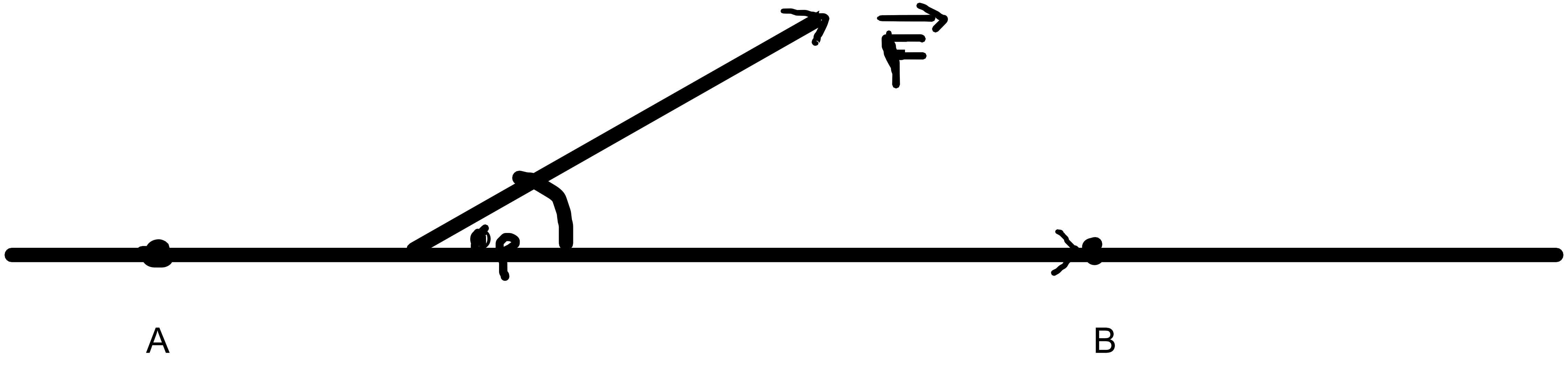
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

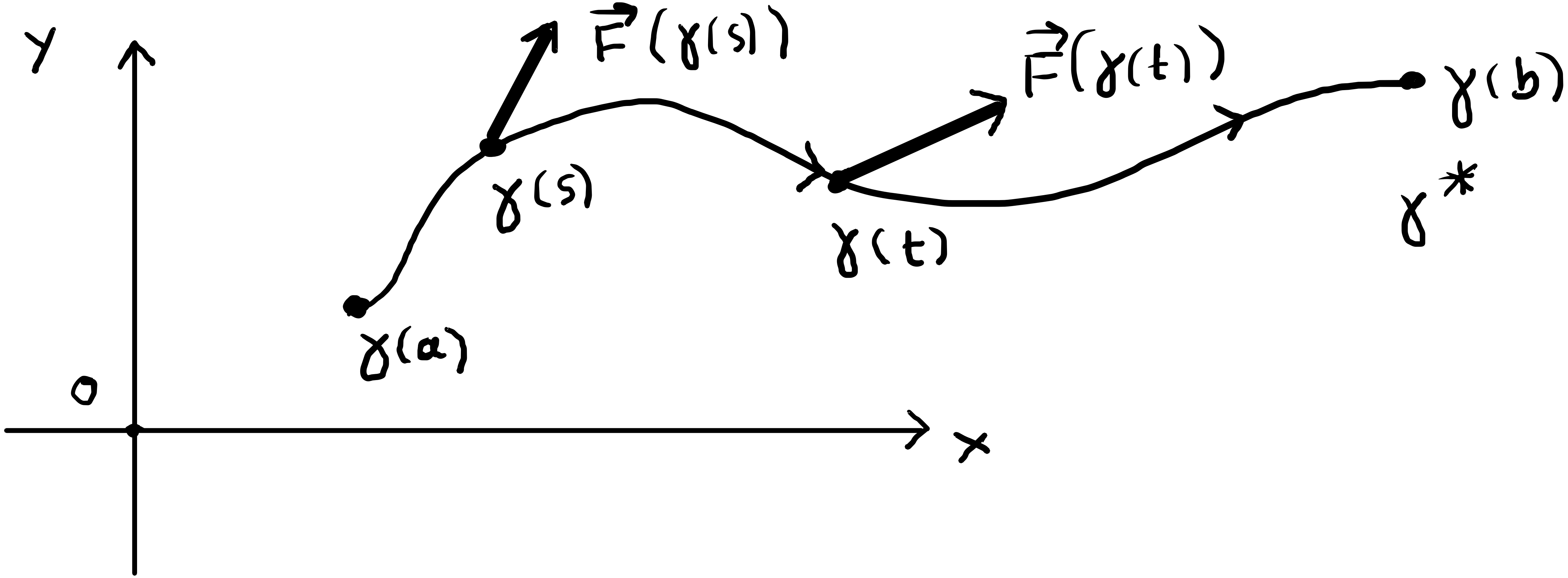
Το έργο W που παράγεται κατά την ευθύγραμμη μετακίνηση υλικού σημείου από το σημείο A στο B υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{AB}$ ισούται με

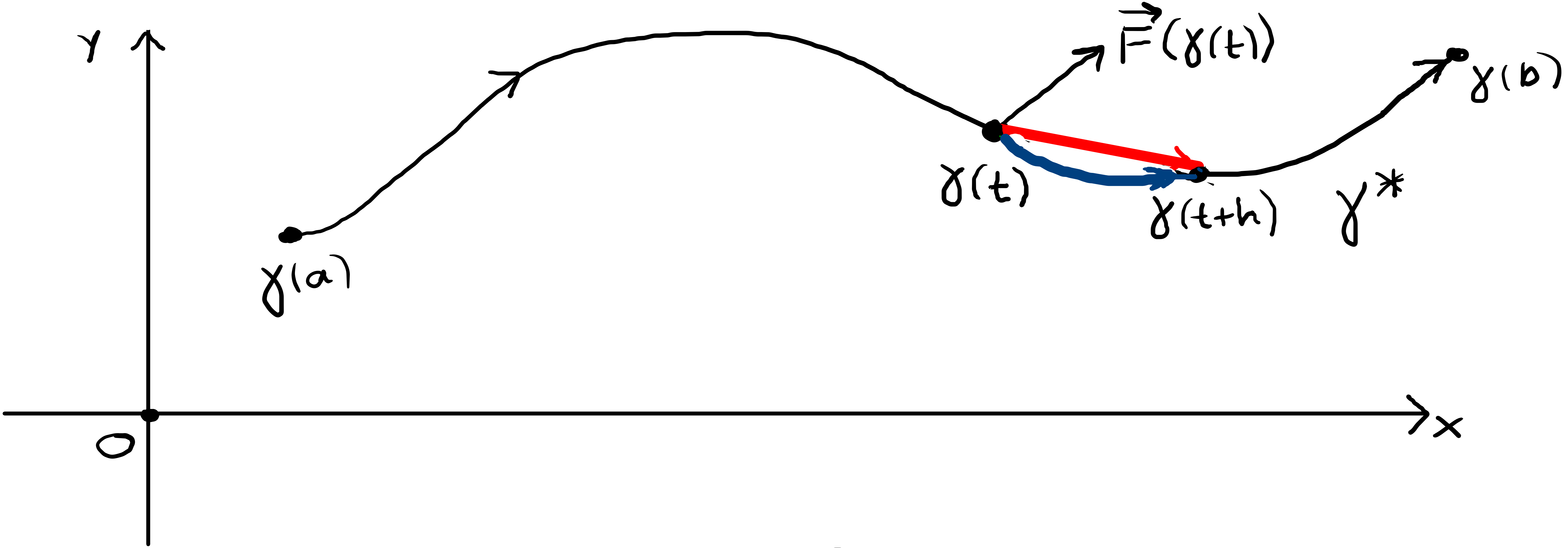
$$W = \|\vec{F}\| \, \|\vec{AB}\| \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$



Θεωρούμε λεία καμπύλη γ: [α, b] $\to \mathbb{R}^2$ και συνεχή διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}=(P, Q): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ την οποία εκλαμβάνουμε σαν δύναμη μεταβαλλόμενη ως προς μέτρο και κατεύθυνση.

Υποθέτουμε ότι υλικό σημείο κινείται πάνω στο γ* υπό την επίδραση της $\vec{F}$ ξεκινώντας από το σημείο γ(α) και τη χρονική στιγμή t φτάνει στο σημείο γ(t). Το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση το συμβολίζουμε με W(t).





Για πολύ μικρό h, έχουμε ότι $t+h \cong t$ και λόγω συνέχειας της γ, έχουμε $\gamma(t+h) \cong \gamma(t)$.

Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τόξο της καμπύλης από το γ(t) στο γ(t+h) είναι ίσο περίπου με το διάνυσμα που ορίζουν, δηλ. με το $\gamma(t+h) - \gamma(t)$.

Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή κατά την μετακίνηση από το γ(t) στο γ(t+h).

Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση από το γ(t) στο γ(t+h), ισούται με τη διαφορά

$$W(t+h) - W(t)$$

και ταυτόχρονα ισούται περίπου με

$$F(\gamma(t)) \bullet [\, \gamma(t+h) - \gamma(t) \,].$$

Επομένως, το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση από το γ(t) στο γ(t+h) ισούται περίπου με

$$\vec{F}(\gamma(t)) \bullet [\, \gamma(t+h) - \gamma(t) \,].$$

Ταυτόχρονα, το ίδιο έργο ισούται με

$$W(t+h) - W(t),$$

όπου

W(t) το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση από το γ(α) στο γ(t),

W(t+h) το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση από το γ(α) στο γ(t+h).

Άρα,

$$\vec{F}(\gamma(t)) \bullet [\, \gamma(t+h) - \gamma(t) \,] \cong W(t+h) - W(t) \,.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με h και περνώντας στο όριο καθώς $h \to 0$, παίρνουμε

$$\vec{F}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) \;\; \equiv \;\; W'(t) \,, \quad \text{για όλα τα } t \text{ στο } [\alpha, b].$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη από α έως b και με βάση το Θ.Θ. Ολοκλ. Λογισμού, παίρνουμε

$$\int_{\alpha}^{b} \vec{F}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, dt \cong W(b) - W(\alpha) = W(b) \quad (\text{σημ. ότι } W(\alpha)=0\ !)$$

και W(b) είναι το συνολικό έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση από το γ(α) στο γ(b).

Με κίνητρο τα παραπάνω δίνουμε τον παρακάτω Ορισμό:

Ορισμός 1: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση και $\gamma: [\alpha, b] \to \Omega$ λεία καμπύλη. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ πάνω στην γ ισούται με

$$\int_{\alpha}^{b} \vec{F}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, dt .$$

Συμβολισμός: $\int_\gamma \vec{F} \bullet d\gamma$

Εάν $\vec{F} = (P, Q)$ και $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, b]$, τότε με βάση τον ορισμό έχουμε

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet d\gamma = \int_\alpha^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)\, dt + \int_\alpha^b Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) dt = \int_\gamma (P\, dx + Q\, dy),$$

όπου θέσαμε

$$\int_\gamma P\, dx = \int_\alpha^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)\, dt, \qquad \int_\gamma Q\, dy = \int_\alpha^b Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\, dt.$$

Για να έχει νόημα ο Ορισμός 1, θα πρέπει η τιμή του ολοκληρώματος να είναι ανεξάρτητη από την επιλεγείσα αναπαραμέτρηση της λείας καμπύλης γ.

Ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 2: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση,

$\gamma: [a, b] \to \Omega$ λεία καμπύλη και $\varphi : [c, d] \to [a,b]$ C^1-συνάρτηση επί με $\varphi' > 0$. Θεωρούμε την καμπύλη $\delta = \gamma \circ \varphi$. Τότε,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_c^d \vec{F}(\delta(t)) \cdot \delta'(t)\, dt.$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η δ είναι επίσης λεία με $\delta'(s) = \varphi'(s)\, \gamma'(\varphi(s))$, $s \in [c, d]$ οπότε

$$\int_c^d \vec{F}(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\, ds = \int_c^d \varphi'(s)\, \vec{F}(\gamma(\varphi(s))) \cdot \gamma'(\varphi(s))\, ds = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt .$$

(στο 2ο ολοκλήρωμα κάναμε την αντικατάσταση $t=\varphi(s)$.) $\boxtimes$

Ορισμός 2: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση και

$\gamma: [\alpha, b] \longrightarrow \Omega$ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ λείες καμπύλες. Τότε,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \vec{F} \bullet d\gamma_k \, .$$

Παραδείγματα:

(i) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy$, όπου γ είναι:

(α) το $\overrightarrow{AB}$, A(2, 1), B(0,1).

(β) το θετικά προσανατολισμένο ημικύκλιο κέντρου (1,1), ακτίνας 1 που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.

(α) Μια παραμέτρηση του $\overrightarrow{AB}$ είναι

$$\gamma(t) = (1-t)(2,1) + t(0,1) = (\underbrace{2-2t}_{x(t)}, \underbrace{1}_{y(t)}), \qquad t \in [0,1].$$

Επομένως,

$$\int_\gamma y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^1 \left[1^2 \cdot x'(t) - (2-2t)^2 y'(t)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[-2 - (2-2t)^2 \cdot 0\right] dt = -2.$$

(β) Μια παραμέτρηση του ημικυκλίου είναι

$$x(t) = 1+\cos t, \quad y(t) = 1+\sin t, \quad t\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma y^2dx - x^2dy = \int_0^\pi \left[y(t)^2 x'(t) - x(t)^2 y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_0^\pi \Big[\underbrace{(1+\sin t)^2(-\sin t)-(1+\cos t)^2\cos t}_{g(t)}\Big]dt$$

$$g(t) = -\sin t(1+\sin^2 t+2\sin t) - \cos t(1+\cos^2 t + 2\cos t)$$

$$= -\sin t - \sin^3 t - \cos t - \cos^3 t - 2.$$

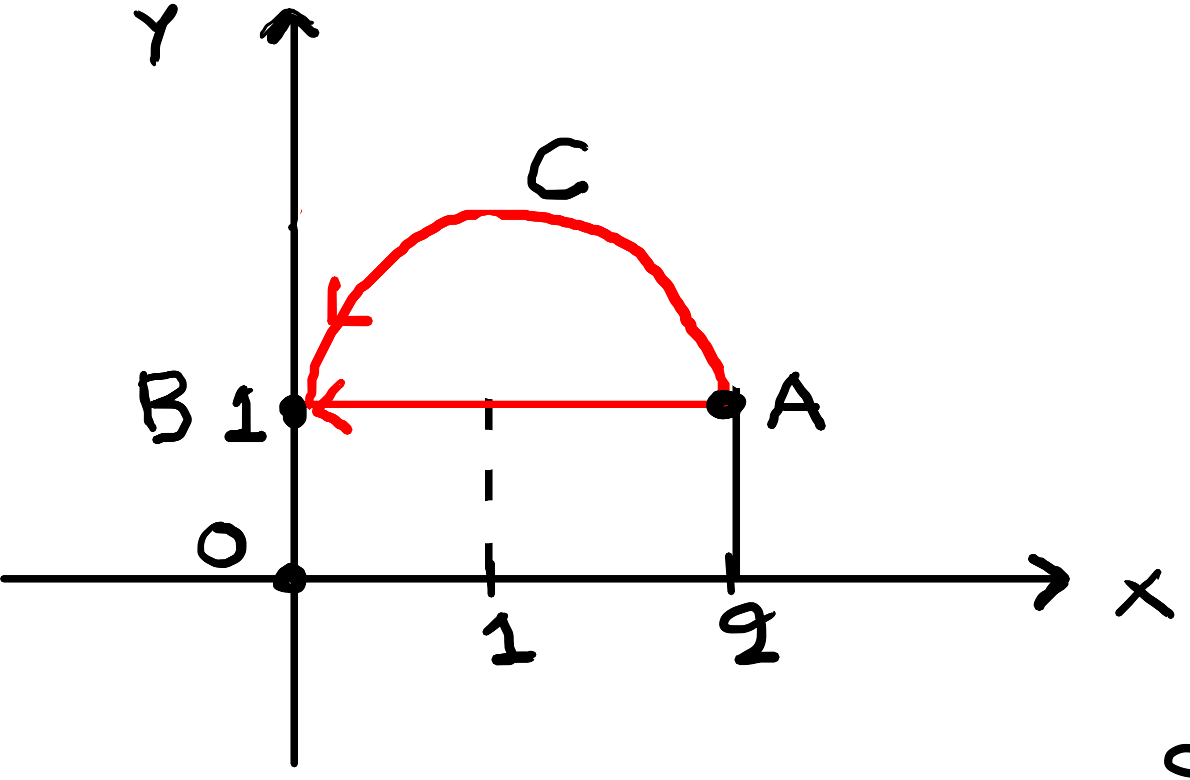
Έχουμε $\int_0^\pi \sin t\, dt = 2$, $\quad \int_0^\pi \cos t\, dt = 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos^3 t\,dt \overset{s=t-\pi/2}{=\!=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}+s\right) ds = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 s\,ds = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t\,dt = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) \overset{u=\cos t}{=\!=} -\int_1^{-1} (1-u^2)\,du =$$

$$= 2\int_0^1 (1-u^2)\,du = 2\left(1-1/3\right) = 4/3$$

$\Longrightarrow$ το επικ. ολοκλ. γράφεται $-2-4/3-2\pi = -\frac{10}{3}-2\pi.$



<u>Σχόλιο:</u>

Εάν $\vec{F} = (y^2, -x^2)$, τότε το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ πάνω στις C, $\overrightarrow{AB}$ έχει διαφορετικές τιμές

δηλ. η τιμή του ολοκλ. <u>εξαρτάται</u> από το "μονοπάτι" που συνδέει τα A, B.

(ii)! $\displaystyle\int_{\gamma_R} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \right) = ?$

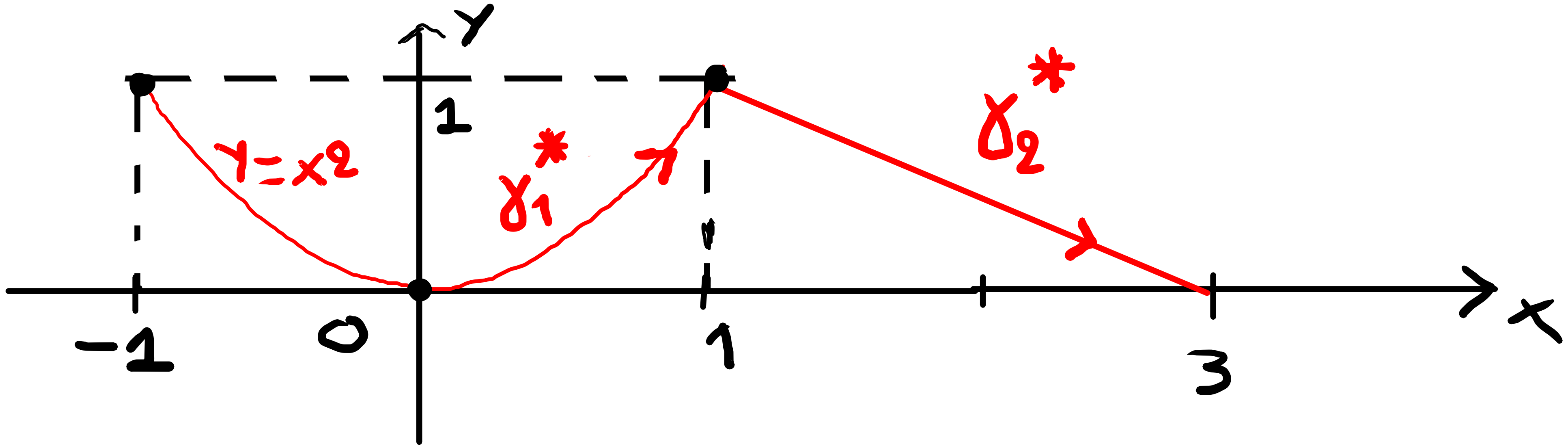
όταν γ_R ο θετικά προσαν. κύκλος κέντρου $(0,0)$ κ' ακτίνας $R>0$.

γ_R : $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Το ολοκλ. γράφεται $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\frac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2} R\cos t \right] dt$

$= 2\pi$.

(iii) $\int_{\gamma} xy\,dx + y^2\,dy = ?$ όπου η γ έχει το ίχνος του σχήματος



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\quad \gamma_1(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$

$\gamma_2(t) = (1-t)(1,1) + t(3,0) = (1+2t,\ 1-t)$, $t \in [0,1]$

γ_1, γ_2 λείες $\Longrightarrow$ γ τμημ. λεία

$\gamma_1 : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t^2 \end{cases}$, $t \in [-1,1]$, $\quad \gamma_2 : \begin{cases} x = x(t) = 1+2t \\ y = y(t) = 1-t, \end{cases}$ $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} (xy\,dx + y^2\,dy) = \int_{-1}^{1} \left[x(t)y(t)x'(t) + y(t)^2 y'(t) \right] \cdot dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(t \cdot \underbrace{t^2 \cdot 1 + t^4 \cdot 2t}_{\text{περιττή}} \Big)\, dt = 0,$$

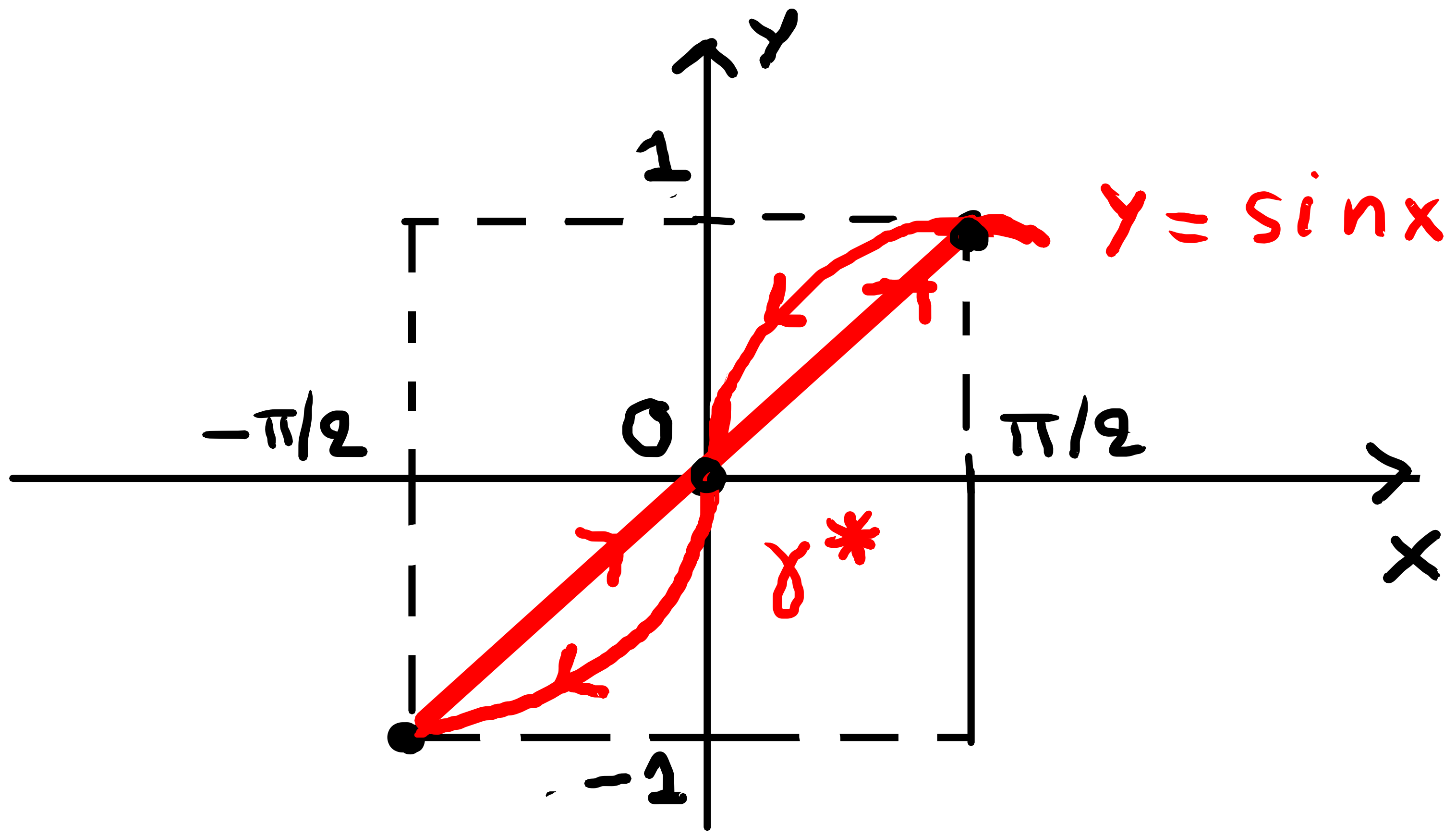
$$\int_{\gamma_2} (xy\,dx + y^2\,dy) = \int_{0}^{1} \left[x(t)y(t)x'(t) + y(t)^2 y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_{0}^{1} \left[(1+2t)(1-t) \cdot 2 + (1-t)^2 (-1) \right] dt$$

