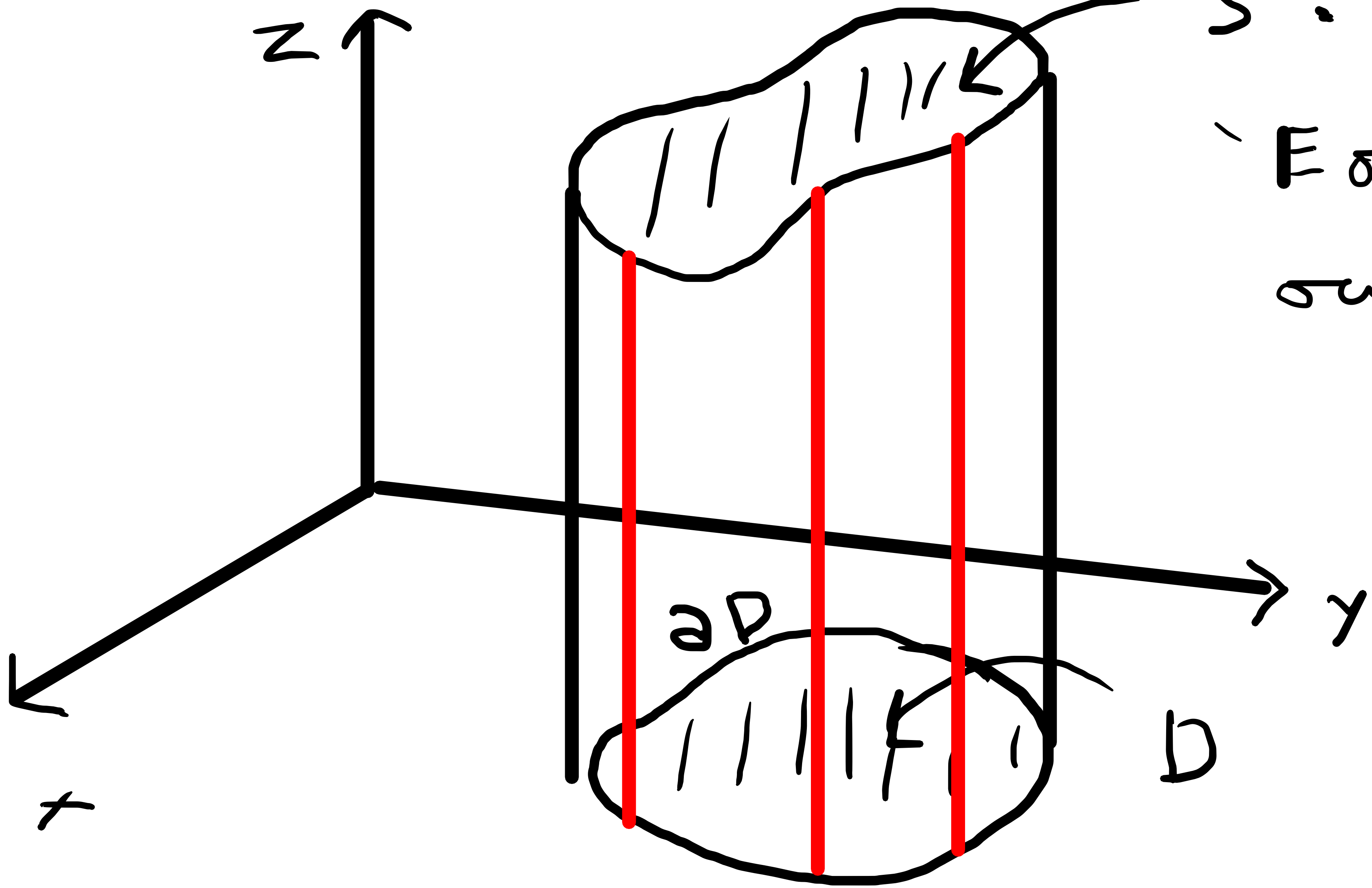
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛ.

(Ι) Υπολογισμός όγκων



$S : z = f(x,y), (x,y) \in D$

Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο χωρίο D με $f \geq 0$.

Θεωρούμε το στερεό που φράσσεται από

→ τις επιφάνειες S, D

→ τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες // z'z κ' οδηγό την καμπύλη η ∂D.

