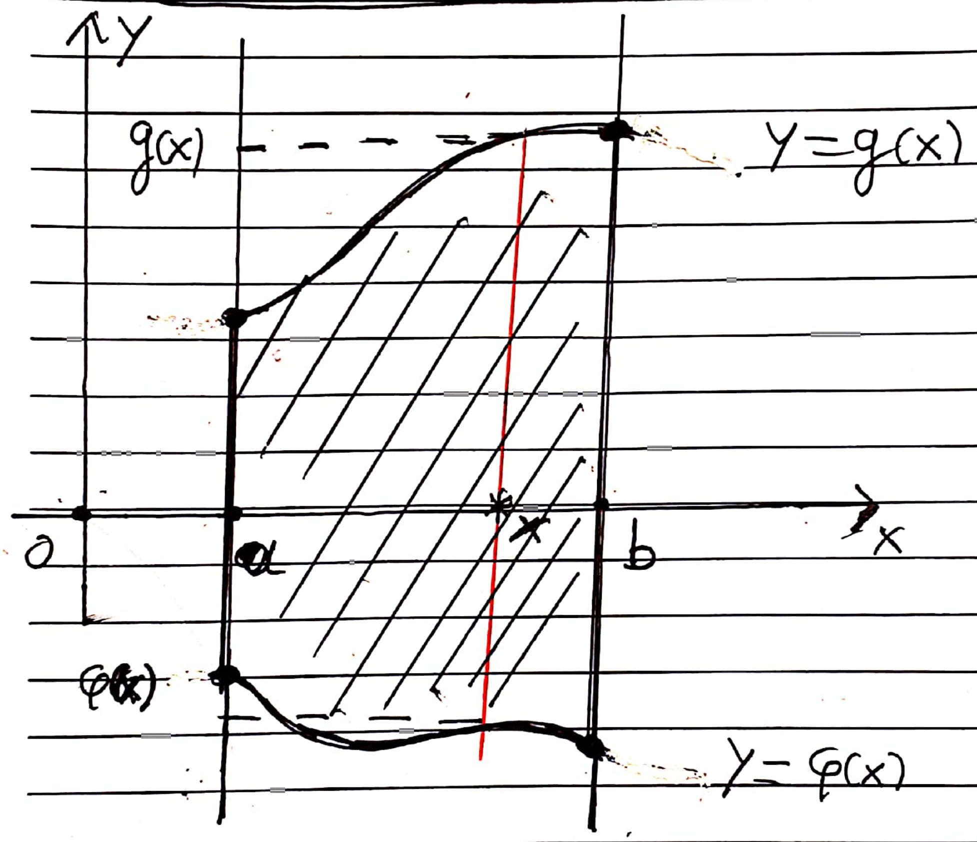
4. Θ. FUBINI ΣΕ ΑΠΛΑ ΧΩΡΙΑ

Έστω $\varphi, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\boxed{A = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq y \leq g(x)\}} \quad (1)$$



<u>Ορισμός 4.1:</u> Ένα επίπεδο χωρίο της μορφής (1) ονομάζεται <u>x-απλό</u> ή <u>κατακόρυφης σάρωσης</u>.

Πρόταση 4.2: Κάθε x-απλό χωρίο είναι κλειστό, φραγμένο κ' Jordan μετρήσιμο.

Απόδειξη: Έστω

$$A = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq y \leq g(x)\},$$

όπου $\varphi, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

- **A κλειστό.** Έστω $(x,y) \in \bar{A}$. Τότε, $\exists \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1} \subset A$ ώστε $x_n \to x$, $y_n \to y$ κ'

$$x_n \in [a,b], \quad \varphi(x_n) \leq y_n \leq g(x_n),\ n \geq 1.$$

Τότε, $x \in [a,b]$ κ' λόγω συνέχειας των φ, g, παίρνουμε

$$\varphi(x) \leq y \leq g(x).$$

Επομένως, $(x,y) \in A$. Άρα, $\bar{A} = A \Rightarrow A$ κλειστό.

- **A φραγμένο.** Θέτουμε

$$m = \min_{[a,b]} \varphi, \quad M = \max_{[a,b]} g.$$

Τότε, $A \subset [a,b] \times [m,M]$.