$$= \dots$$ κλπ

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \left(y^2\,dx - 2\,dy\right) = ?$, όπου γ η κλειστή καμπύλη με

ίχνος όπως στο σχήμα



$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$

$\gamma_1(t) = (1-t)\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) + t\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$= (2t-1)\left(\frac{\pi}{2}, 1\right),$

$t \in [0, 1]$

$\gamma_2(t) = (t, \sin t),$

$t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\bullet \int_{\gamma_1} y^2\,dx - 2\,dy = \int_0^1 \left[(2t-1)^2 \pi - 2\cdot 2 \right] dt =$$

$$= \pi \int_0^1 (2t-1)^2\,dt - 4 = \frac{\pi}{6} (2t-1)^3 \Big|_0^1 - 4$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[1^3 - (-1)^3 \right] - 4 = \underline{\frac{\pi}{3} - 4}$$

$$\bullet \int_{\gamma_2} y^2\,dx - 2\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^2 t \cdot 1 - 2\cos t \right) dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \quad - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi - \frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad - 2\sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\frac{\pi}{2} - 4}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma y^2 dx - 2\,dy \;=\; \frac{\pi}{3} - 4 - \left(\frac{\pi}{2} - 4\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\pi/6}}$$

Ιδιότητες:

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ συνεχείς κ' $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ τμηματικά λείες καμπύλες, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $$\int_{\gamma_1} (\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) = \lambda \int_{\gamma_1} \vec{F} + \mu \int_{\gamma_1} \vec{G}.$$

(ii) Αν γ_1, γ_2 διαδοχικές, τότε

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

(iii) $$\int_{-\gamma_1} \vec{F} = - \int_{\gamma_1} \vec{F}.$$

Ολοκλ. ανεξάρτητα του δρόμου.

Για το απλό ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ κλάσης C^1 (δηλ. συνεχώς παραγωγίσιμη), τότε $\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$.

Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται στα επικαμπύλια ολοκλ.

Πρόταση 3: Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ κλάσης C^1 (δηλ. έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f_x, f_y) κ' $\gamma:[a,b]\to\Omega$ τμημ. λεία καμπύλη. Τότε,

$$\int_\gamma \nabla f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Απόδειξη:

• Υποθέτουμε αρχικά ότι γ λεία. Τότε,

$$\int_\gamma \nabla f = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

• Έστω γ τμημ. λεία με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες. Τότε, $\gamma_k(b) = \gamma_{k+1}(a)$, $1 \leq k \leq n-1$ &

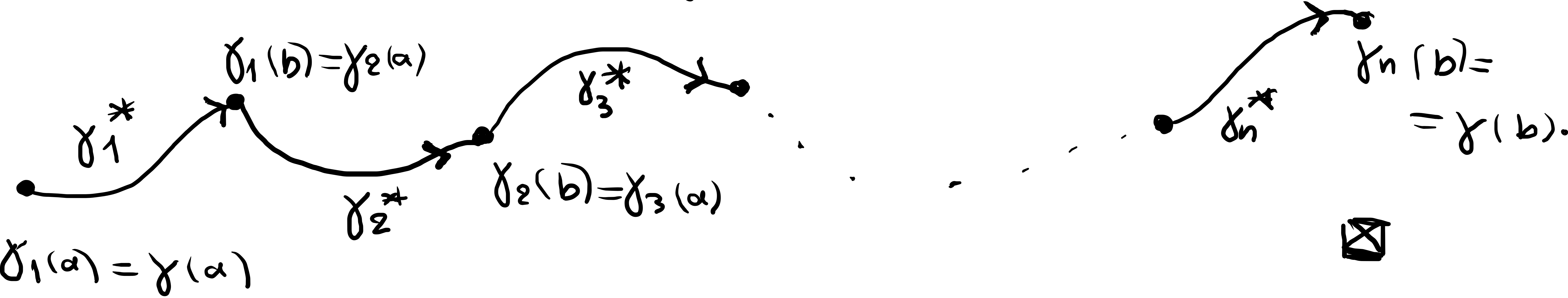
$$\int_\gamma \nabla f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \nabla f = \sum_{k=1}^{n}\left[f(\gamma_k(b)) - f(\gamma_k(a))\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(\gamma_{k+1}(a)) - f(\gamma_k(a))\right] + f(\gamma_n(b)) - f(\gamma_n(a)) =$$

$$= \cancel{f(\gamma_n(a))} - f(\gamma_1(a)) + f(\gamma_n(b)) - \cancel{f(\gamma_n(a))}$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Σημ. ότι $\gamma(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma(b) = \gamma_n(b)$.



Πόρισμα 4: Έστω $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 κ' γ κλειστή, τμημ. λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset \underline{\Omega}$. Τότε, $\int_\gamma \nabla f = 0$.

Σχόλιο: Εάν $\vec{F} : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ C^1 διαν. συνάρτ. κ' γ κλειστή τμ. λεία με $\gamma^* \subset \underline{\Omega}$, δεν έπεται γενικά ότι $\int_\gamma \vec{F} = 0$.

π.χ. $\underline{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\vec{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2} , \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$,

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma^* \subset \underline{\Omega}$.

Έχουμε δείξει ότι $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\nexists f : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$ στο $\underline{\Omega}$.

Μια διαν. συνάρτηση $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ονομάζεται κ' **διανυσματικό πεδίο**.

Εάν $\vec{F} = \nabla f$, για κάποια $f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1, το $\vec{F}$ λέγεται **αστρόβιλο ή συντηρητικό** κ' το f λέγεται **συνάρτηση δυναμικού**.

Συνεπώς, αν $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο κ' γ κλειστή, τμημ. λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset \Omega$, τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

Πόρισμα 5 (ολοκλ. ανεξάρτητο του δρόμου): Εάν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο κ' $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμημ. λείες καμπύλες με κοινά άκρα (αρχή κ' πέρας) ώστε $\gamma^*, \tilde{\gamma}^* \subset \Omega$, τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

Απόδειξη: $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$.

Υποθέτουμε ότι $\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to \Omega$ με $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$.
Έχουμε

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\gamma \nabla f \overset{(\text{Πρότ. }3)}{=\!=} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(\tilde{\gamma}(b)) - f(\tilde{\gamma}(a)) \overset{(\text{Πρότ. }3)}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \nabla f = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

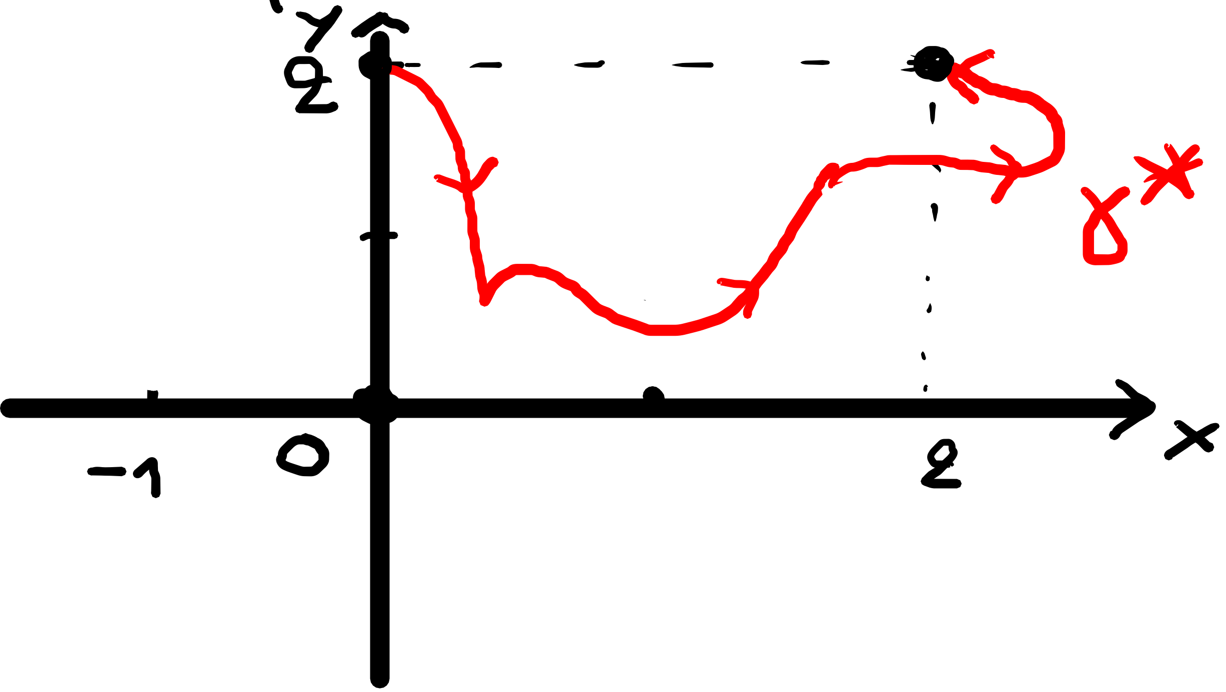
$\boxtimes$

Παράδειγμα: Θέτουμε

$$\Omega = \{(x,y) : y > 0\}, \quad \vec{F} = (P, Q) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) : \Omega \to \mathbb{R}^2.$$

(i) Να προσδιορίσετε $f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 ώστε $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω.

