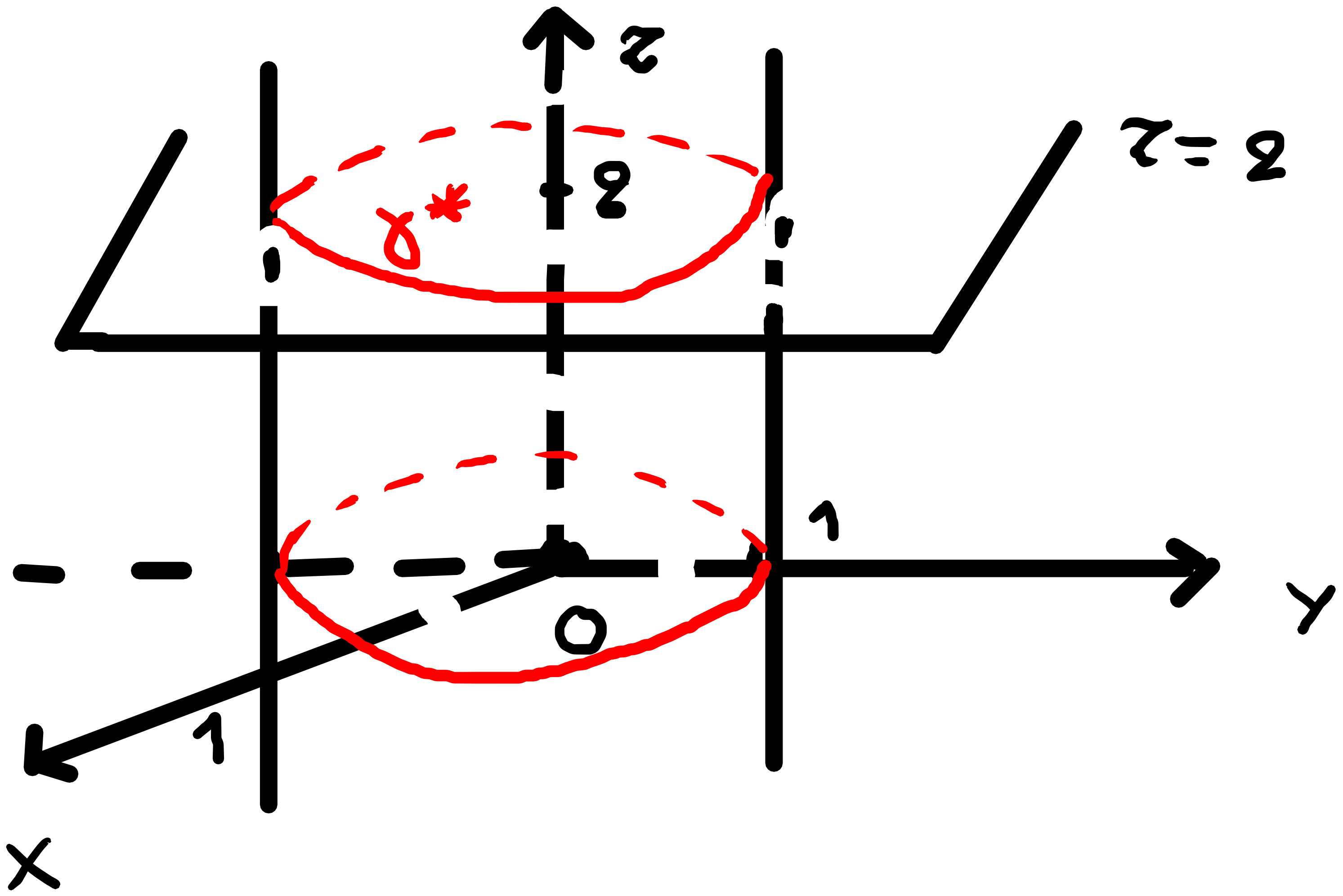
Οι $x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ λέγονται **συνιστώσες της γ.**

$\gamma^* = \gamma([a,b]) =$ **ίχνος της γ.**

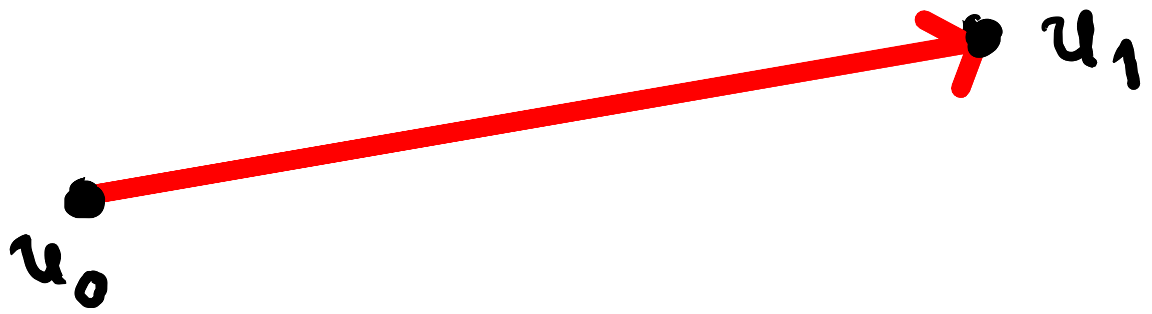
Παραδείγματα:

(i) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

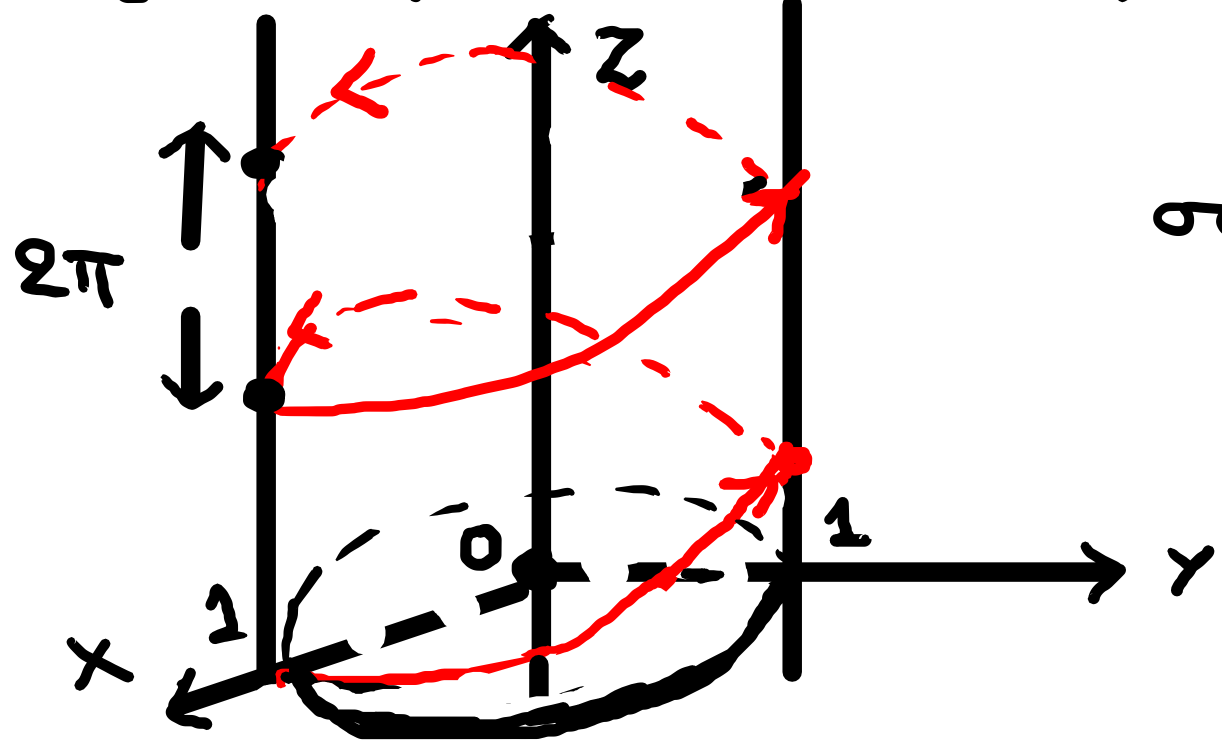
Το γ^* είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ κ' του επιπέδου $z=2$ με προβολή στο xy - επίπεδο τον κύκλο $x^2+y^2=1$.



(ii) Εάν $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^3$ κ' $\gamma(t) = (1-t)u_0 + t u_1$, $t \in [0,1]$, τότε το γ^* είναι το προσανατολ. ευθ. τμήμα με αρχή το u_0 κ' πέρας u_1.



(iii) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$ (κυκλική έλικα).



Τα σημεία του γ^* βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

2π = Βήμα της έλικας = η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών πλήρων διαγραφών της καμπύλης.

Ορισμός Ι.2: Μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ λέγεται

- **κλειστή** ανν $\gamma(a) = \gamma(b)$
- **απλή** ανν $\gamma|[a,b)$ 1-1 (γ^* δεν τέμνει τον εαυτό της).

Ορισμός Ι.3: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη.

Αναπαραμέτρηση της γ είναι κάθε απεικόνιση της μορφής $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^3$, όπου $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ συνεχής, $\uparrow$ κ' επί.

Οι γ, $\gamma \circ \varphi$ έχουν την ίδια φορά διαγραφής κ' το ίδιο ίχνος.

Ορισμός Ι.4: Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη με $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$.

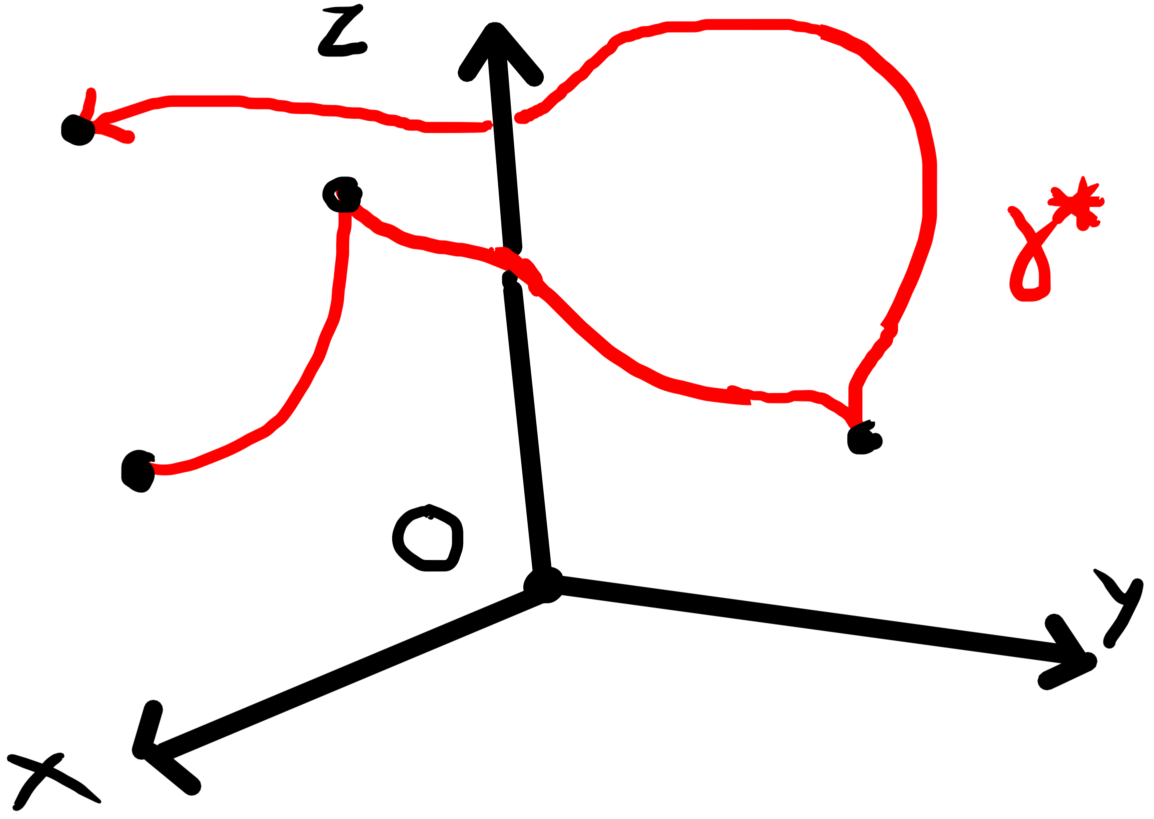
- Η γ λέγεται **κλάσης C^1** ανν οι $x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1.
- Η γ λέγεται **λεία** ανν είναι C^1 κ' $\gamma'(t)\neq(0,0,0)$, $\forall t\in[a,b]$.

Εάν $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ κλάσης C^1, επί με $\varphi'>0$ κ' $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία, τότε κ' $\gamma\circ\varphi$ λεία κ'

$$(\gamma\circ\varphi)'(t)=\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t)),\ \forall t\in[a,b].$$

Το άθροισμα διαδοχ. καμπυλών κ' η αντίθετη καμπύλη ορίζονται ακριβώς όπως στην περίπτωση επιπέδων καμπυλών.

Ορισμός I.5.: Μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ είναι τμηματικά λεία αν είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών.