- **A Jordan μετρήσιμο.**

Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{ (x,y) \mid a < x < b,\ \varphi(x) < y < g(x) \}.$$

Ισχυρισμός: G ανοικτό

[Έστω $(x_0, y_0) \in G$. Επιλέγουμε
$$0 < \varepsilon < \min\{ y_0 - \varphi(x_0),\ g(x_0) - y_0 \}.$$

Λόγω συνέχειας των φ, ψ, $\exists\ \delta > 0 \mid$

- $a < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < b$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon/2, \quad g(x_0) - \varepsilon/2 < g(x).$$

Τότε,
$$(x_0, y_0) \in \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon/2, y_0 + \varepsilon/2)}_{\text{ανοικτό}} \subset G.$$

Πράγματι αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y \in (y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2})$, τότε $x \in (a, b)$ κ'

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < y_0 - \frac{\varepsilon}{2} < y < y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x)$$

$\Rightarrow (x, y) \in G$.]

Άρα, G ανοικτό $\subset A \Rightarrow \boxed{G \subset \mathring{A}}$ (4)

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ (Ακλειστό!): $A \setminus \mathring{A}$

$\subset A \setminus G =$

$= \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq g(x)\} \setminus G.$

Εάν $(x,y) \in \partial A$, τότε

- είτε $x = a$
- " $x = b$
- " $y = \varphi(x)$
- " $y = g(x)$

$$\Rightarrow \partial A \subset \underbrace{(\{a\} \times \mathbb{R})}_{[\text{ευθεία}]} \cup \underbrace{(\{b\} \times \mathbb{R})}_{[\text{ευθεία}]} \cup$$

$\cup\ Gr\varphi\ \cup\ Gr g =$ μέτρου 0

(ως ένωση πεπερασμένη συνόλων μέτρου 0)

$\Rightarrow |\partial A| = 0 \Rightarrow A$ Jordan μετρήσιμο.

$\boxtimes$

6

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$ [Θ. Fubini για φθγ.]

$$= \int_a^b \left[\int_m^M \tilde{f}(x,y)\,dy \right] dx.$$

Σταθεροποιούμε $x \in [a,b]$. Τότε,

$$\int_m^M \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_m^{\varphi(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy +$$

$$+ \int_{\varphi(x)}^{g(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy + \int_{g(x)}^M \tilde{f}(x,y)\,dy.$$

$\forall\, y \in [m, \varphi(x)) \cup (g(x), M]$, έχουμε

$$(x,y) \notin A \Rightarrow \tilde{f}(x,y) = 0$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \int_m^{\varphi(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{g(x)}^M \tilde{f}(x,y)\,dy =$$

$$= 0,$$

ενώ $\forall\, y \in [\varphi(x), g(x)]$, $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$.

Άρα,

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right] dx.$$

Θεώρημα 4.3 (Θ. Fubini για x-απλά χωρία)

Έστω A x-απλό χωρίο με

$$A=\{(x,y) \mid x\in[a,b],\ \varphi(x)\leq y\leq g(x)\},$$

όπου $\varphi, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi\leq g$.

Έστω επίσης $f: A\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$m=\min_{[a,b]}\varphi, \qquad M=\max_{[a,b]} g.$$