(ii) Να υπολογίσετε το $\int_\gamma \vec{F}$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος:



Λύση:

(i) Έστω f με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Σταθεροποιώ $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_x(t,y) = -\frac{y}{t^2+y^2} \Rightarrow \int_0^x f_x(t,y)\,dt = -y\int_0^x \frac{dt}{t^2+y^2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) - f(0,y) = -\frac{1}{y}\int_0^x \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{y}\right)^2}$$

Στο ολοκλ. θέτουμε $w = t/y \Rightarrow dw = dt/y$ κ'

για $t \in [0,x]$, έχουμε $w \in [0, x/y]$ (σημ. $\underline{\underline{y>0}}$!)

$$\Rightarrow f(x,y) - f(0,y) = -\int_0^{x/y} \frac{dw}{1+w^2} = -\mathrm{Arctan}(x/y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = -\operatorname{Arctan}(x/y) + c(y), \quad c(y) = f(0,y).$$

Η τελευταία ισχύει $\forall (x,y) \in \underline{\Omega}$, οπότε

$$f_y(x,y) = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + c'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(y)$$

$$\Rightarrow \quad Q(x,y) = Q(x,y) + c'(y) \quad \Rightarrow \quad c'(y) = 0, \ \forall y>0$$

$$\Rightarrow \quad c(y) = c_1 \in \mathbb{R}, \ \forall y>0$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + c_1, \quad \forall (x,y) \in \underline{\Omega}.$$

Για $c_1 = 0$, η $f(x,y) = -\operatorname{Arctan}(x/y)$, $(x,y) \in \underline{\Omega}$,

είναι μια συνάρτηση με $\nabla f = \vec{F}$, στο $\underline{\Omega}$.

<u>(ii)</u> Λόγω της Πρότ. 3, επειδή $\gamma^* \subset \Omega$ κ' γ τμημ. λεία,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\gamma \nabla f = f(2,2) - f(0,2) = -\operatorname{Arctan} 1 = -\pi/4.$$

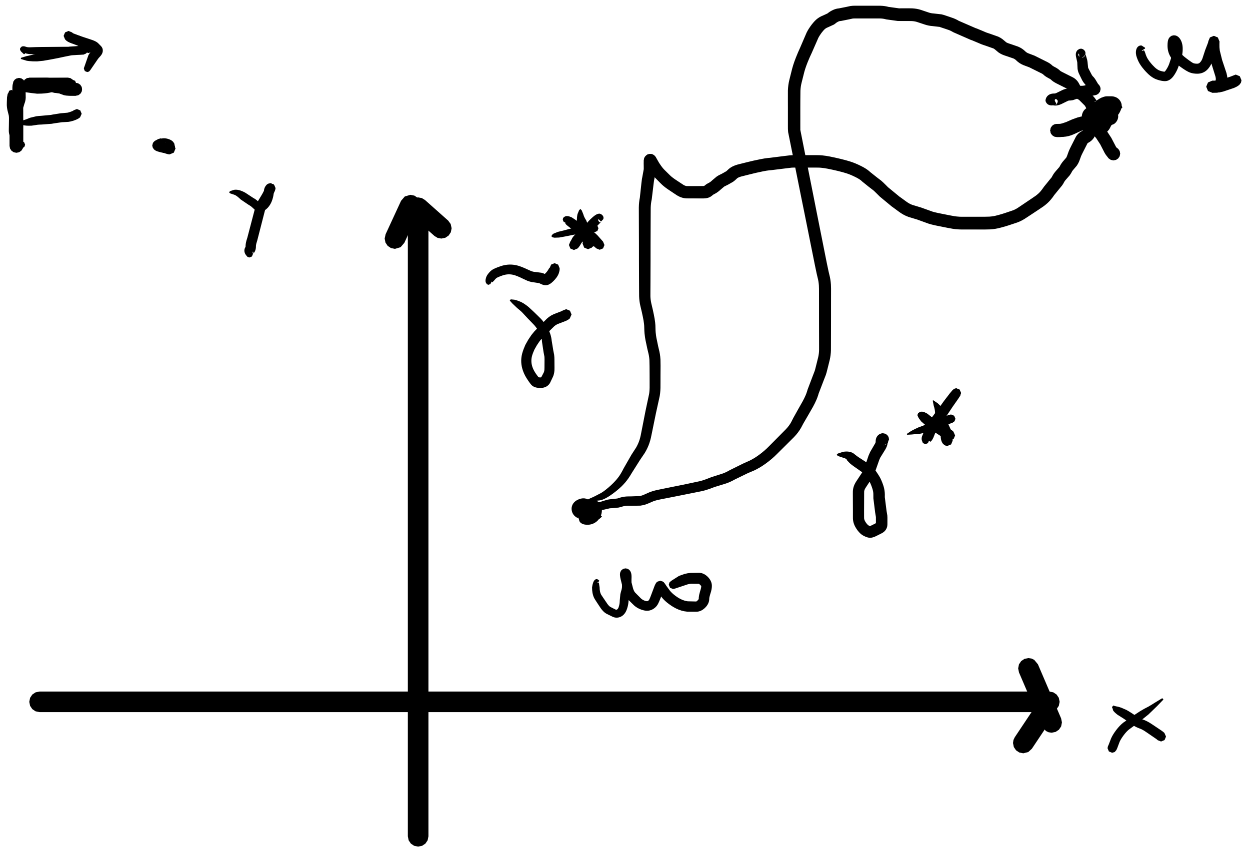
Σημ. ότι το πεδίο $\vec{F}$ <u>δεν</u> είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Αποδεικνύεται ότι για Ω ανοικτό <u>συνεκτικό</u>, ισχύει κ' το αντίστροφο του Πορίσματος 5.

<u>Υπενθύμιση:</u> Ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>συνεκτικό</u> αν $\forall\ u_0, u_1 \in \Omega$, $\exists$ τεθλασμένη γραμμή Γ που συνδέει τα u_0, u_1 κ' $\Gamma^* \subset \Omega$.

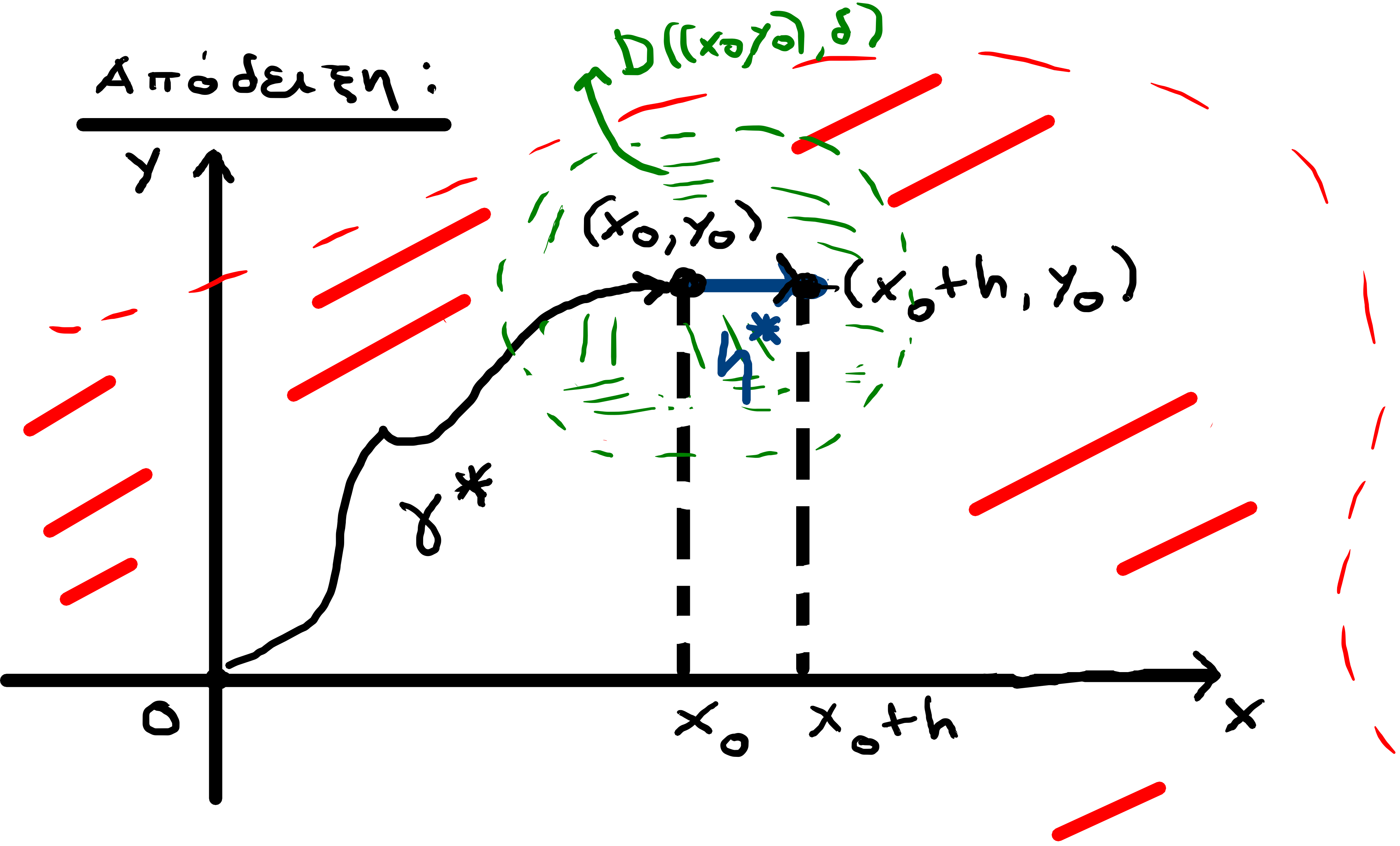
Θεώρημα 6: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό συνεκτικό κ' $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ συνεχές πεδίο τέτοιο ώστε το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου, δηλ. αν $u_0, u_1 \in \Omega$ κ' $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμημ. λείες καμπύλες με $\gamma^*, \tilde{\gamma}^* \subset \Omega$ κ' κοινά άκρα u_0, u_1, τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$



Τότε, $\vec{F}$ συντηρητικό.

Απόδειξη:



- Υποθέτουμε ότι $(0,0) \in \Omega$.

$\forall (x,y) \in \Omega$, επιλέγω την ημ. λεία καμπύλη γ που συνδέει τα $(0,0)$, (x,y) με γ^* οπότε θέτουμε

$$f(x,y) = \int_\gamma \vec{F} \cdot$$

Η f είναι καλώς ορισμένη διότι το $\int_\gamma \vec{F}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης γ που συνδέει τα $(0,0)$, (x,y).

Θα δ.ο. $f_x(x,y) = P(x,y)$, $f_y(x,y) = Q(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$

Έστω $(x_0,y_0) \in \Omega \xRightarrow{[\Omega \text{ ανοικτό}]} \exists \delta > 0 \mid D((x_0,y_0),\delta) \subset \Omega$.

Επιλέγουμε $h \in \mathbb{R}$ με $|h| < \delta$.

Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη με άκρα $(0,0)$, (x_0,y_0) ώστε $\gamma^* \subset \Omega$ κ' η το ευθ. τμήμα με αρχή το (x_0,y_0) κ' πέρας το (x_0+h, y_0). Τότε $\eta^* \subset D((x_0,y_0),\delta) \subset \Omega$.

Θέτουμε $\Gamma = \gamma + \eta \Rightarrow \Gamma^* = \gamma^* \cup \eta^* \subset \Omega$ κ' η Γ συνδέει τα $(0,0)$, (x_0+h, y_0).

Εξ' ορισμού της f έχουμε

$$f(x_0+h, y_0) = \int_{\Gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\eta} \vec{F} = f(x_0, y_0) + \int_{\eta} \vec{F}$$

$$\Rightarrow f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_{\eta} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0)\,dx$$

(σημ. ότι για $(x,y) \in \eta^*$, έχουμε $x_0 \le x \le x_0+h$, $y = y_0$)

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0)\,dx \xrightarrow{h \to 0}$$

$$\longrightarrow P(x_0, y_0)$$

(γιατί;)

$$\Rightarrow \boxed{f_x(x_0, y_0) = P(x_0, y_0).}$$

Όμοια, $\boxed{f_y(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0).}$

Άρα, $\nabla f = \vec{F}$, στο $\underline{\Omega}$.