Τότε, $V(K) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$

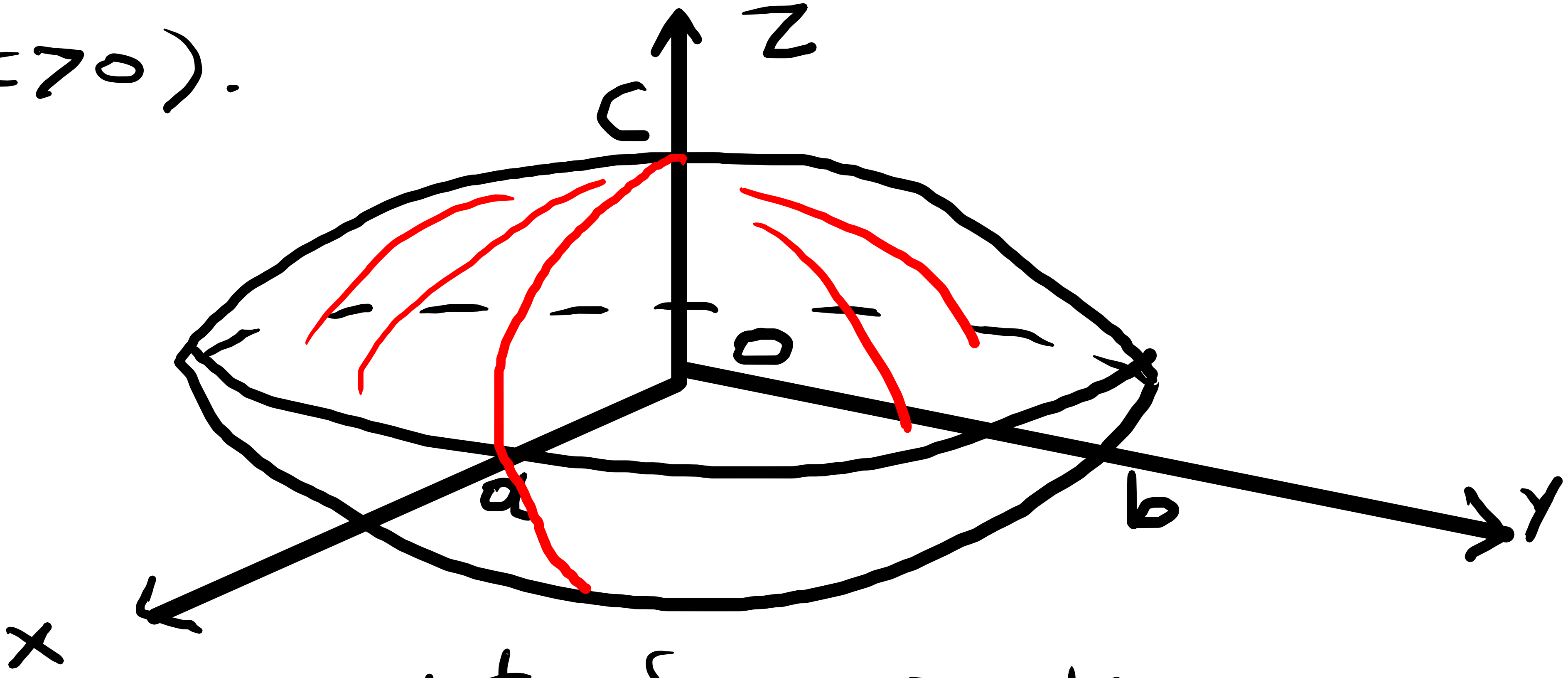
Παραδείγματα:

(i) Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$K=\{(x,y,z) \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1\}$$

$(a,b,c>0)$.

Λύση:

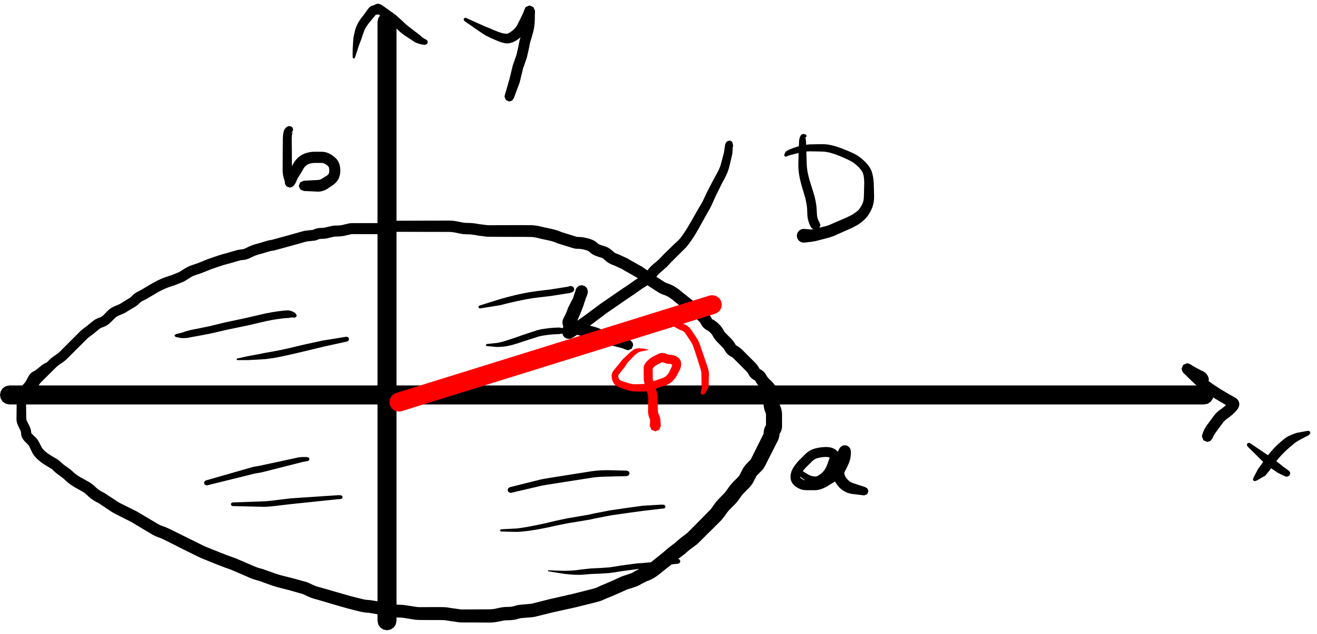


Λόγω συμμετρίας, $V(K)=V(K^+)$

όπου $K^+=\{(x,y,z)\in K : z \geq 0\} \Rightarrow$

$$K^+ = \left\{ (x,y,z):\ 0 \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ ,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