← τμημ. λεία

Ορισμός Ι.6: Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία. **Μήκος** της γ είναι το $\|\gamma\|=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

Εάν γ τμημ. λεία με $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ ($\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες), το μήκος της γ είναι το

$$\|\gamma\| = \sum_{j=1}^{n}\|\gamma_j\|.$$

Εάν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία κ' $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ C^1, επί με $\varphi'>0$, τότε οι γ, $\gamma\circ\varphi$ έχουν το ίδιο μήκος.

Εφαρμογή: Να δείξετε ότι η καμπύλη γ^* του $\mathbb{R}^3$ που είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=2x$ κ' του ημισφαιρίου $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ έχει το ίδιο μήκος με την επίπεδη έλλειψη $\eta^*: 2x^2+y^2=1$.

Λύση: Έστω $(x,y,z)\in\gamma^*$. Τότε, $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow$ $\underline{x=1+\cos t,\ y=\sin t,\ \text{για κάποιο } t\in[0,2\pi]}$

Επιπλέον, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-2x}=\sqrt{4-2-2\cos t}$

$$=\sqrt{2(1-\cos t)}=\sqrt{4\sin^2 t/2}=\underline{2\sin\frac{t}{2}}$$

(σημ. $0\le t/2\le\pi$).

Επομένως, μια παραμέτρηση της γ^* είναι

$$\gamma(t) = \left(1+\cos t,\ \sin t,\ 2\sin\frac{t}{2}\right),\quad t\in[0,2\pi].$$

Έχουμε

$$\gamma'(t) = \left(-\sin t,\ \cos t,\ \cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \|\gamma'(t)\|^2 = 1+\cos^2\frac{t}{2}, \quad t\in[0,2\pi]$$

$$[\gamma \text{ λεία}] \xRightarrow{\quad} \boxed{\|\gamma\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\, dt.} \quad (1)$$

Επίσης, μια παραμέτρηση της επίπεδης έλλειψης

$$\eta^*: \ 2x^2 + y^2 = 2$$

είναι $\quad \eta(t) = (\cos t, \sqrt{2}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$

Έχουμε

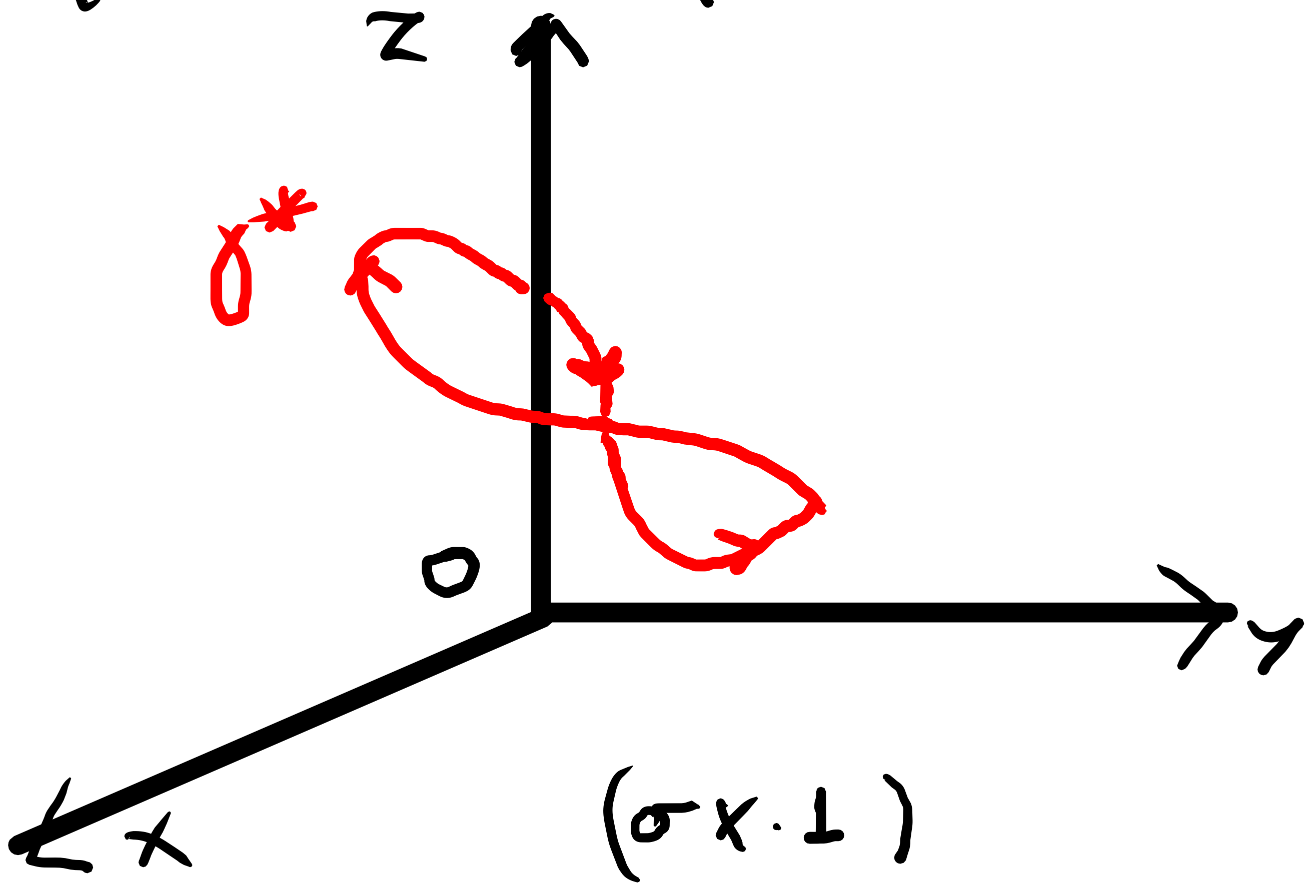
$$\|\eta\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt \overset{[u=t-\pi]}{=}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(\pi+u)}\, du = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\, du = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\, du$$

$$\overset{[w=2u]}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 \frac{w}{2}}\, dw \overset{(1)}{=} \|\gamma\|.$$