- Στη γενική περίπτωση, επιλέγουμε $(x_1, y_1) \in \underline{\Omega}$ κ' εφαρμόζουμε το παραπάνω για το

$$\underline{\Omega}' = \{ (x - x_1, y - y_1) : (x, y) \in \underline{\Omega} \}$$

κ' για το πεδίο $\vec{G} : \Omega' \to \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{G}(t,s) = \vec{F}(t+x_1, s+y_1), \forall (t,s) \in \Omega'.$$

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα 7:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο κ' $(x_1, y_1) \in \Omega$.
$\forall (x,y) \in \Omega$, θέτουμε

$$f(x,y) = \int_\gamma \vec{F},$$

όπου γ τυχαία καμπύλη του Ω με άκρα (x_1,y_1), (x,y).
Τότε,

$$\nabla f = \vec{F}, \quad \text{στο } \Omega.$$

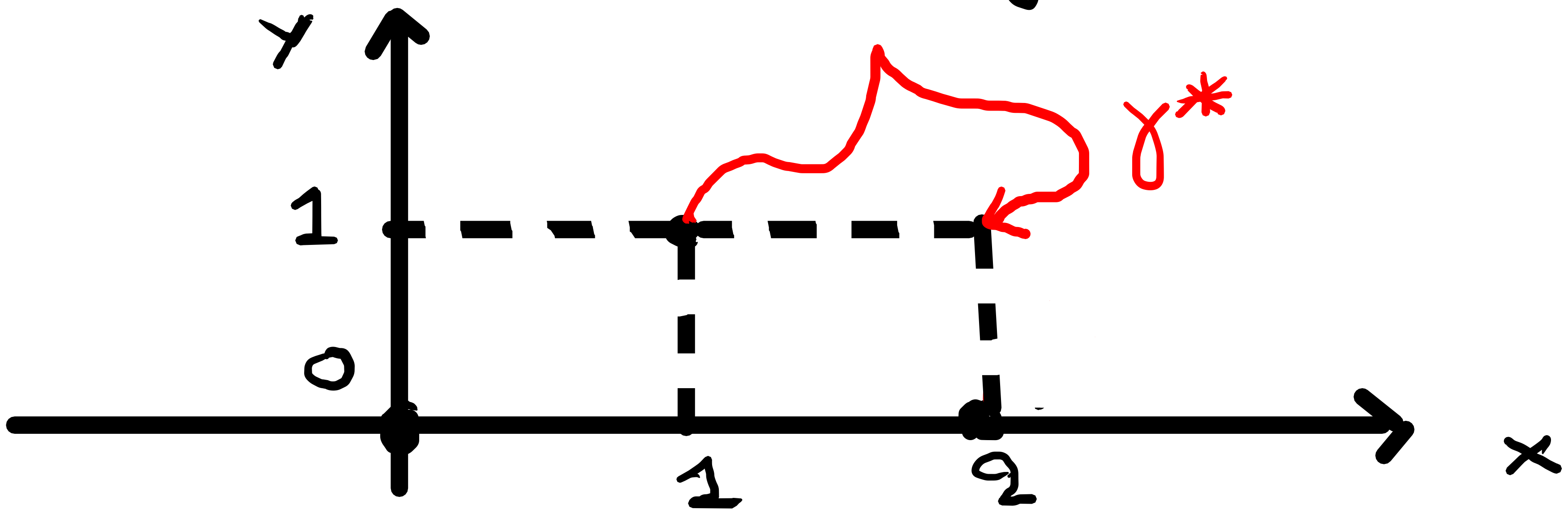
Παράδειγμα: Δίνεται το χωρίο $\Omega = \{(x,y) : x>0,\ y>0\}$ κι το διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ με

$$P(x,y) = \frac{1}{xy} + x^2 + y^2, \qquad Q(x,y) = -\frac{\ln x}{y^2} + 2xy + y^2.$$

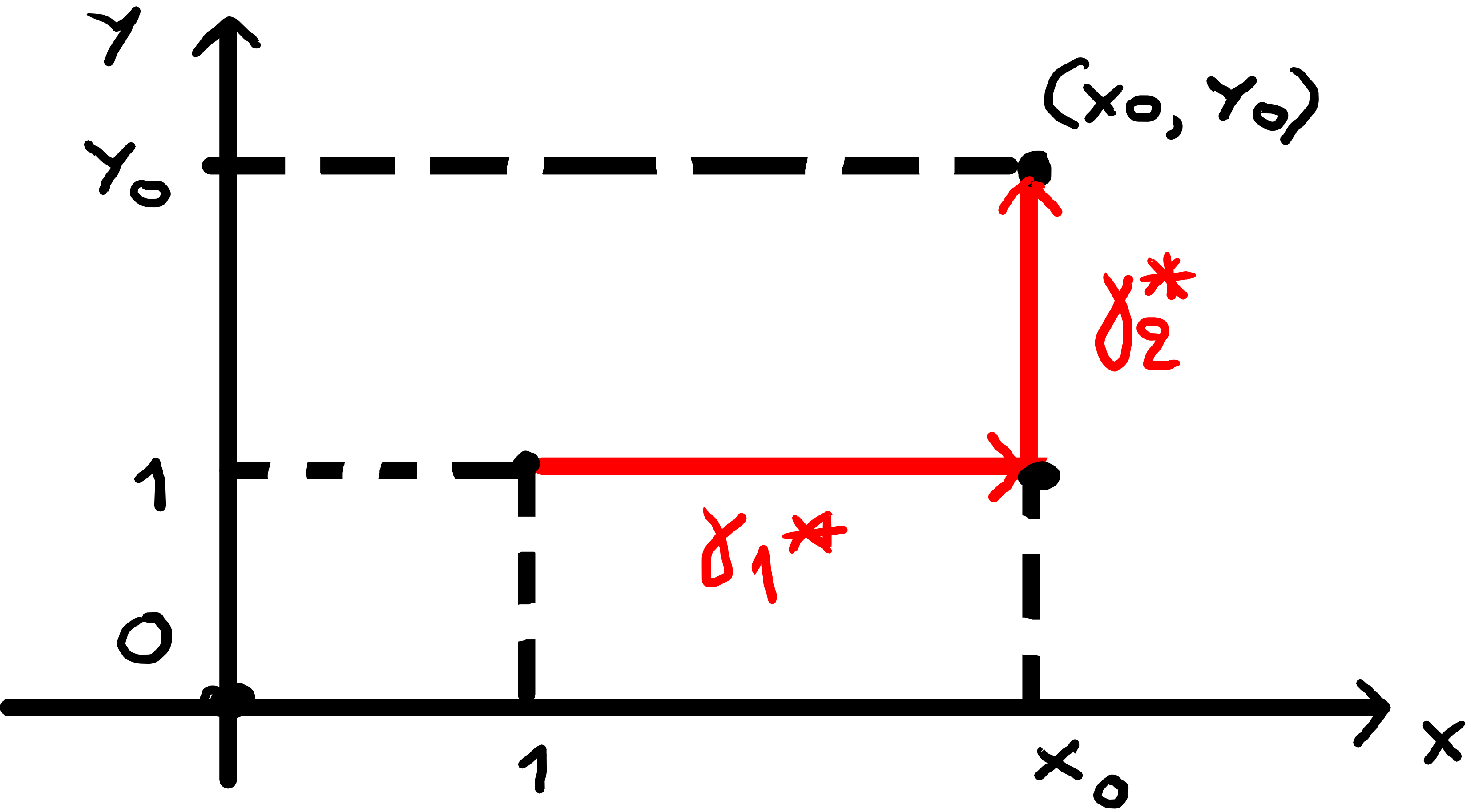
Δίνεται ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(i) Να βρείτε $f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\nabla f = \vec{F}$ στο Ω.

(ii) Να βρείτε το $\int_\gamma \vec{F}$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος.



<u>Λύση:</u> <u>(i)</u>



Έστω $(x_0, y_0) \in \Omega$ κι'

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου

→ γ_1 το ευθ. τμήμα με άκρα $(1,1)$, $(x_0,1)$.

→ γ_2 το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_0,1)$, (x_0,y_0).

Έχουμε $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_1^{x_0} P(x,1)\,dx + \int_1^{y_0} Q(x_0,y)\,dy$

$$= \int_1^{x_0} \left(\frac{1}{x} + x^2 + 1\right) dx + \int_1^{y_0} \left(-\frac{\ln x_0}{y^2} + 2x_0 y + y^2\right) dy$$

$$= \ln x \Big|_1^{x_0} + \frac{x^3}{3}\Big|_1^{x_0} + x_0 - 1 + \ln x_0 \cdot \frac{1}{y}\Big|_1^{y_0} + x_0 y^2 \Big|_1^{y_0} + \frac{y^3}{3}\Big|_1^{y_0}$$

$$= \ln x_0 + \frac{x_0^3 - 1}{3} + x_0 - 1 + \ln x_0 \left(\frac{1}{y_0} - 1\right) + x_0(y_0^2 - 1) + \frac{y_0^3 - 1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F} = \frac{\ln x_0}{y_0} + \frac{x_0^3 + y_0^3}{3} + x_0 y_0^2 - 4/3.$$

Θέτουμε $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{y} + \dfrac{x^3 + y^3}{3} + xy^2$. Τότε, $\nabla f = \vec{F}$, στο Ω.

(ii) $\int_\gamma \vec{F} = \int_\gamma \nabla f = f(2,1) - f(1,1) =$

$$= \frac{\ln 2}{1} + \frac{2^3+1^3}{3} + 1^2\cdot 2 - \frac{1^3+1^3}{3} - 1^2\cdot 1$$

$$= \ln 2 + \frac{10}{3}.$$

Στη συνέχεια, θα χαρακτηρίσουμε τα C^1-συντηρητικά πεδία $\vec{F} = (P, Q) : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$, για κατάλληλα χωρία $\underline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$.

Έστω $\vec{F}=(P,Q): \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο ($\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό) κλάσης C^1. Εάν $f: \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ με $\nabla f = \vec{F}$, τότε $f_x = P$, $f_y = Q$ στο $\underline{\Omega}$. Αλλά, P, Q κλάσης C^1, οπότε f κλάσης C^2 κ'

$$f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow P_y = Q_x, \text{ στο } \underline{\Omega}.$$

Μήπως η συνθήκη "$P_y = Q_x$" είναι αρκετή ώστε το $\vec{F}$ να είναι συντηρητικό;

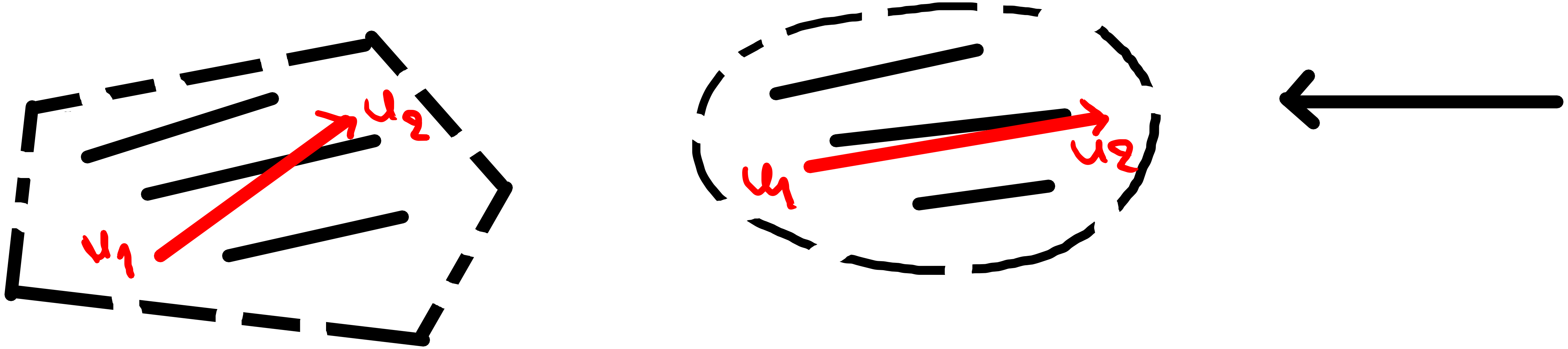
Η απάντηση είναι θετική για συγκεκριμένη κλάση χωρίων $\underline{\Omega}$.