Τότε,

$$A\subset[a,b]\times[m,M]=T.$$

Θέτουμε

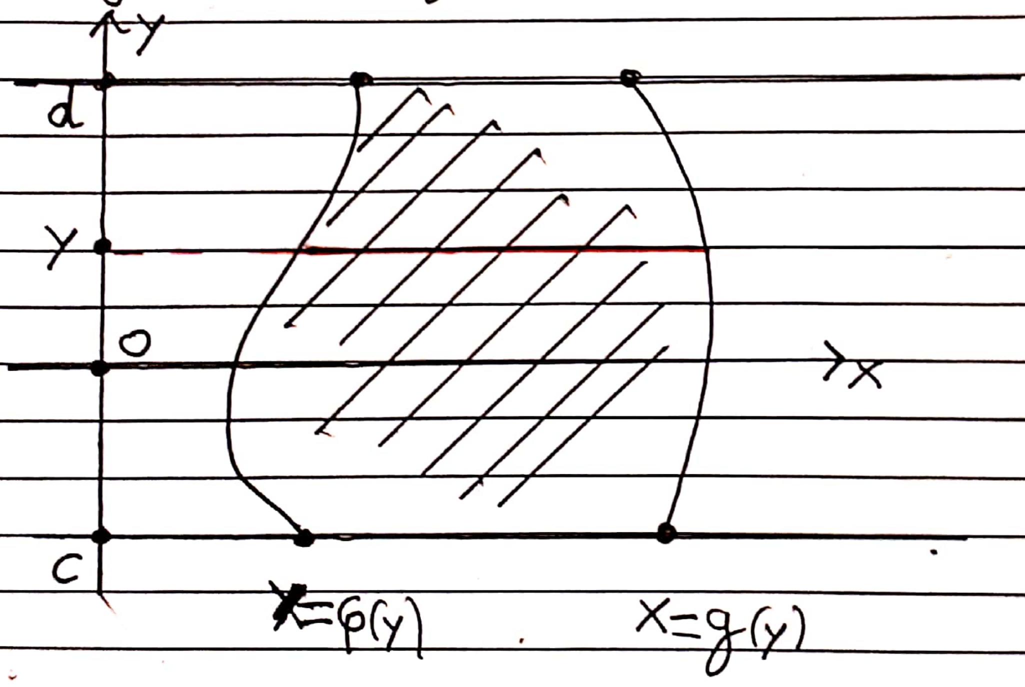
$$\tilde{f}: T\to\mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in A \\ 0, & (x,y)\in T\setminus A.\end{cases}$$

Επειδή A κλειστό, φραγμένο κ' Jordan μετρήσιμο κ' f συνεχής, η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο T,

η f είναι ολοκληρώσιμη στο A κ'

(*) Σημ. ότι τα μονοσύνολα $\{\varphi(x)\}, \{g(x)\}$ έχουν μέτρο. $\boxtimes$

<u>Ορισμός 4.4:</u> Ένα χωρίο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>y-απλό ή οριζόντιας σάρωσης</u> ανν $\exists$ συνεχείς συναρτήσεις $\varphi, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ $(c<d)$ ώστε $\varphi \le g$, $A = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le g(y)\}$.



<u>Πρόταση 4.5:</u> Κάθε y-απλό χωρίο είναι κλειστό, φραγμένο & Jordan μετρήσιμο.

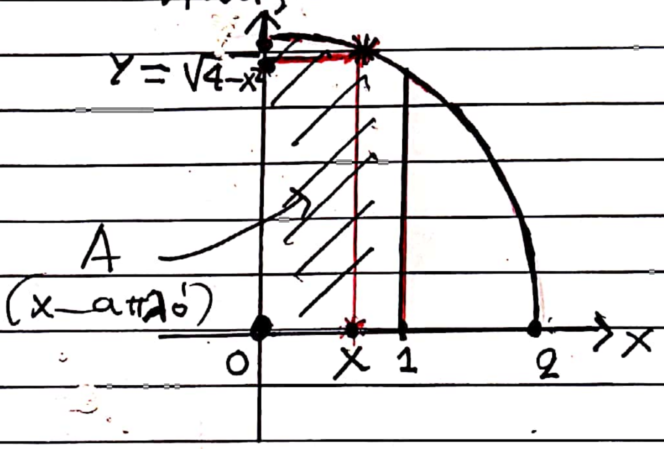
Θεώρημα 4.6 (Θ. Fubini για y-απλά χωρία).

Έστω $A=\{(x,y) \mid c\leq y\leq d,\ \varphi(y)\leq x\leq g(y)\}$, όπου $c<d$, $\varphi, \psi:[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi\leq\psi$. Τότε,

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{\varphi(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Παραδείγματα:

(1) $I=\iint_A x\,dx\,dy=\ ?$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2+y^2=4$, την ευθεία $x=1$ κ' τους θετικούς ημιάξονες.