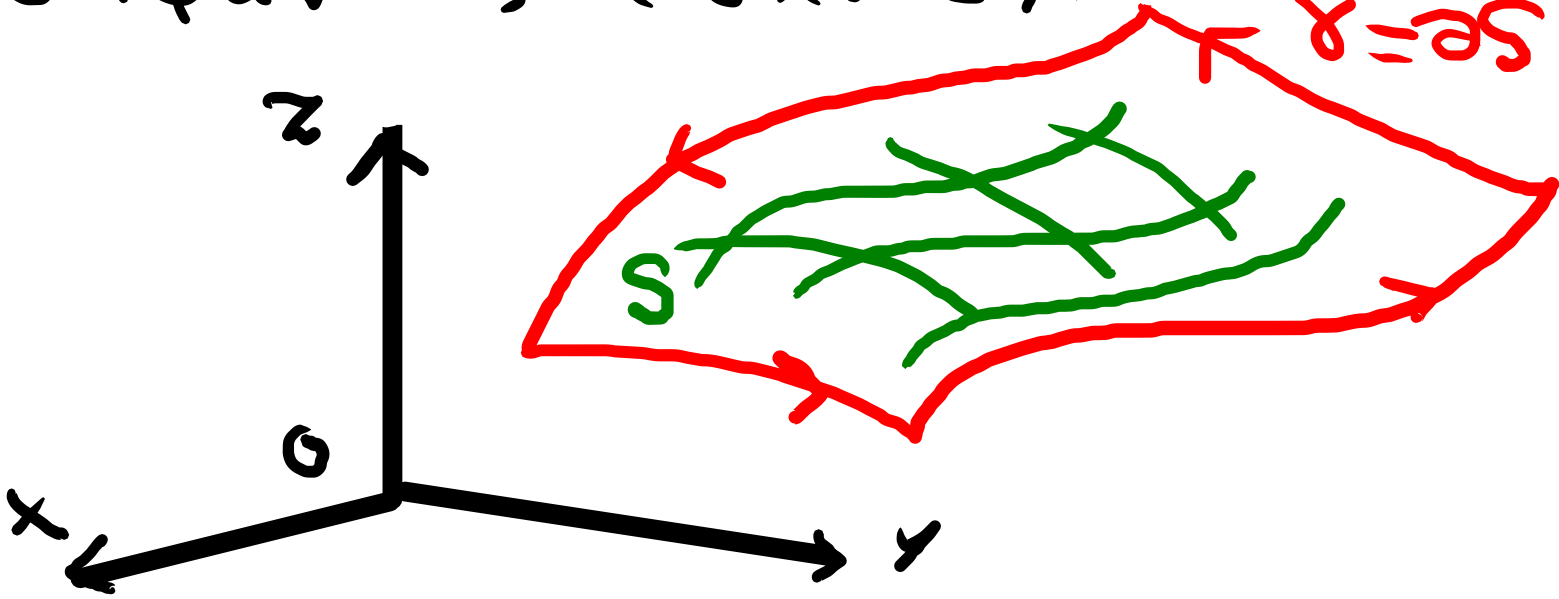
Σημαντική διαφορά καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$ κ' καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$.

Εάν γ μη επίπεδη απλή, κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, δεν ορίζεται γενικά η έννοια του "εσωτερικού της γ" κ' της "θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ" (π.χ. σχ. 1).



(σχ. 1)

Ορίζονται αυτές οι έννοιες για το σύνορο προσανατολισμένης επιφάνειας (σχ. 2).



II. Επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. συνάρτησης στον $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός II.1: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ λεία καμπύλη κ' $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ συνεχής διανυσμ. συνάρτηση. Ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της $\vec{F}$ πάνω στην γ ως εξής:

$$\int_\gamma \vec{F} \doteq \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Εάν $\vec{F} = (P, Q, R)$, $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$, τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$ όπου

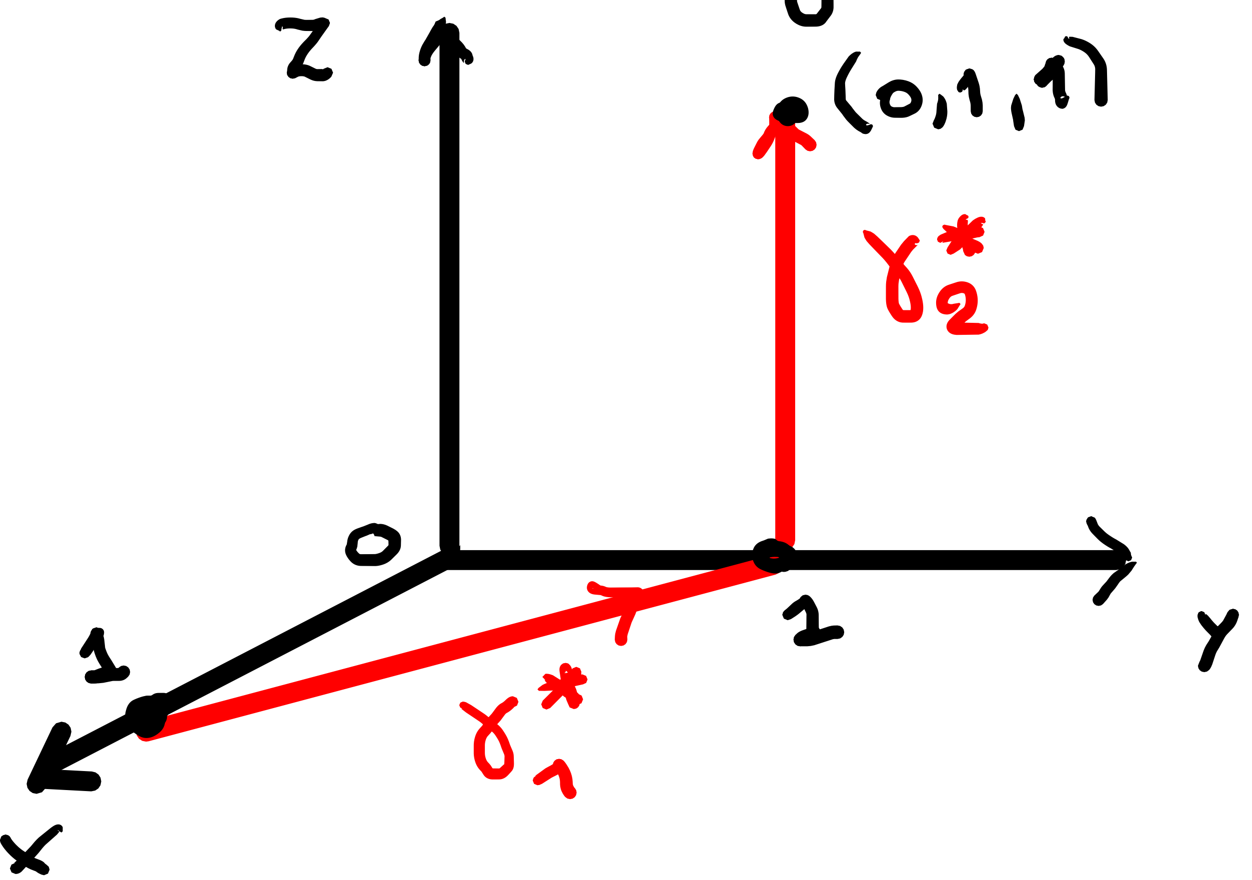
$$\int_\gamma P\,dx = \int_a^b P(\gamma(t))\,x'(t)\,dt, \quad \int_\gamma Q\,dy = \int_a^b Q(\gamma(t))\,y'(t)\,dt,$$

$$\int_\gamma R\,dz = \int_a^b R(\gamma(t))\,z'(t)\,dt.$$

Εάν $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ τμημ. λεία ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ λείες διαδοχικές), τότε ορίζεται το

$$\int_\gamma \vec{F} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \vec{F}.$$

Παράδειγμα: $\int_\gamma \vec{F} = ?$, $\vec{F} = (xy, xz, -y)$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (βλ. σχήμα).