$$V(K^+) = \iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,\quad D = \left\{ (x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$



$$\left.\begin{aligned} x &= a r\cos\varphi \\ y &= b r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \overset{(x,y)\in D}{\Longrightarrow} \boxed{r \le 1}$$

$$k \quad \boxed{0 \le \varphi \le 2\pi}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

$$\Rightarrow V(K^+) = c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; abr\, dr\, d\varphi =$$

$$= abc\; 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr \overset{u=1-r^2}{=}$$

$$= -\pi abc \int_1^0 \sqrt{u}\, du = \pi abc \int_0^1 \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{2\pi abc}{3} \Longrightarrow \underline{V(K) = \frac{4\pi}{3} abc}$$

Ειδική περίπτωση:

όγκος σφαίρας ακτίνας $R = \frac{4\pi}{3}R^3$.

(ii) $V(K) = ?$

$K = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 3-2y,$
$0 \leq z \leq x^2+2y^2\}$.

Λύση: $V(K) = \iint_D (x^2+2y^2)\,dx\,dy,$

$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 3-2y\}$

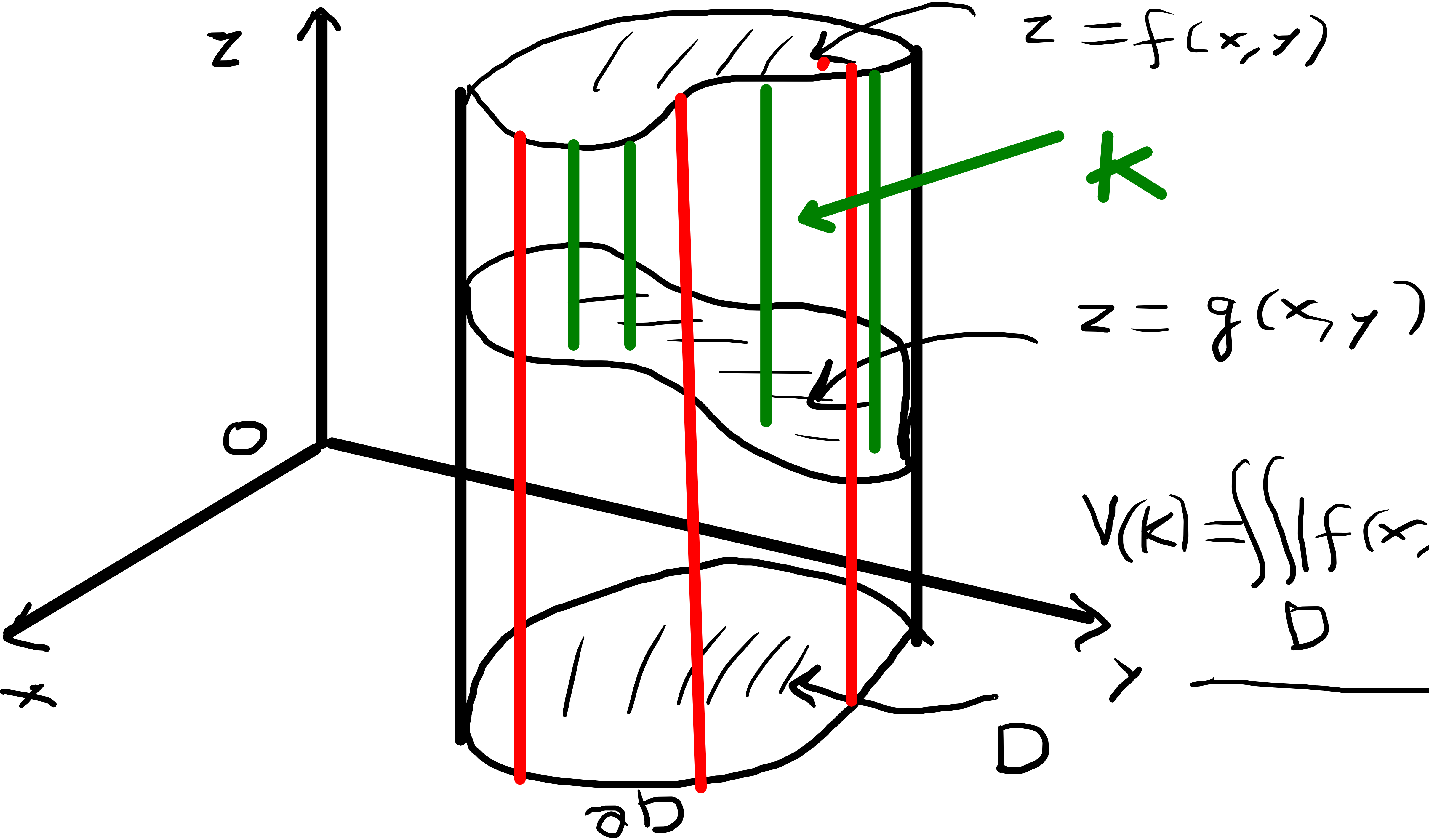
$$\Rightarrow \quad V(K) = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{3-y} (x^2+2y^2)\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(3-y)^3 - (y^2)^3}{3} - 2y^2(3-y-y^2) \right] dy$$

$$= \ldots \qquad \overline{}$$

Γενικότερα, έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό κ' φραγμένο. Θεωρούμε το στερεό που φράσσεται

- από τις επιφάνειες $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$
- τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες $\parallel z'z$ κ' οδηγό την καμπύλη ∂D.



$$V(K) = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)|\, dx\,dy$$

<u>Παράδειγμα:</u> $V(K) = ?$.