Για σταθερό $x\in[0,1]$, το y κινείται μεταξύ 0, $\sqrt{4-x^2}$, οπότε

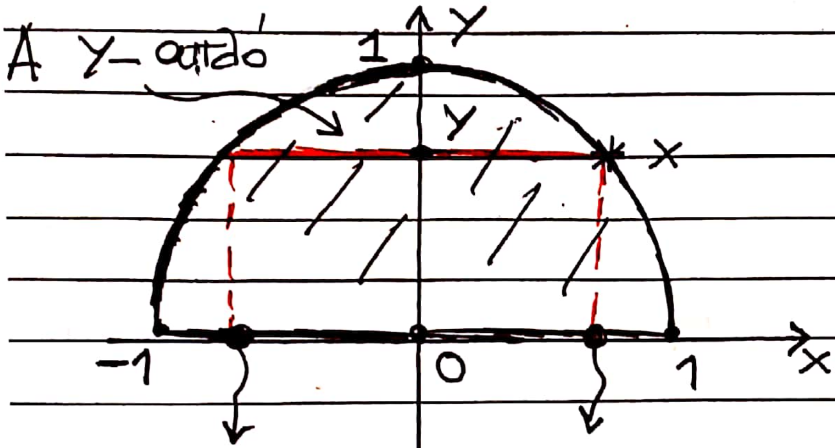
$$I=\int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx \overset{u=4-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int_4^3 \sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{u}\,du=\frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_3^4=\ \dots$$

(2) $I=\iint_A \dfrac{x^3}{x^4+y^4+1}\,dxdy = ?$, όπου A

το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2+y^2=1$, τον άξονα $x'x$ κ' βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$.



$x=-\sqrt{1-y^2}$ $\qquad$ $x=\sqrt{1-y^2}$

Για $y \in [0,1]$, το x κινείται μεταξύ $-\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-y^2}$.

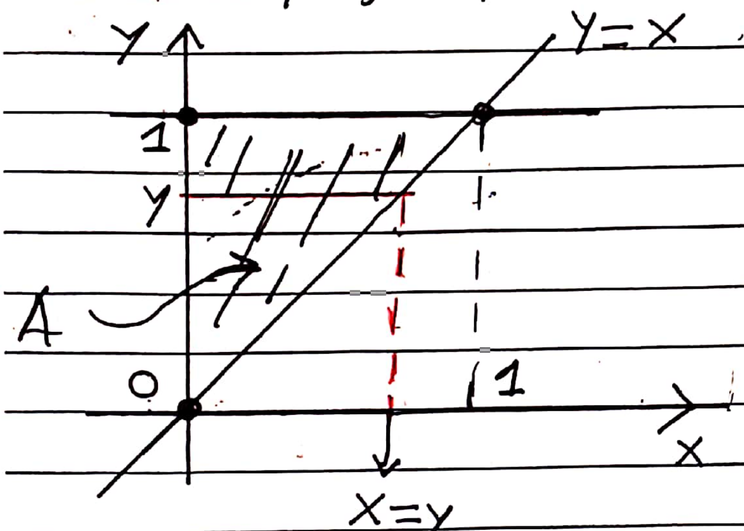
Οπότε,

$$I=\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \frac{x^3}{x^4+y^4+1}\,dx \right) dy.$$

Αλλά, η $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^4+y^4+1}$ είναι περιττή,

οπότε
$$I=\int_0^1 0\,dy = 0.$$

(3) $I = \iint_A e^{y^2}\,dxdy = ?$, όπου A το τρίγωνο που φράσσεται από την ευθεία $y=x$, τον Oy κ' την ευθεία $y=1$.



Για $y \in [0,1]$ σταθερό, το x κινείται μεταξύ 0, y, οπότε

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

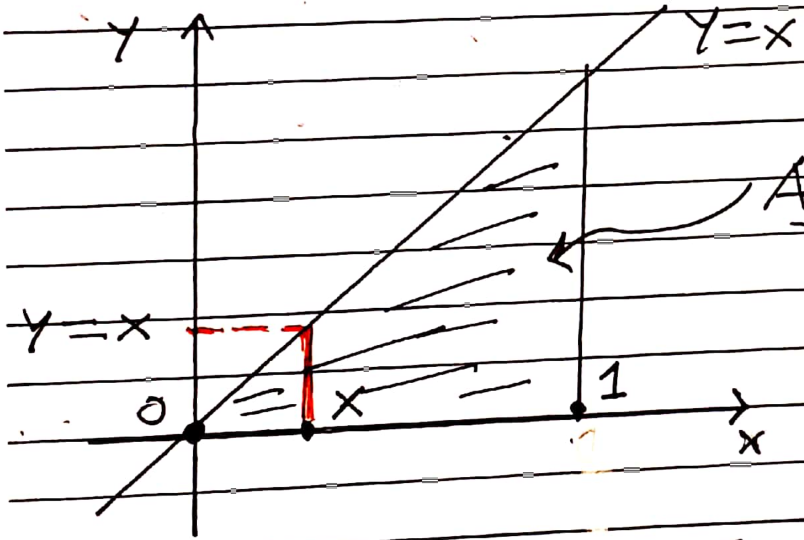
Σημ. ότι το A είναι κ' x–απλό, αλλά δεν εξυπηρετεί να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y, διότι η e^{y^2} δεν έχει παράγουσα να εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