Λύση: $\int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}$.

- $\gamma_1(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,0)$

$$= (\underbrace{1-t}_{x(t)}, \underbrace{t}_{y(t)}, \underbrace{0}_{z(t)}), \quad t \in [0,1]$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \int_0^1 t(1-t)(-1)\,dt = -1/6,$$

$$\int_{\gamma_1} Q\,dy = \int_{\gamma_1} R\,dz = 0 \Rightarrow \underline{\int_{\gamma_1} \vec{F} = -1/6}.$$

• $\gamma_2(t) = (1-t)(0,1,0) + t(0,1,1) = (\underbrace{0}_{x(t)}, \underbrace{1}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)}),\ t \in [0,1].$

$\Longrightarrow x'(t) = y'(t) = 0, \quad z'(t) = 1, \ \forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^1 (-1)\,dt = \underline{-1}.$

Άρα, $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = -1/6 - 1 = -7/6.$

Επικαμπύλιο ολοκλ. ανεξάρτητο του δρόμου.

Ορισμός II.2: Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (Ω ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^3$) λέγεται **συντηρητικό** αν $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$.

Πρόταση II.3: Έστω $\vec{F} = \nabla f$ συντηρητικό $: \Omega \to \mathbb{R}^3$ κ' $\gamma : [a, b] \to \Omega$ τμημ. λεία καμπύλη. Τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Πόρισμα II.4: Έστω $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό. Τότε, $\forall \gamma$ <u>κλειστή</u> τμημ. λεία καμπύλη του Ω ισχύει

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

Πόρισμα ΙΙ.5: Έστω $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό κ' $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμημ. λείες καμπύλες του Ω με κοινά άκρα. Τότε,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}$$ (ολοκλ. ανεξ. του δρόμου).

Πρόταση ΙΙ.6: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>ανοικτό συνεκτικό</u> κ' $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ συνεχές διαν. πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

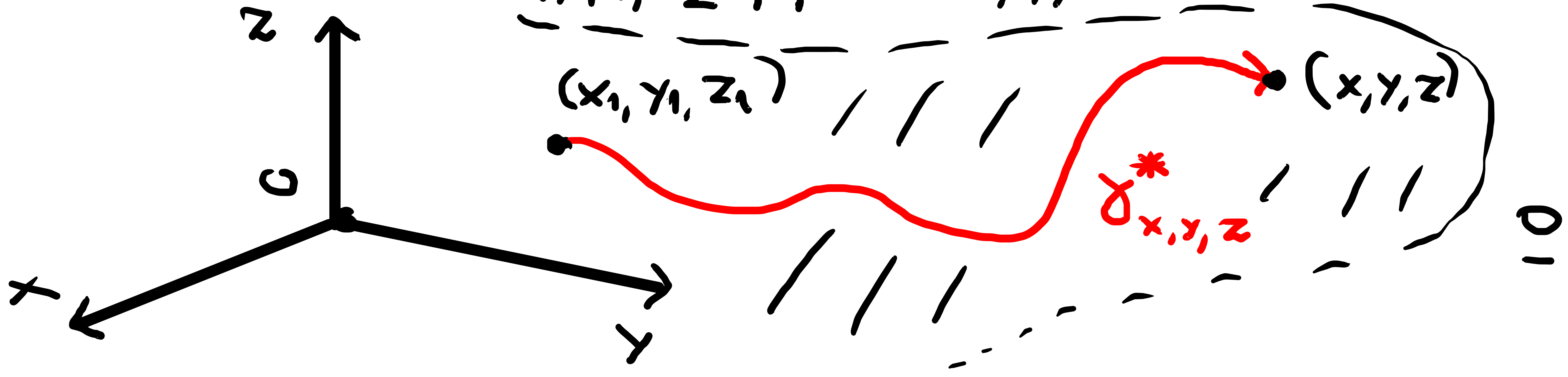
<u>(i)</u> $\vec{F}$ συντηρητικό.

<u>(ii)</u> Το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ στο Ω είναι ανεξ. του δρόμου.

Επιπλέον, αν ισχύει μία εκ των (i), (ii) κ' $(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$, μια συνάρτηση δυναμικού δίνεται από τη σχέση

$$f(x,y,z) = \int_{\gamma_{x,y,z}} \vec{F}, \qquad (x,y,z) \in \Omega,$$

όπου $\gamma_{x,y,z}$ <u>οποιαδήποτε</u> καμπύλη που συνδέει τα (x_1, y_1, z_1), (x,y,z).



Ορισμός ΙΙ.7: Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 (δηλ. $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1) κ' Ω ανοικτό.

Στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι η συνάρτηση

$$\operatorname{rot} \vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

με

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R_y - Q_z ,\ P_z - R_x ,\ Q_x - P_y\right).$$

Το $\vec{F}$ λέγεται <u>αστρόβιλο</u> στο Ω αν $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ στο Ω.

Πρόταση II.8: Εάν $\vec{F}=(P,Q,R):\underline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 συντηρητικό. Τότε, $\vec{F}$ αστρόβιλο στο $\underline{\Omega}$.

Απόδειξη: $\exists f:\underline{\Omega}\to\mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\nabla f=\vec{F}$

$\Rightarrow f_x=P,\ f_y=Q,\ f_z=R \ \underset{\text{κλάσης } C^1]}{\overset{[P,Q,R}{\Longrightarrow}}\ f$ κλάσης C^2 στο $\underline{\Omega}$.

Επομένως,

$$\underline{R_y=f_{zy}=f_{yz}=Q_z},\quad \underline{P_z=f_{xz}=f_{zx}=R_x},$$

$$\underline{Q_x=f_{yx}=f_{xy}=P_y}\ \Rightarrow\ \operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0} \text{ στο } \underline{\Omega}.\quad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο</u>: Το αντίστροφο της Πρότασης ΙΙ.8 δεν ισχύει γενικά.

<u>Π.χ.</u> $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $R = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \Omega$,

$$\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \to \mathbb{R}^3.$$

$P_y = Q_x$, $R_y = Q_z = 0$, $P_z = R_x = 0 \Rightarrow \vec{F}$ αστρόβιλο στο Ω.

Εάν $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε γ κλειστή λεία

κ' $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi \neq 0 \xRightarrow{[\text{Πόρισμα ΙΙ.4}]} \vec{F}$ μη συντηρητικό.