$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, \quad x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$.

<u>Λύση:</u> $V(K) = \iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - x^2 - y^2 + 1\right) dx\,dy$,

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \xrightarrow{(x,y)\in D} 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ κ.ά.}$$

$$V(K) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{4-r^2} - r^2 + 1\right) r\,dr\,d\varphi$$

$$= \ldots$$

II. Υπολογισμός εμβαδών επιπέδων χωρίων

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο, Jordan μετρήσιμο.

Τότε, Εμβαδό$(D) = E(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$ (ορισμός!)

Παραδείγματα:

(i) $E(D) = ?$, $D = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \xrightarrow{(x,y)\in D} r^4 \leq r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$\Rightarrow r^2 \leq \cos(2\varphi)$$

$$\Rightarrow 0 \leq r \leq \sqrt{\cos(2\varphi)}$$

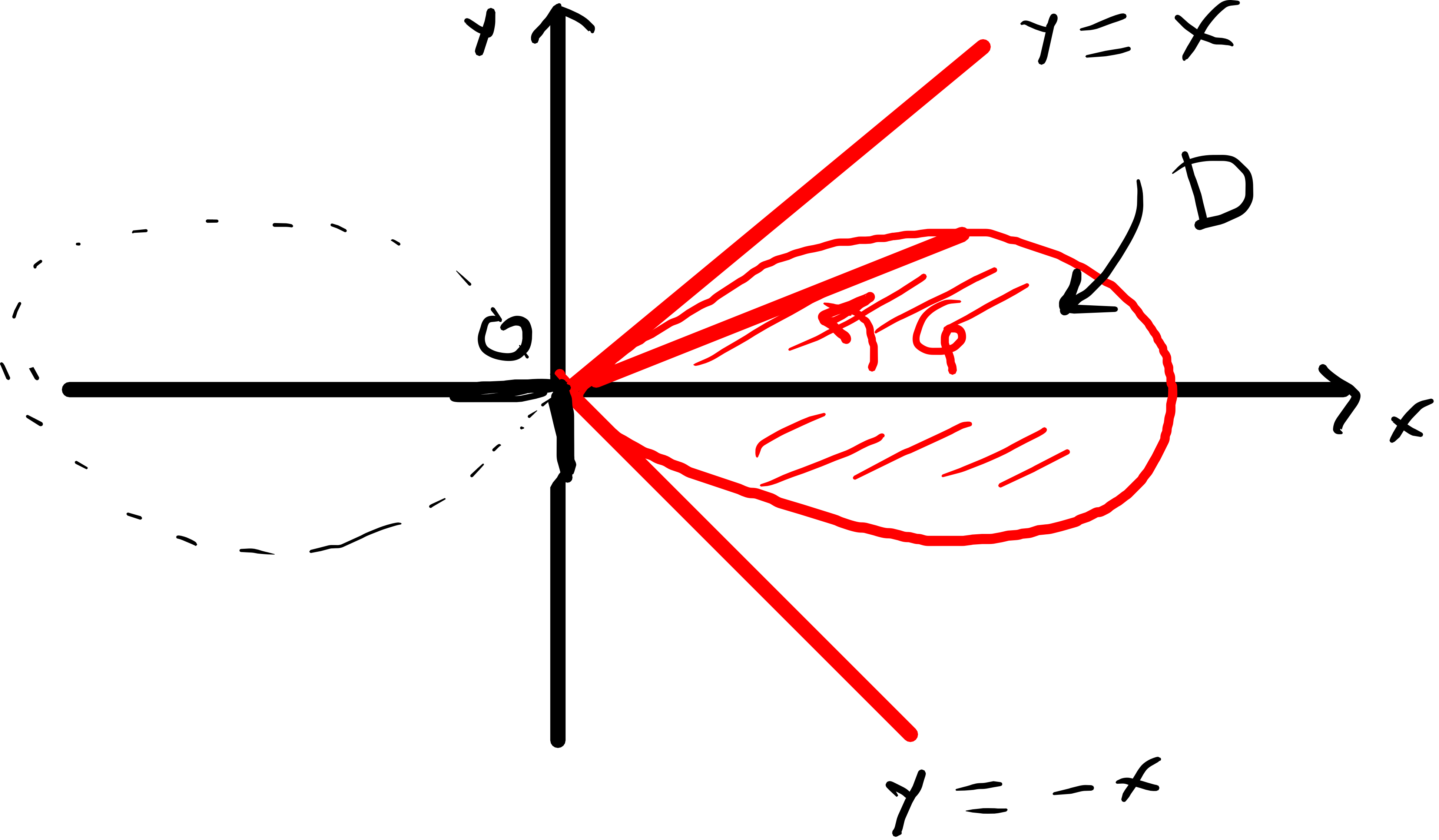
Θα πρέπει $\cos(2\varphi) \geq 0 \Rightarrow -\pi/2 \leq 2\varphi \leq \pi/2$

$$\Rightarrow \boxed{-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4}$$

$$\Rightarrow E(D) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} \cos(2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_0^{\pi/4} = 1/2 .$$