Ορισμός 8: Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **αστερόμορφο** ανν $\exists\, u_0 \in \Omega \mid \forall u \in \Omega,\ [u_0, u] \subset \Omega$.

Παραδείγματα:

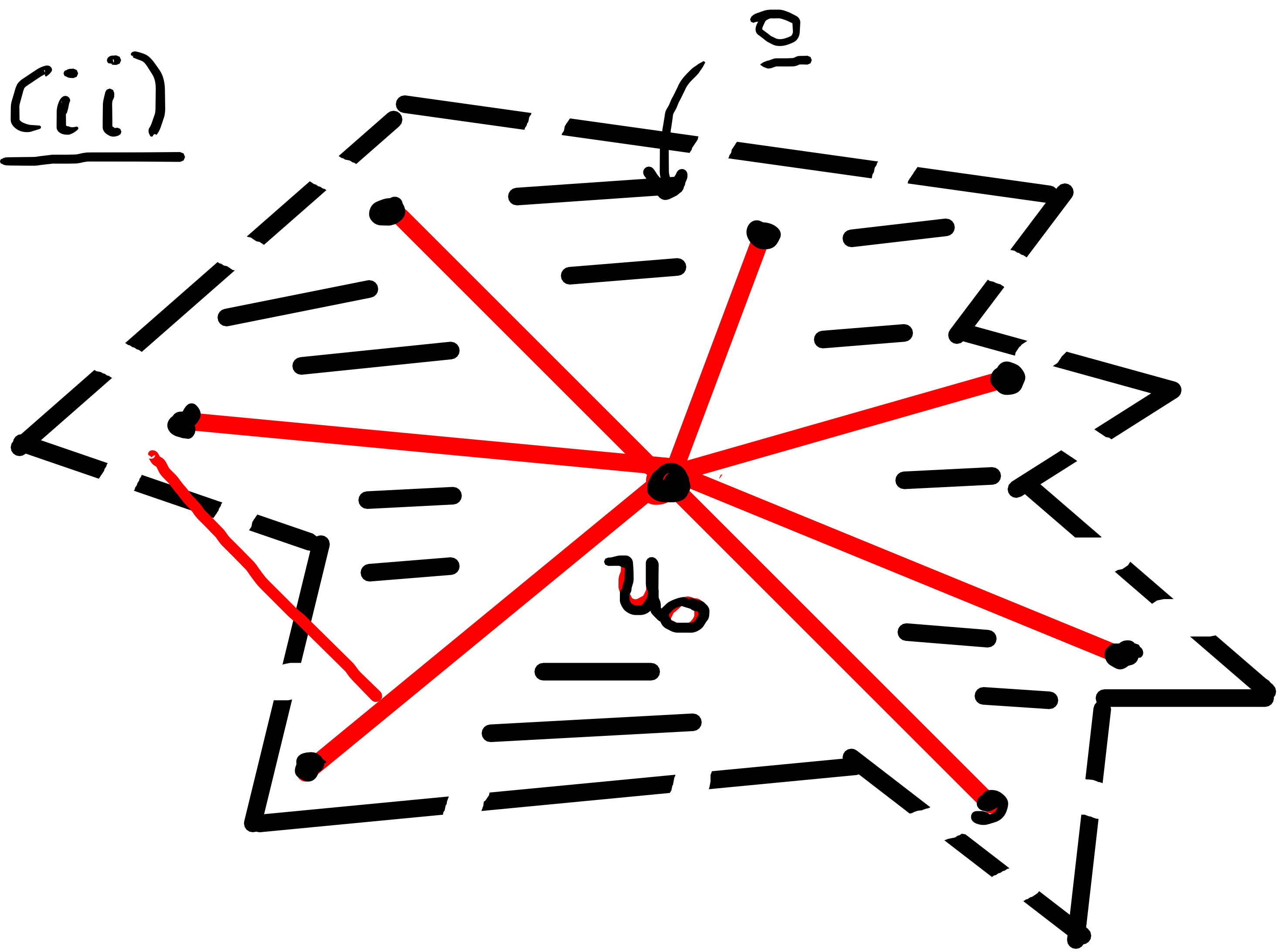
(i) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστερόμορφο.

[Το Ω είναι κυρτό ανν $\forall\, u_1, u_2 \in \Omega,\ [u_1, u_2] \subset \Omega$.]



κυρτά σύνολα

(ii)



Αστερόμορφο μη κυρτό.

Θεώρημα 9: Έστω $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό κ' αστρόμορφο κ' $\vec{F} = (P, Q) : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ C^1-διανυσμ. πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\vec{F}$ συντηρητικό, δηλ. $\exists f : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 (δηλ. με συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης ≤ 2) $\mid$ $\vec{F} = \nabla f$, στο $\underline{\Omega}$.

(ii) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, στο $\underline{\Omega}$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω (ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θ. Fubini στο διπλό ολοκλήρωμα).

Θεώρημα 10 (εναλλαγή παραγώγου - ολοκληρώματος):

Έστω $\varphi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχής, ώστε η $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ υπάρχει στο $[a, b] \times [c, d]$ κ' είναι συνεχής. Θέτουμε

$$F(x) = \int_c^d \varphi(x, t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Τότε, υπάρχει η F' στο $[a, b]$ κ'

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\, dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η φ_x είναι συνεχής στο $T = [a,b] \times [c,d]$, είναι **ομοιόμορφα συνεχής**, οπότε $\exists\, \delta > 0 \,|$ $\forall (x_1, t_1), (x_2, t_2) \in T$, αν $|x_1 - x_2| < \delta$, $|t_1 - t_2| < \delta$, τότε

$$\left| \varphi_x(x_1, t_1) - \varphi_x(x_2, t_2) \right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \,. \quad (1)$$

Έστω $x_0 \in (a,b)$ κ' $h \in \mathbb{R}$ με

$$0 < |h| < \min\{\delta, x_0 - a, b - x_0\}.$$

Τότε,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_c^d \left[\varphi(x_0+h, t) - \varphi(x_0, t) \right] dt =$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi_x(s,t)\, ds \right\} dt$$

$$\Rightarrow F(x_0+h) - F(x_0) - h \int_c^d \varphi_x(x_0,t)\, dt =$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{x_0+h} \left[\varphi_x(s,t) - \varphi_x(x_0,t) \right] ds \right\} dt \quad \overset{\text{(Fubini)}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow F(x_0+h)-F(x_0)-h\int_c^d \varphi_x(x_0,t)\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \left\{ \int_c^d \left[\varphi_x(s,t)-\varphi_x(x_0,t) \right] dt \right\} ds .$$

Εάν s μεταξύ x_0, x_0+h έχουμε $|s-x_0| \leq |h| < \delta$, οπότε λόγω της (1),

$$|\varphi_x(s,t)-\varphi_x(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{d-c}, \quad \forall t \in [c,d] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_c^d \left[\varphi_x(s,t) - \varphi_x(x_0,t)\right] dt \right| \leq (d-c)\frac{\varepsilon}{d-c} = \varepsilon,$$

$\forall$ s μεταξύ x_0, x_0+h

$$\Rightarrow \left| F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_c^d \varphi_x(x_0,t)\,dt \right| \leq |x_0+h-x_0|\,\varepsilon = \varepsilon|h|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_c^d \varphi_x(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon,$$ για όλα

τα h με $0<|h|<\min\{x_0-a, b-x_0, \delta\}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \int_c^d \varphi_x(x_0,t)\,dt.$$

$\Rightarrow$ F παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0) = \int_c^d \varphi_x(x_0,t)\,dt.$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η τελευταία ισχύει κ' για $x_0 = a$ ή b.

$\boxtimes$

Απόδειξη Θ.9:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 με $\nabla f = F$ στο Ω.

Τότε, $f_x = P$, $f_y = Q$ $\Rightarrow$

$$P_y = f_{xy} \overset{[f \text{ κλάσης } C^2]}{=} f_{yx} = Q_x .$$

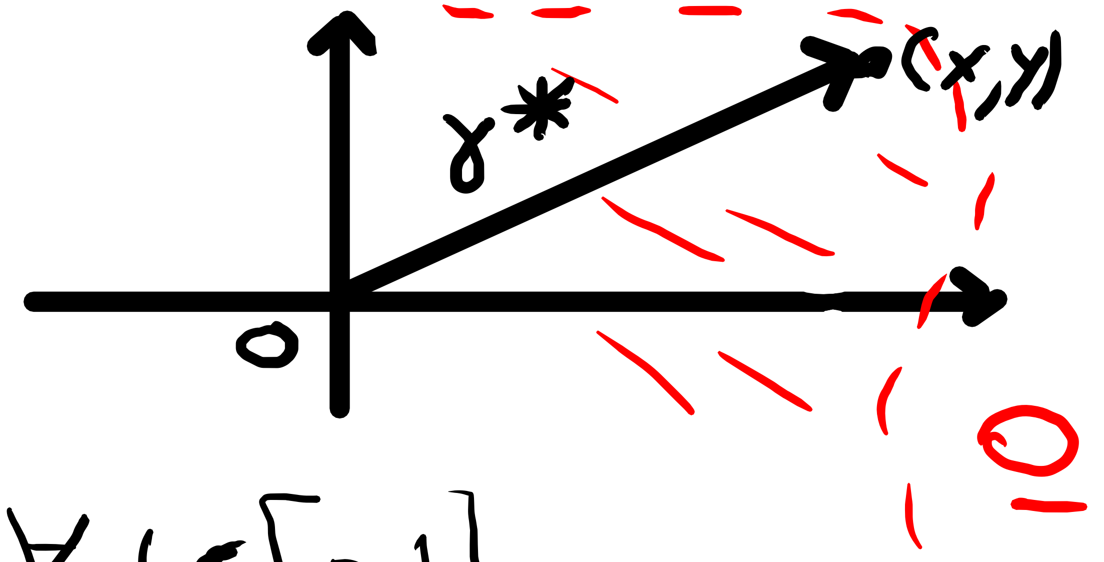
(ii) $\Rightarrow$ (i): Επειδή Ω αστερόμορφο, $\exists\, u_0 \in \Omega \mid [u_0, u] \subset \Omega$, $\forall\, u \in \Omega$.

- Υποθέτουμε αρχικά ότι $u_0 = (0,0)$.