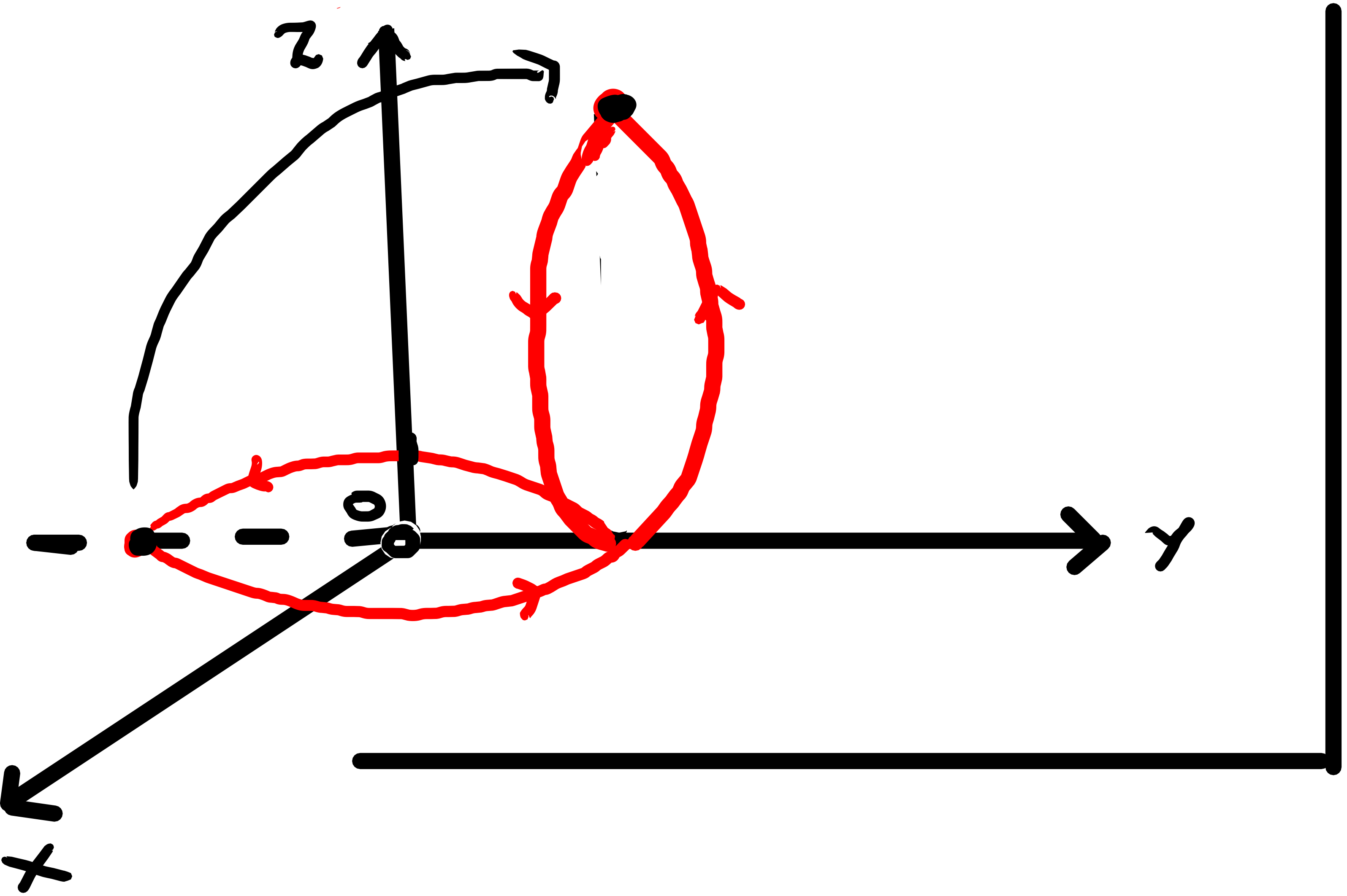
Το αντίστροφο της Πρότ. ΙΙ.8 ισχύει <u>για απλώς συνεκτικά πεδία στον $\mathbb{R}^3$.</u>

Ορισμός ΙΙ.9: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, συνεκτικό. Το Ω λέγεται **απλά συνεκτικό** ανν κάθε απλή κλειστή τμημ. λεία καμπύλη του Ω μπορεί να "συρρικνωθεί" με "συνεχή" τρόπο σε σημείο, παραμένοντας μέσα στο Ω (καμπύλη ομότοπη με σημείο).

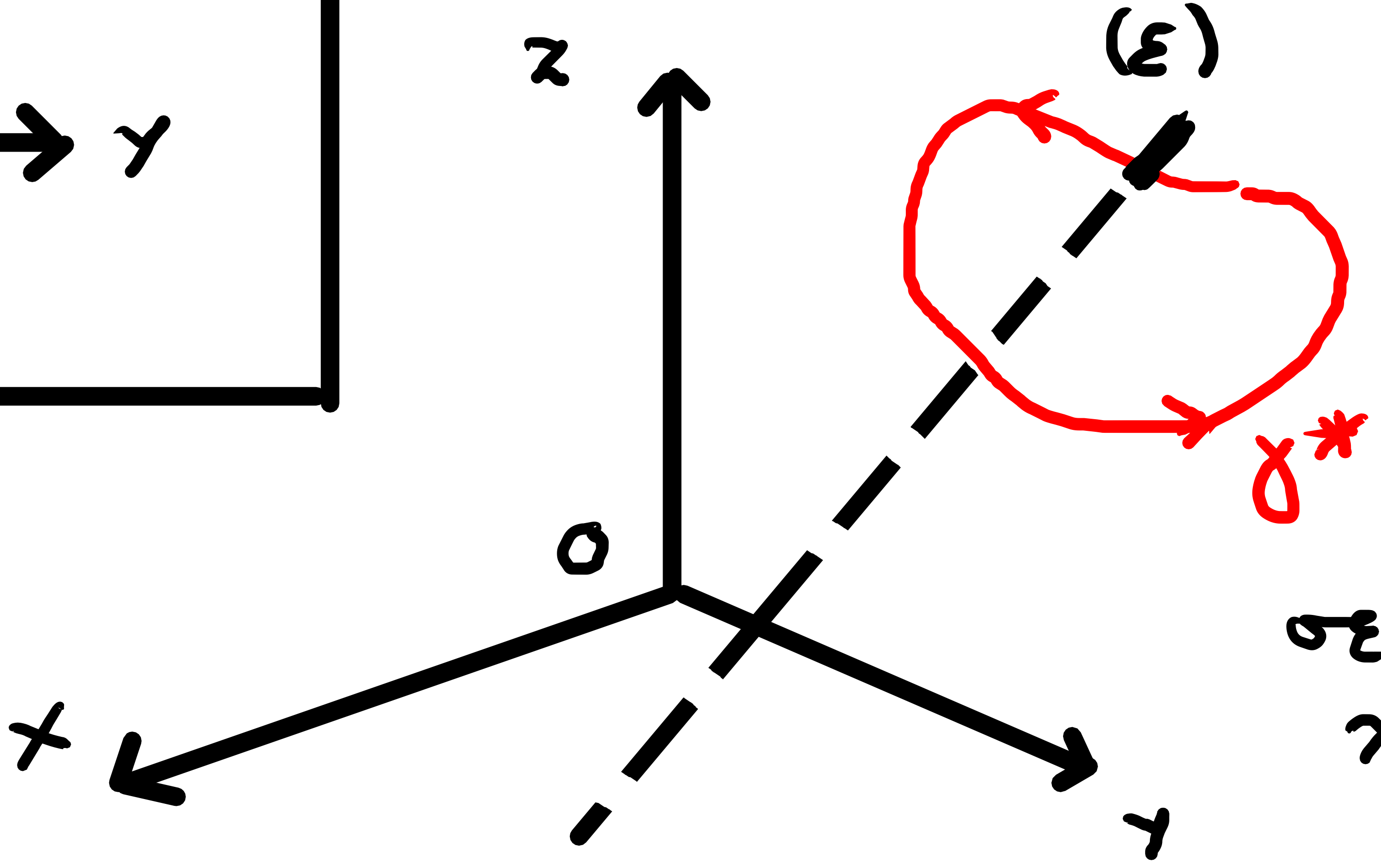
Παραδείγματα:

(i) Το $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι απλά συνεκτικό.

π.χ. αν θεωρήσουμε τον κύκλο $x^2+y^2=1$ στο xy-επίπεδο, στρέφουμε τον κύκλο κατά $90°$ ώστε να γίνει παράλληλος στο xz-επίπεδο (χωρίς παραμόρφωση). Ο νέος κύκλος μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο.



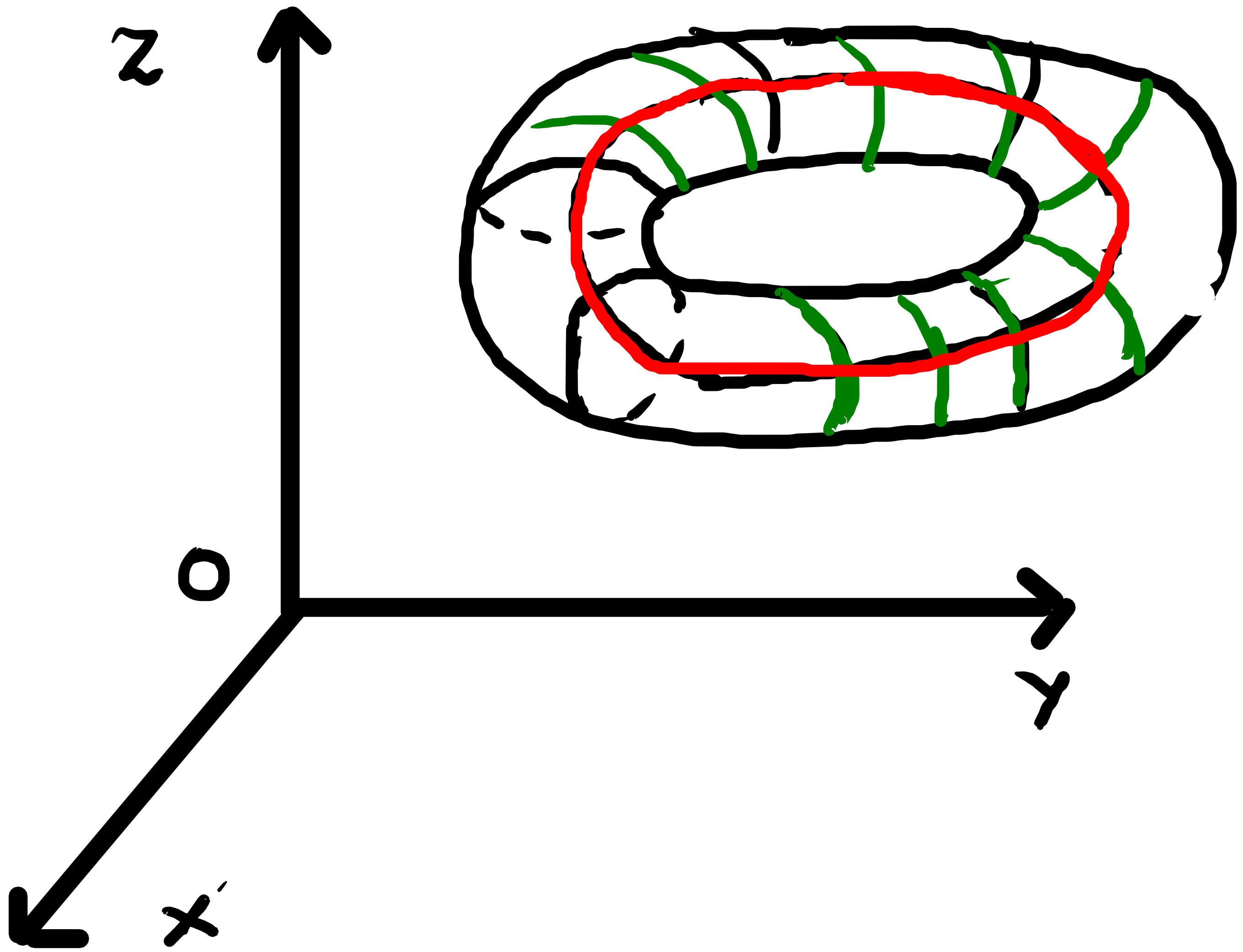
(ii) Αν εξαιρέσουμε μια ευθεία ή έναν κύκλο από τον $\mathbb{R}^3$, προκύπτει χωρίο μη απλώς συνεκτικό.



Το γ* δεν μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο χωρίς να "κόψει" την ευθεία (ε).

(iii) Κάθε ανοικτό κυρτό είναι απλώς συνεκτικό.

(iv) Η "σαμπρέλα" **δεν** είναι απλώς συνεκτικό



Θεώρημα 2.10: Έστω $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά συνεκτικό κ' $\vec{F} : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο κλάσης C^1. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\vec{F}$ συντηρητικό στο $\underline{\Omega}$

(ii) $\vec{F}$ αστρόβιλο (δηλ. $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$) στο $\underline{\Omega}$

(iii) Το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

Σχόλιο:

→ Η (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ισχύει για $\underline{\Omega}$ ανοικτό συνεκτικό (όχι κατ' ανάγκη απλώς συνεκτικό).

→ Η (i) $\Rightarrow$ (ii) ισχύει για τυχαίο ανοικτό $\underline{\Omega}$.

Δηλ. η υπόθεση "απλά συνεκτικό" χρειάζεται μόνο για την (ii) $\Rightarrow$ (i).