"Μισός"
Λημνίσκος
Bernoulli

(ii) $E(D) = ?$, $D = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq \sqrt{x^2+y^2} + x, \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

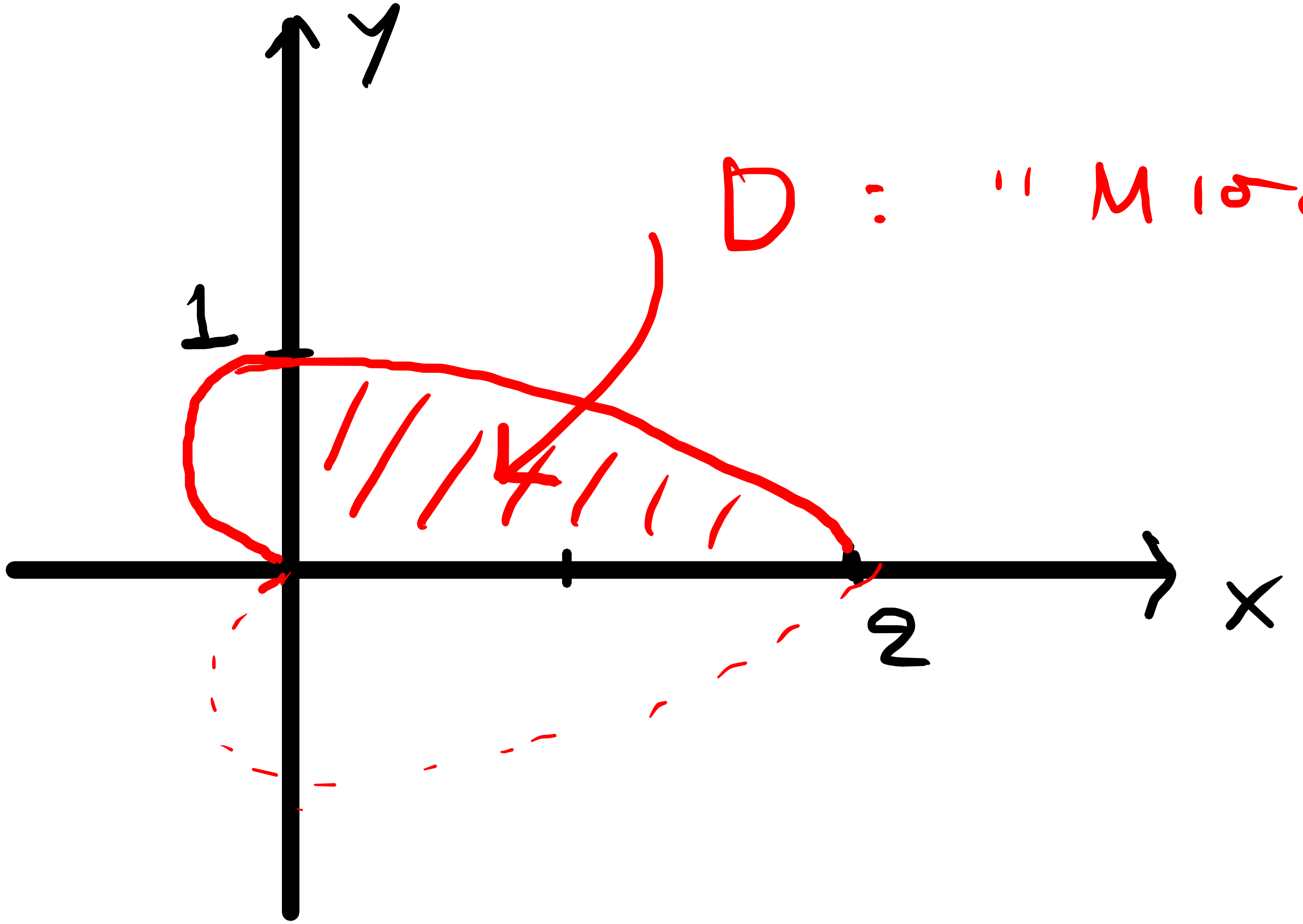
Λύση: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \xRightarrow{(x,y)\in D} r^2 \leq r + r\cos\varphi$

$$\Longrightarrow \boxed{r \leq 1+\cos\varphi}$$

$y \geq 0 \Rightarrow r\sin\varphi \geq 0 \Rightarrow \sin\varphi \geq 0 \Rightarrow \underline{\varphi \in [0,\pi]}$

$$E(D) = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{1+\cos\varphi} r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= \cdots\cdots$$