(4) Να υπολογίσετε το $I=\int_{y=0}^{y=1} y\left(\int_{x=y}^{1}\frac{dx}{(1+x^3)^5}\right)dy$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

$I=\iint_A \frac{y}{(1+x^3)^5}\,dxdy$, όπου

$A=\{(x,y)\mid y\in[0,1],\ \ y\le x\le 1\}$



Το θεωρούμε ως x−απλό.

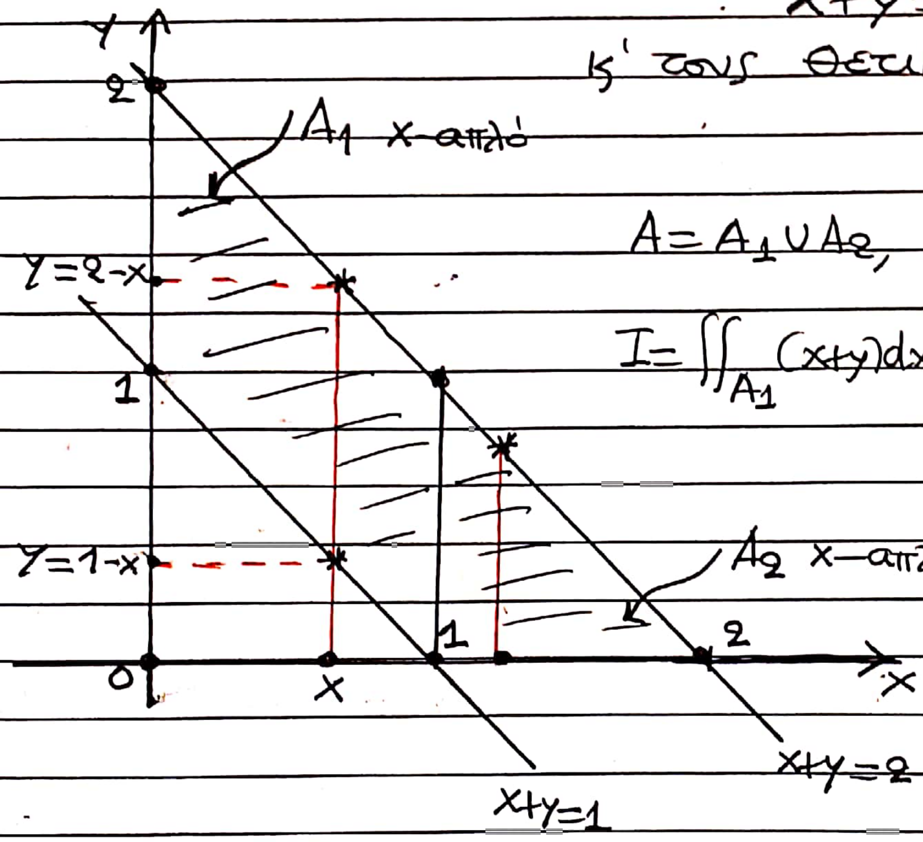
Για σταθερό $x\in[0,1]$, είναι $y\in[0,x]$, οπότε

$$I=\int_0^1\left(\int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5}\,dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^5}\,dx \overset{[u=1+x^3]}{=} \frac{1}{6}\int_1^2\frac{du}{u^5}$$

$$=-\frac{1}{24}u^{-4}\Big|_1^2=\dots$$

(5) $I = \iint_A (x+y)\,dxdy = ?$, όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$ κ' τους θετικούς ημιάξονες.