Παράδειγμα: Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$P = yz^2\cos(xy) + 2xy, \quad Q = xz^2\cos(xy) + x^2 + z, \quad R = 2z\sin(xy) + y + 2z.$$

(i) Να δ.ο. $\vec{F}$ συντηρητικό.

(ii) Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για την $\vec{F}$.

(iii) Να υπολογίσετε το $\int_{\overrightarrow{K\Lambda}} \vec{F}$, όπου $K(1,1,0)$, $\Lambda(1,2,1)$.

Λύση:

(i)

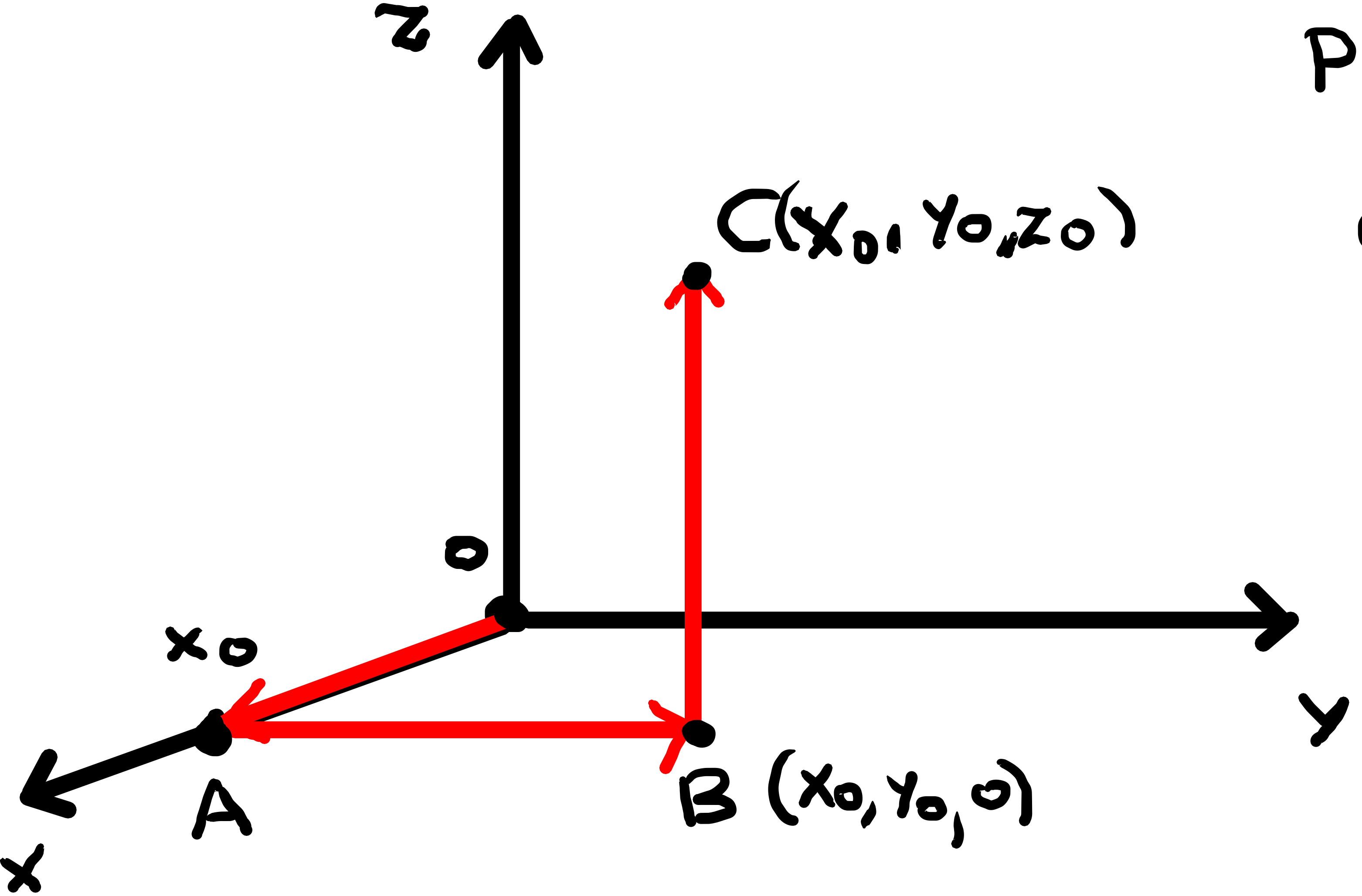
$$\left.\begin{aligned} P_y &= z^2\left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right] + 2x, \\ Q_x &= z^2\left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right] + 2x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underline{P_y = Q_x}.$$

$$\left.\begin{aligned} P_z &= 2zy\cos(xy) \\ R_x &= 2zy\cos(xy) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \underline{P_z = R_x}.$$

$$\left.\begin{aligned} Q_z &= 2xz\cos(xy)+1 \\ R_y &= 2xz\cos(xy)+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \underline{Q_z = R_y}$$

Έπεται ότι $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

<u>(ii)</u> Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $\gamma = OABC$, όπου $A(x_0, 0, 0)$, $B(x_0, y_0, 0)$, $C(x_0, y_0, z_0)$.



$$P = yz^2\cos(xy) + 2xy,$$

$$Q = xz^2\cos(xy) + x^2 + z,$$

$$R = 2z\sin(xy) + y + 2z.$$

• Είναι $P = Q = R = 0$ στο $\vec{OA}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} \vec{F} = 0.$$

• Για $(x, y, z) \in \vec{AB}$ έχουμε

$z = 0$, $x = x_0 \Rightarrow dx = 0$

κ' $Q(x_0, y, 0) = x_0^2$, $R(x_0, y, 0) = 0$, $0 \leq y \leq y_0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} x_0^2\, dy = x_0^2 y_0.$$

• Για $(x,y,z)\in\overrightarrow{BC}$, έχουμε $x=x_0$, $y=y_0 \Rightarrow dx=dy=0$ κ'

$0\le z\le z_0$, οπότε

$$\int_{\overrightarrow{BC}}\vec{F} = \int_0^{z_0}\left[2z\sin(x_0y_0)+y_0+2z\right]dz = \underline{z_0^2\left[\sin(x_0y_0)+1\right]+}$$

$$\underline{+\,y_0z_0}\,.$$

Άρα, $\int_\gamma \vec{F} = 0 + x_0^2y_0 + z_0^2\left[\sin(x_0y_0)+1\right]+y_0z_0$

$\Rightarrow$ μια συνάρτηση δυναμικού είναι

$$f(x,y,z) = x^2y + z^2\left[\sin(xy)+1\right]+yz,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

(iii) $\int_{\overrightarrow{K\Lambda}}\vec{F} = f(1,2,1)-f(1,1,0) = \sin 2 + 4.$