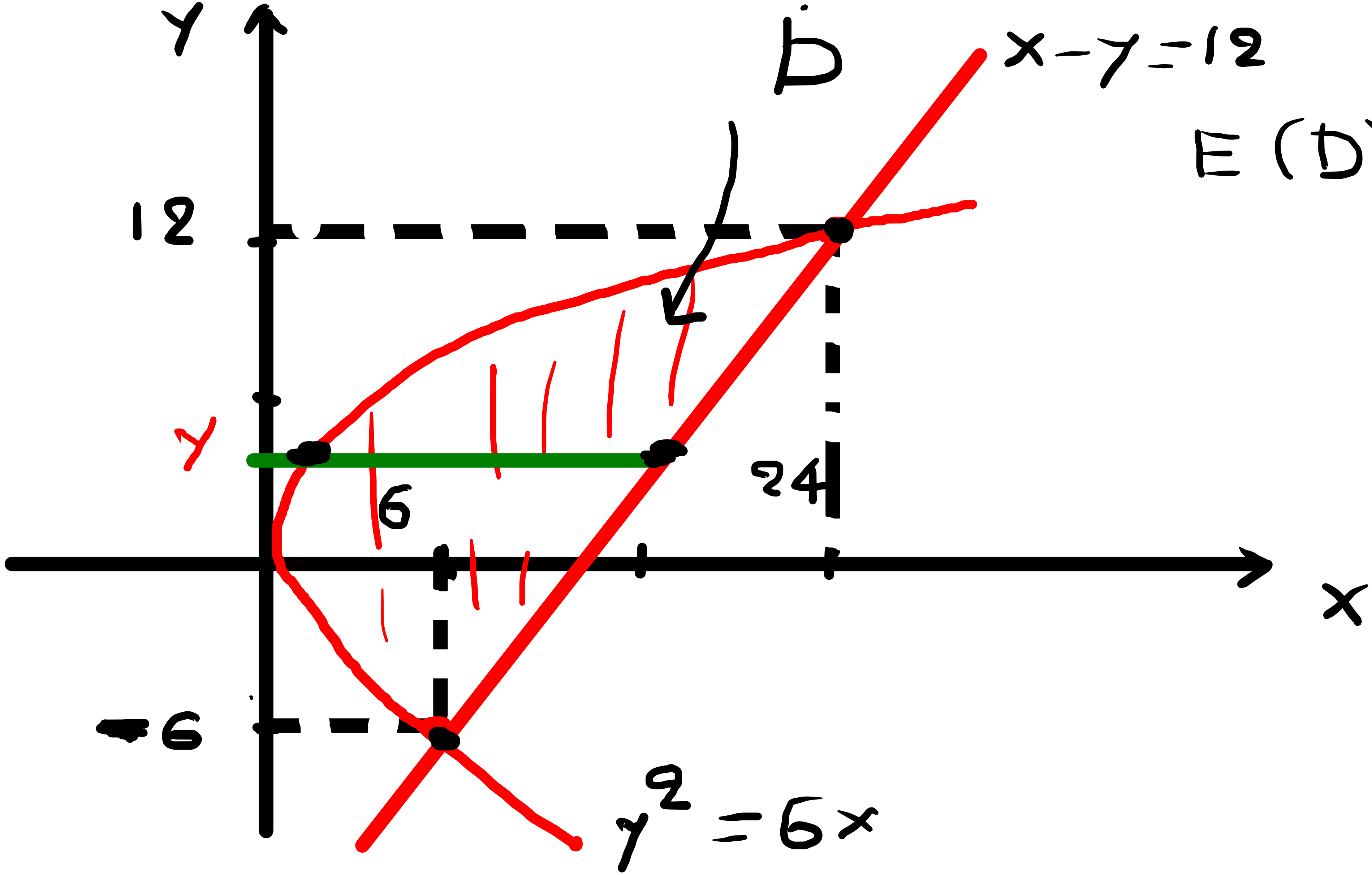
D : "Μισό" καρδιοειδές

<u>(iii)</u> $E(D) = ?$ D το χωρίο που φράσσεται από τις $y^2 = 6x$, $x - y = 12$.

<u>Λύση:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 12 \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y + 12 \\ y^2 - 6y - 72 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$(x, y) = (24, 12)$ ή $(6, -6)$



$$E(D)=\iint_D dx\,dy=$$

$$=\int_{-6}^{12}\left(\int_{y^2/6}^{y+2}dx\right)dy$$

$$=\int_{-6}^{12}\left(y+2-\frac{y^2}{6}\right)dy$$

$$=\ldots$$

III. Υπολογισμός μάζας - κέντρου μάζας

<u>Ορισμός</u>: <u>Επίπεδο σώμα</u> εννοούμε ένα σώμα του οποίου μία από τις 3 διαστάσεις είναι πολύ μικρή κ' θεωρείται αμελητέα. Ένα τέτοιο σώμα D το ταυτίζουμε με ένα πεδίο $\subseteq \mathbb{R}^2$.

Υποθέτουμε ότι το επίπεδο σώμα D είναι μη ομογενές με πυκνότητα τη συνεχή μη αρνητική συνάρτηση $\rho(x,y)$, $(x,y)\in D$.