Τότε,

$$\forall (x,y)\in \Omega, \qquad \forall t\in[0,1],$$

$$(1-t)\cdot(0,0) + t(x,y) \in \Omega$$



δηλ.

$$(tx,ty)\in\Omega, \quad \forall (x,y)\in\Omega, \quad \forall t\in[0,1].$$

Σταθεροποιούμε $(x,y)\in\Omega$ κ' θέτουμε

$$\gamma(t) = (tx,ty), \qquad t\in[0,1],$$

$$f(x,y) = \int_\gamma \vec{F} = \int_0^1 [(P(tx,ty), Q(tx,ty))]\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \int_0^1 \left[P(tx,ty)x + Q(tx,ty)y \right] dt, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Σταθεροποιώ $t \in [0,1]$ κ' θέτω

$$\varphi(x,y) = xP(tx,ty) + yQ(tx,ty), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Τότε,

$$\varphi_x = P(tx,ty) + xt \cdot P_x(tx,ty) + yt\, Q_x(tx,ty) =$$

$$\underset{(\text{υπόθεση})}{\overset{[P_y = Q_x]}{=\!=}} P(tx,ty) + xtP_x(tx,ty) + yt\, P_y(tx,ty) =$$

$$\Rightarrow$$

$$\varphi_x = P(tx,ty) + t\left[xP_x(tx,ty) + yP_y(tx,ty)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_x = P(tx,ty) + t\,\frac{d}{dt}\left[P(tx,ty)\right]}$$

Τότε,

$$f_x \overset{(\theta.10)}{=} \int_0^1 \left\{P(tx,ty) + t\,\frac{d}{dt}\left[P(tx,ty)\right]\right\}dt =$$

$$= \int_0^1 \cancel{P(tx,ty)}\,dt + tP(tx,ty)\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \cancel{P(tx,ty)}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f_x = P(x,y)}$$

όμοια, $\boxed{f_y = Q} \Rightarrow \nabla f = (P, Q) = \vec{F}$.

• Στη γενική περίπτωση που $u_0 = (x_0, y_0) \in \underline{\Omega}$ με

$$[u_0, u] \in \underline{\Omega}, \quad \forall u \in \underline{\Omega},$$

εφαρμόζουμε το προηγούμενο για

→ το ανοικτό σύνολο $\underline{\Omega}' = \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in \underline{\Omega}\}$

→ το πεδίο $\vec{G}(s, t) = \vec{F}(s + x_0, t + y_0), \ (s, t) \in \underline{\Omega}'$.

$\boxtimes$

Το Θ.9 επεκτείνεται για Ω <u>απλά συνεκτικό</u>.

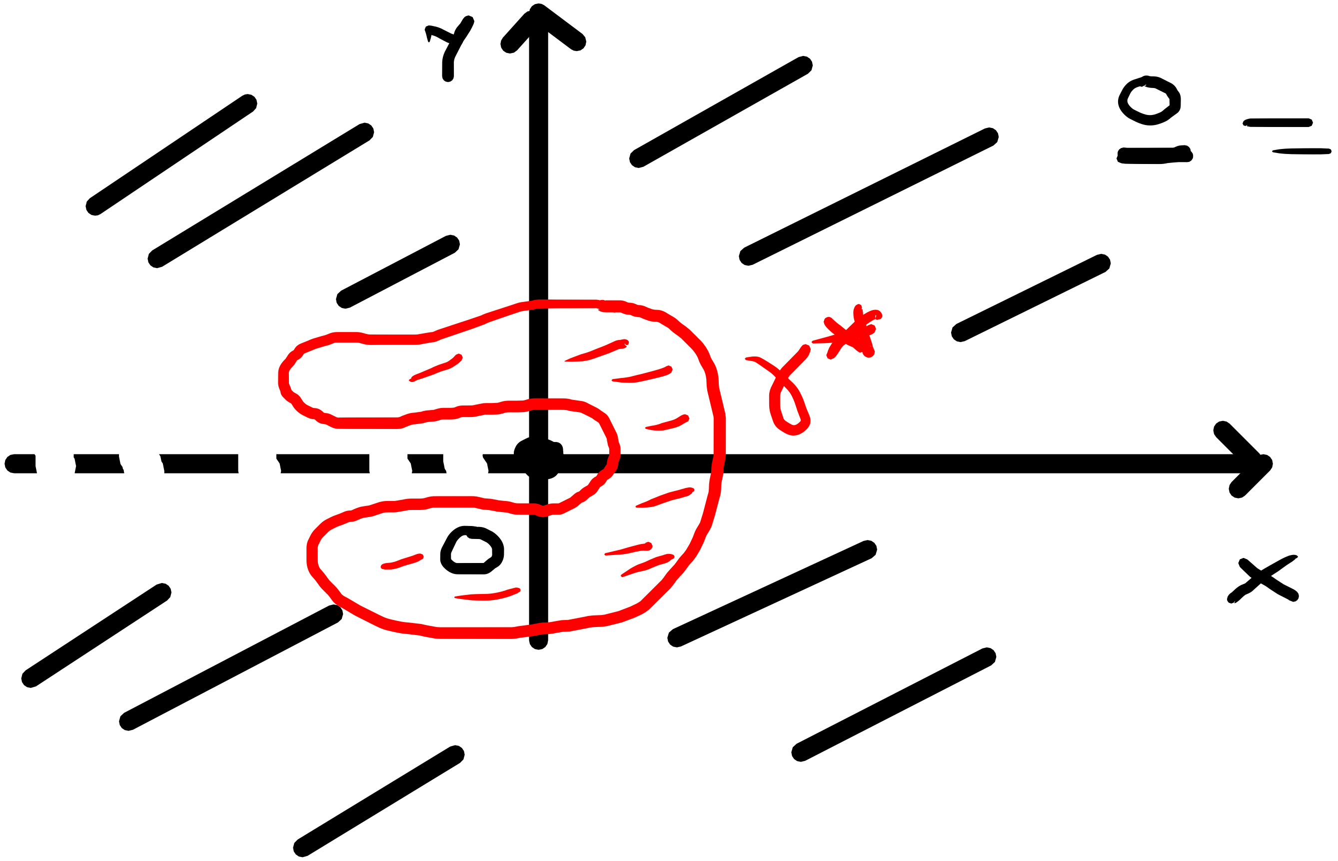
<u>Ορισμός 11:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό. Το Ω λέγεται <u>απλά συνεκτικό</u> ανν για κάθε απλή, κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subset \Omega$, ισχύει ότι κ' $\operatorname{int}\gamma^* \subset \Omega$. ($\Omega$ πεδίο χωρίς οπές).

<u>Παραδείγματα:</u>

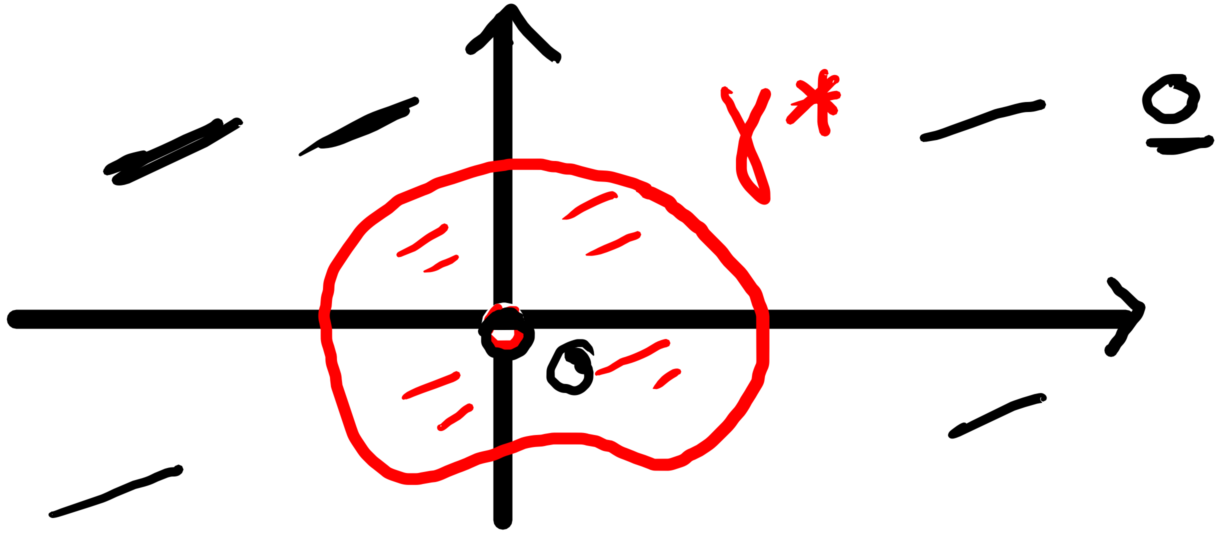
<u>(i)</u> Κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά συνεκτικό

<u>(ii)</u> Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ είναι απλά συνεκτικό.

$\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \le 0\}$



(iii) Το $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό (είναι ανοικτό συνεκτικό)



Στο σχήμα, $\gamma^* \subset \Omega$

αλλά $\operatorname{int}\gamma^* \not\subset \Omega$

αφού $(0,0) \in \operatorname{int}\gamma^*$.

(iv) κάθε ανοικτό κυρτό ή γενικότερα αστερόμορφο είναι απλά συνεκτικό.

Θεώρημα 12 (γενίκευση του Θ.9):

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό κ' $\vec{F}=(P,Q): \Omega \to \mathbb{R}^2$ πεδίο κλάσης C^1. Τότε, $\vec{F}$ συντηρητικό ανν $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, στο Ω.

Σημαντικό σχόλιο: Η υπόθεση "Ω απλά συνεκτικό" δεν μπορεί γενικά να παραλειφθεί.

π.χ.

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \underline{\Omega}.$$

Παρ' όλο που $P_y = Q_x$ στο $\underline{\Omega}$ (δείξτε το), το $\vec{F} = (P, Q)$ **δεν** είναι συντηρητικό (το έχουμε σχολιάσει).

Φυσικά, το $\underline{\Omega}$ **δεν** είναι απλά συνεκτικό! (+)

Το παρακάτω Θεώρημα δίνει πλήρη χαρακτηρισμό των C^1-συντηρητικών πεδίων για απλώς συνεκτικά πεδία.

(+) $\vec{G} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Να δ.ο. $\vec{G}$ συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Θεώρημα 13: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό κ' $\vec{F}=(P,Q)$ διαν. πεδίο κλάσης C^1 στο Ω. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Το επικαμπύλιο ολοκλ. της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

(ii) $\int_\gamma \vec{F} = 0$, $\forall$ κλειστή, τμημ. λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subset \Omega$.

(iii) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ στο } \Omega.$$

(iv) $\vec{F}$ συντηρητικό.

Επιπλέον, αποδεικνύεται η παρακάτω ισχυροποίηση του Θ.13.

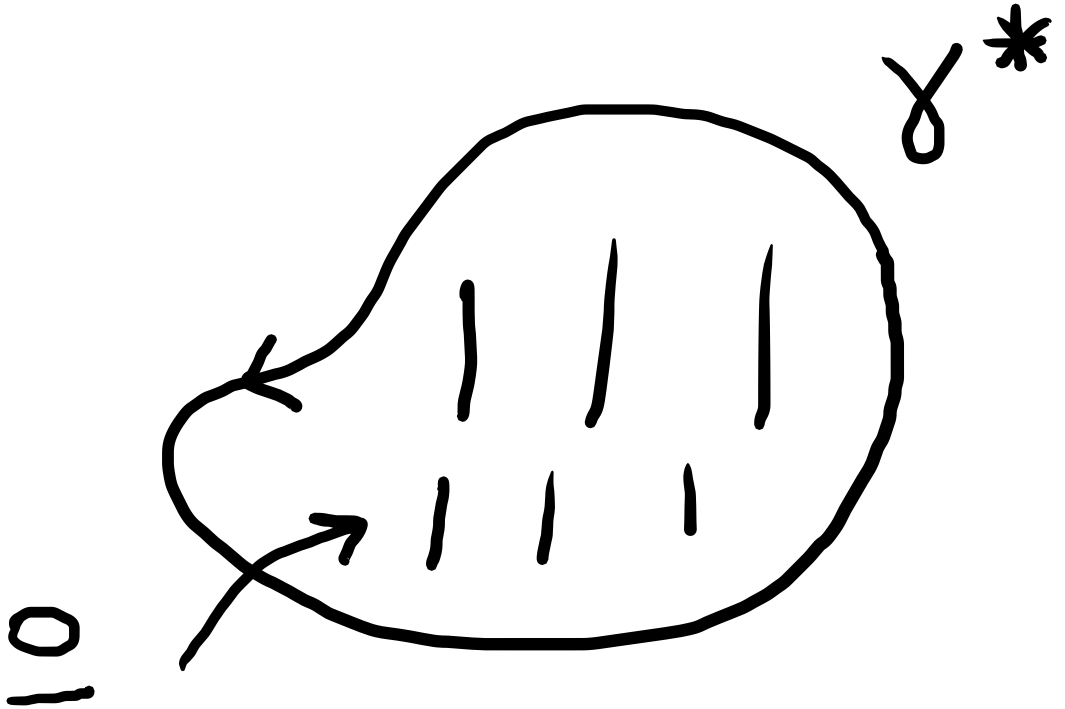
Θ.14: Έστω γ απλή, κλειστή, τμημ. λεία καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $\underline{\Omega} = \operatorname{int}\gamma^*$ κ' $\vec{F} = (P, Q) : \overline{\underline{\Omega}} \to \mathbb{R}^2$ συνεχές κ' κλάσης C^1 στο $\underline{\Omega}$.