• Μάζα$(D) = m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

• Κέντρο μάζας του D:

$$(\bar{x}, \bar{y})$$

με

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy$$

→ Εάν D ομογενές, δηλ. $\rho(x,y) = \rho =$ σταθερά, τότε

$$m(D) = \rho E(D), \quad \bar{x} = \frac{1}{E(D)} \iint_D x\,dx\,dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{E(D)} \iint_D y\,dx\,dy.$$

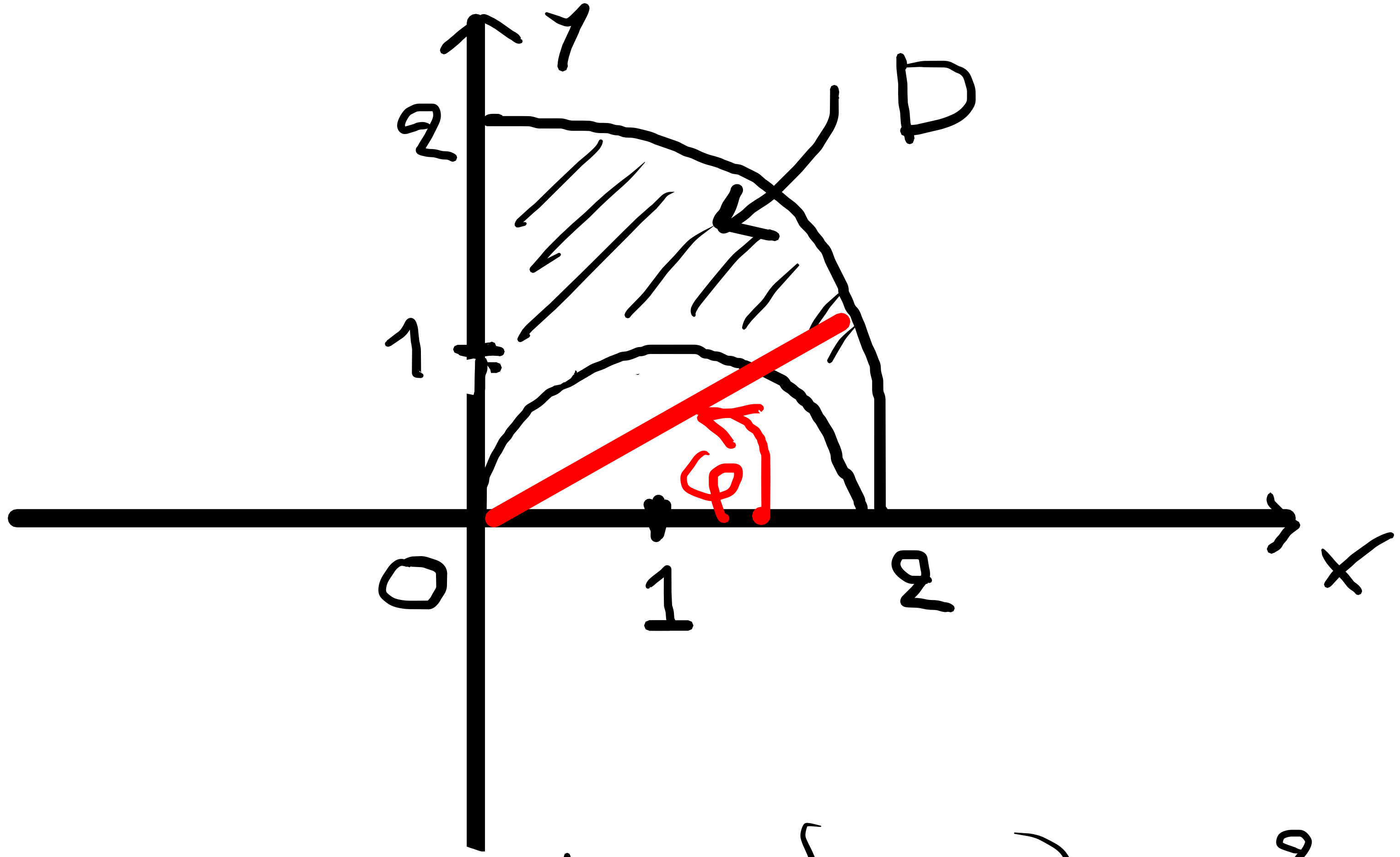
Παράδειγμα: Να βρεθεί το κέντρο μάζας του ομογενούς επίπεδου σώματος

$$D = \{ (x,y) : \ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \geq 0, \ y \geq 0 \}.$$

Λύση: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \xRightarrow{(x,y)\in D} 2r\cos\varphi \leq r^2 \leq 4$

$$\Rightarrow \boxed{2\cos\varphi \leq r \leq 2}$$

$$x^2 + y^2 \geq 2x \iff \underline{(x-1)^2 + y^2 \geq 1}$$



$0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$E(D) =$

$= \frac{1}{4} E(D_1) - \frac{1}{2} E(D_2),$

όπου $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_2 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

$\Rightarrow \quad E(D) = \frac{1}{4} 4\pi - \frac{1}{2} \pi = \pi/2.$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_{2\cos\varphi}^{2} r\cos\varphi\cdot r\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\left(\int_{2\cos\varphi}^{2} r^2\,dr\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\frac{8-8\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\left(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi}_{1} - \underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi}_{I}\right)$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\, d\varphi=\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi-\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\left[1-\cos(4\varphi)\right]d\varphi=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}=\frac{3\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \iint_D x\,dx\,dy=\frac{8}{3}\left(1-\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{F(D)}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{\pi}\left(\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\frac{16}{3\pi}-1}$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2\cos\varphi}^{2} r\sin\varphi \cdot r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \; \frac{8(1-\cos^3\varphi)}{3}\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi - \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi \right)$$

$$= \frac{8}{3} \left(-\cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\cos^4\varphi \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{1}{E(D)} \iint_D y\,dx\,dy = \frac{2}{\pi} \cdot 2 = 4/\pi$$

κέντρο μάζας $\equiv \left(\frac{16}{3\pi} - 1, \ \frac{4}{\pi} \right)$

V. Επίλυση Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \geq 0 \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \qquad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

Η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. είναι η

$$u(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

<u>Απόδειξη:</u> $\forall s \geq 0$, $u'(s) - u'(0) = \int_0^s u''(t)\, dt$

$$\Rightarrow \quad u'(s) = \int_0^s f(t)\, dt, \quad s \geq 0.$$

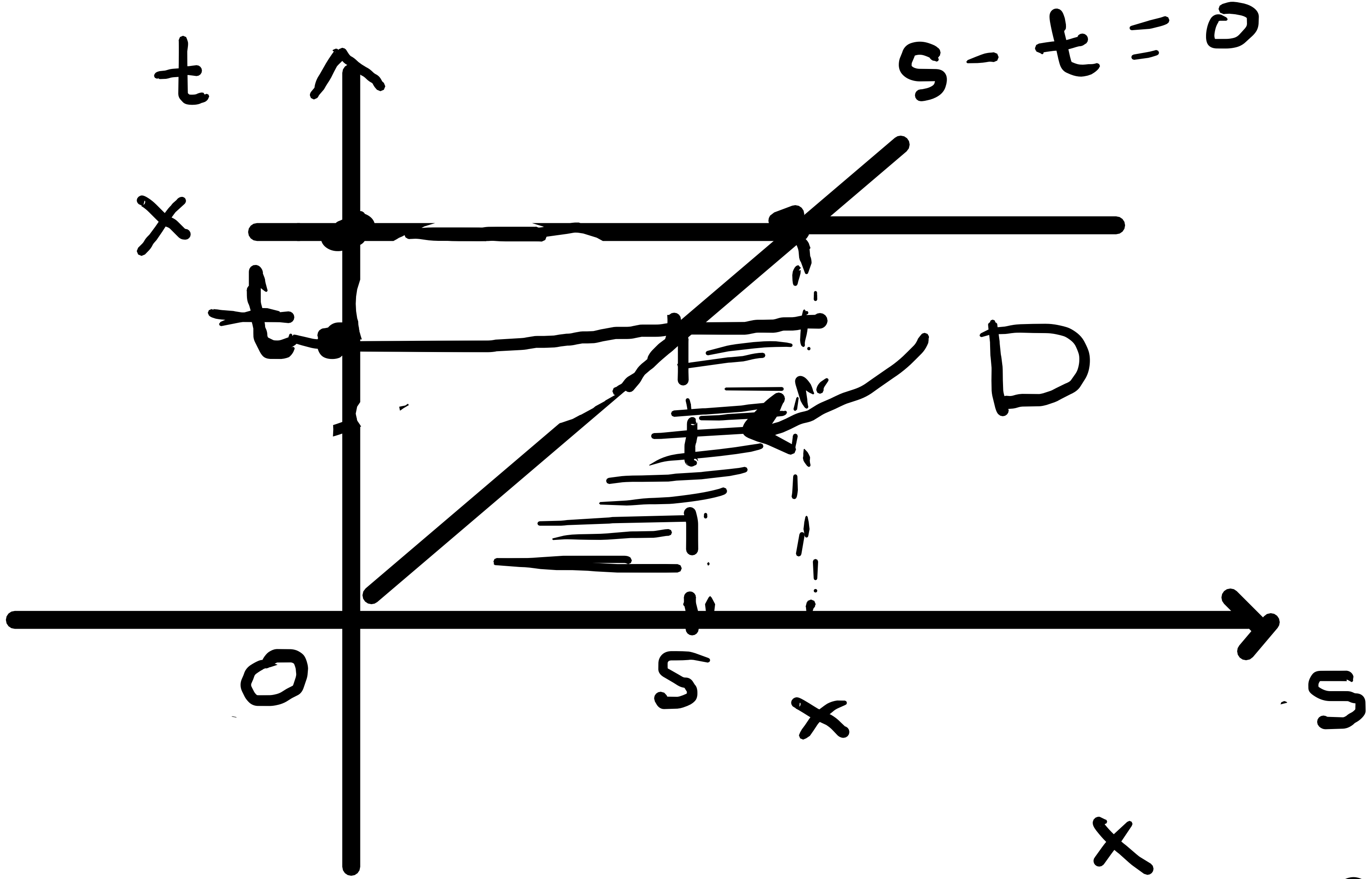
$\forall x \geq 0,$

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_0^x \left[\int_0^s f(t)\,dt \right] ds, \quad x \geq 0.$$

Σταθεροποιώ το $x \geq 0$. Θεωρώ το χωρίο

$$D = \{ (s, t) : \; 0 \leq s \leq x, \quad 0 \leq t \leq s \}$$



(Fubini)

$$u(x) = \iint_D f(t)\,dt\,ds$$

(Fubini) $\Longrightarrow$ $u(x) = \int_0^x \left(\int_t^x f(t)\,ds \right) dt$

$$= \int_0^x (x-t) f(t)\,dt. \qquad \boxtimes$$