Εάν $P_y = Q_x$, στο $\underline{\Omega}$,

τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

$(\overline{\underline{\Omega}} = \underline{\Omega} \cup \partial\underline{\Omega} = \underline{\Omega} \cup \gamma^*)$



Θ.15 (Αρχή Παραμόρφωσης): Έστω γ_1, γ_2 απλές, κλειστές, θετικά προσανατολ. τμημ. λείες καμπύλες με

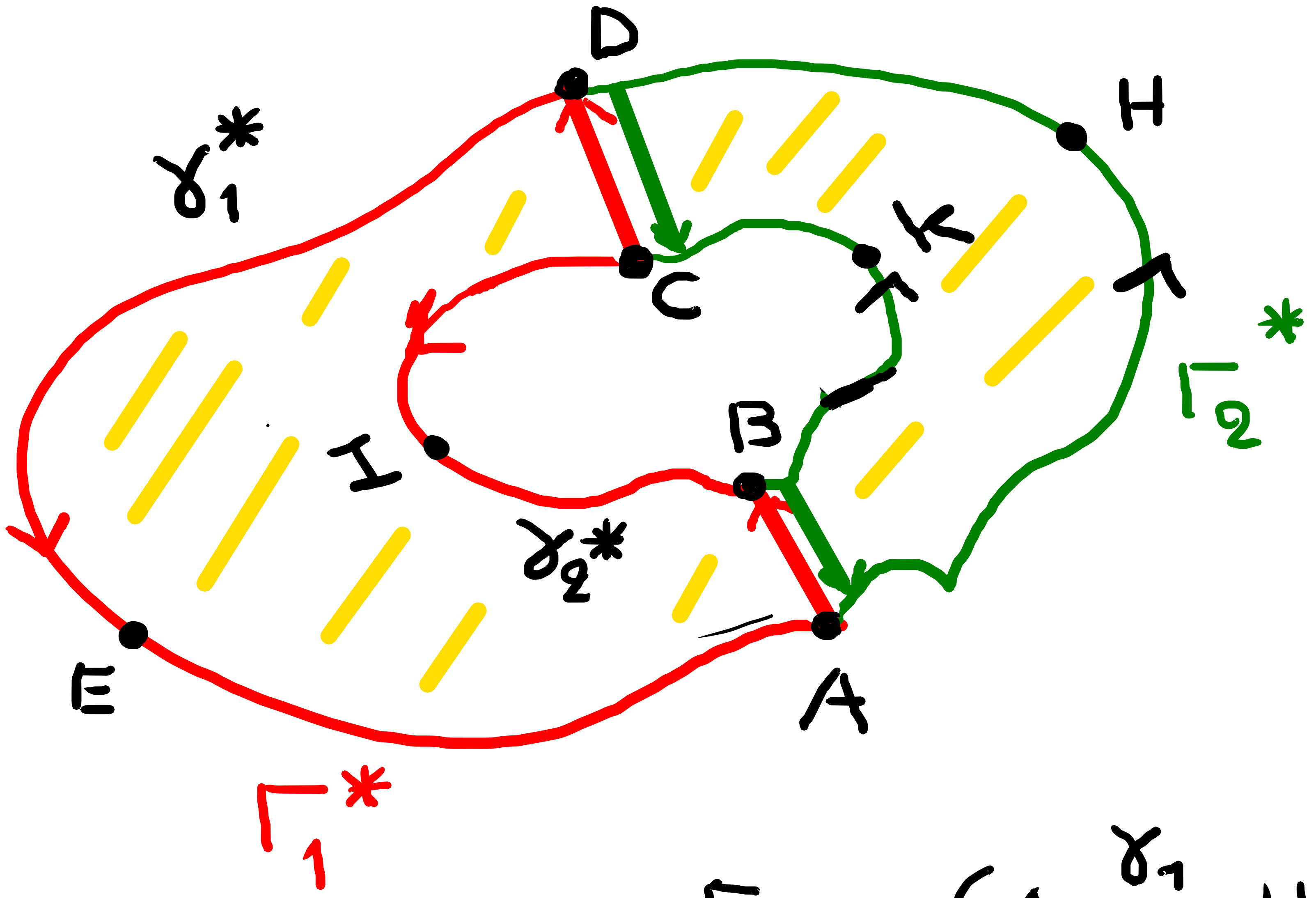
$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int} \gamma_1^*$$

κ' $\vec{F} = (P, Q)$ διανυσμ. πεδίο κλάσης C^1 στο χωρίο $\underline{\Omega}$ μεταξύ των γ_1^*, γ_2^* κ' συνεχές στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Υποθέτουμε ότι $P_y = Q_x$ στο $\underline{\Omega}$. Τότε,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Απόδειξη:



Θεωρούμε τις καμπύλες

$$\Gamma_1 = \left(D \xrightarrow{\gamma_1} E\right) + \left(E \xrightarrow{\gamma_1} A\right) + \overrightarrow{AB} + \left(B \xrightarrow{-\gamma_2} I\right) + \left(I \xrightarrow{-\gamma_2} C\right) + \overrightarrow{CD},$$

$$\Gamma_2 = \left(A \xrightarrow{\gamma_1} H\right) + \left(H \xrightarrow{\gamma_1} D\right) + \overrightarrow{DC} + \left(C \xrightarrow{-\gamma_2} K\right) + \left(K \xrightarrow{-\gamma_2} B\right) + \overrightarrow{BA}.$$

Οι Γ_1, Γ_2 είναι απλές, κλειστές τμ. λείες με εσωτερικά <u>απλώς συνεκτικά</u> εσωτερικά

$$\Omega_1 = \operatorname{int}\Gamma_1^*, \quad \Omega_2 = \operatorname{int}\Gamma_2^*.$$

Επειδή $P_y = Q_x$ στα Ω_1, Ω_2, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στα Ω_1, Ω_2 $\xRightarrow{(\Theta.14)}$

$$\int_{\Gamma_1}\vec{F} = \int_{\Gamma_2}\vec{F} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1}\vec{F} + \int_{\Gamma_2}\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \ldots\ldots \int_{\gamma_1}\vec{F} + \int_{-\gamma_2}\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1}\vec{F} = \int_{\gamma_2}\vec{F}.$$

$\boxtimes$

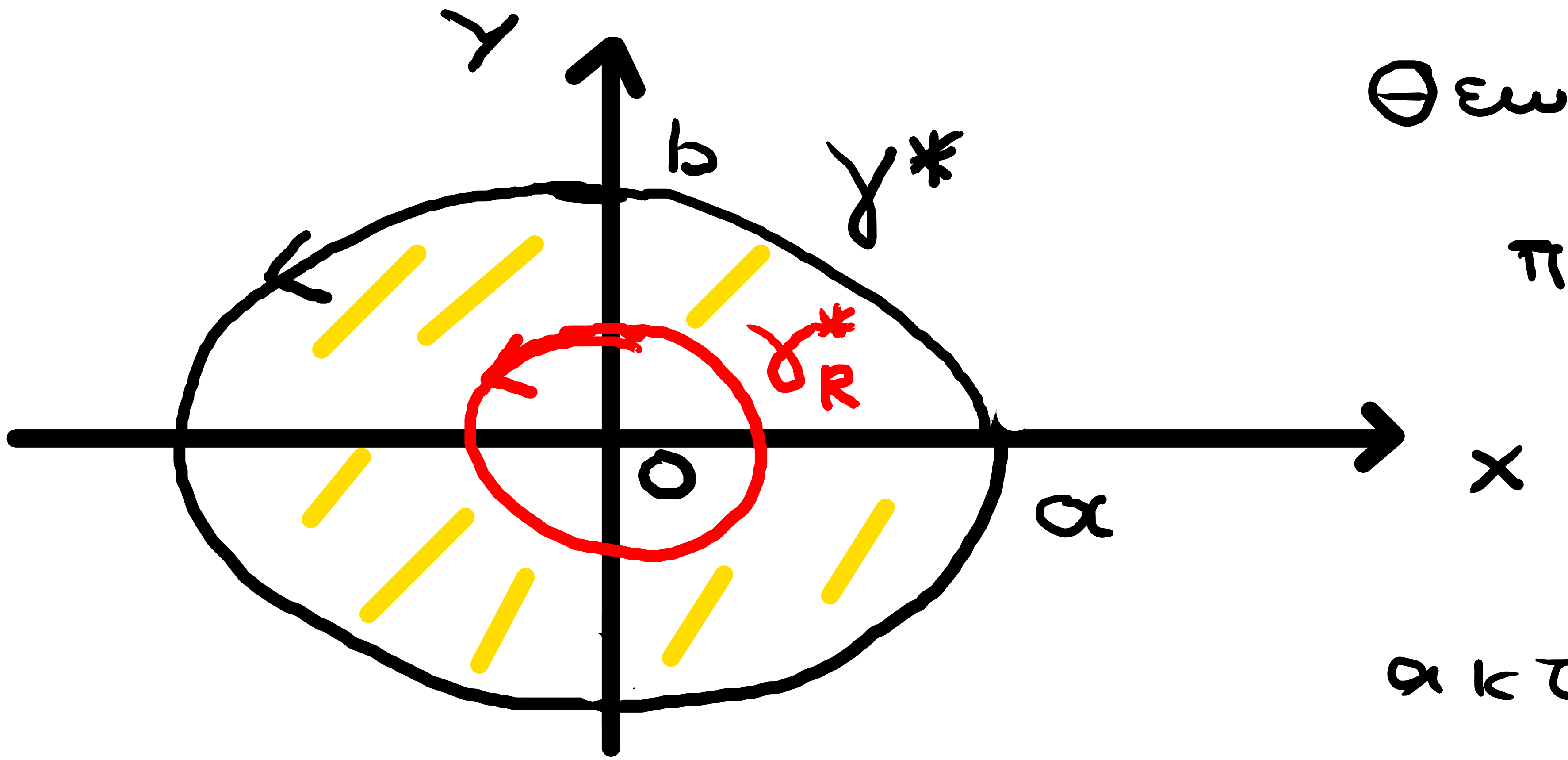
Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \right)$

όπου γ η θετικά προσανατολ. έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0).$$

Λύση:



Θεωρούμε θετικά προσανατολ. κύκλο γ_R κέντρου O ακτίνας $R > 0$

με $\gamma_R^* \subset \gamma^*$.

Επειδή $P_y = Q_x$ στο χωρίο μεταξύ των γ^*, γ_R^*, το Θ.15 δίνει

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_R} \vec{F} = 2\pi \text{ (έχει υπολογιστεί).}$$