$A = A_1 \cup A_2$, $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 = \emptyset$

$I = \iint_{A_1} (x+y)\,dxdy + \iint_{A_2} (x+y)\,dxdy.$

• Υπολογισμός του $\iint_{A_1} (x+y)\,dxdy$.

Για $x \in [0,1]$, σταθερό, είναι $y \in [1-x, 2-x]$, οπότε

$$\iint_{A_1} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{2-x} (x+y)\,dy \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x+y)^2 \Big|_{y=1-x}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2^2 - 1^2) = 3/2.$$

• Υπολογισμός του $\iint_{A_2} (x+y)\,dx\,dy$.

Για $x \in [1,2]$ σταθερό, είναι $y \in [0, 2-x]$, οπότε

$$\iint_{A_2} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} (x+y)\,dy \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (x+y)^2 \Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2^2 - x^2)\,dx$$

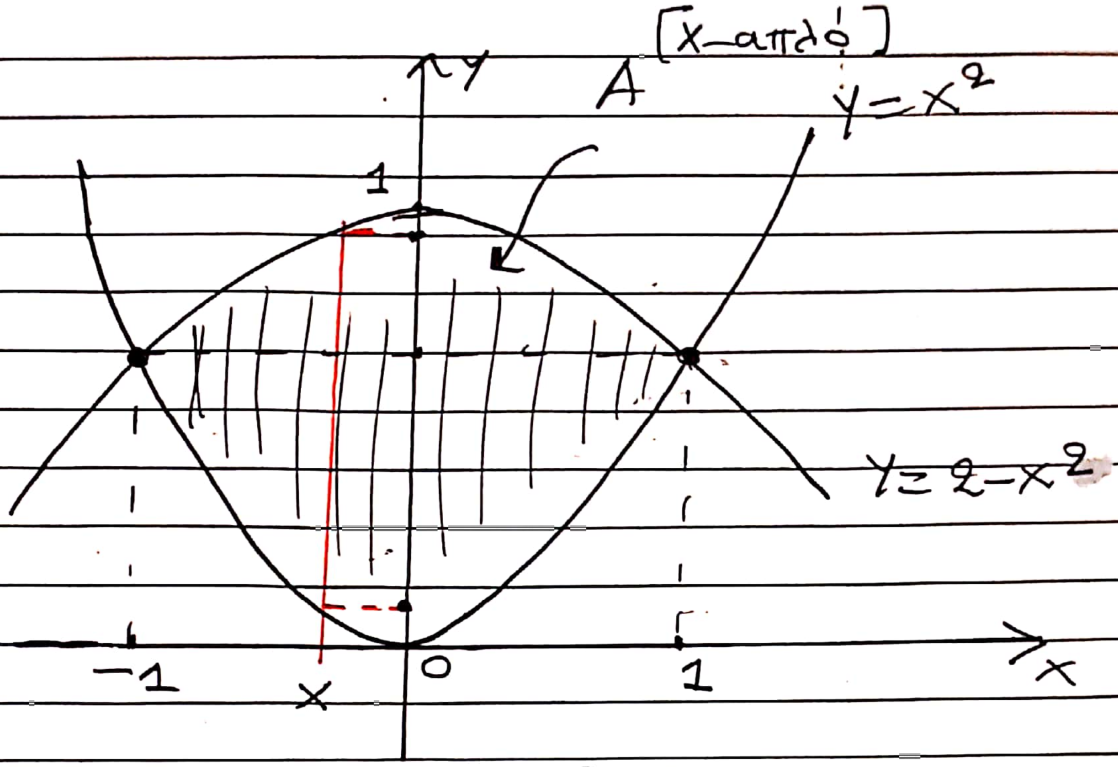
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 4\,dx - \frac{1}{2} \int_1^2 x^3\,dx = 2 - \frac{1}{8} x^4 \Big|_1^2$$

$$= 2 - \frac{16-1}{8} = 2 - \frac{15}{8}$$

$$= 1/8.$$

Άρα, $I = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$.

(6) $I = \iint_A |x|\,dx\,dy = ?$, A το χωρίο που φράσσεται από τις παραβολές $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.



Οι παραβολές $y=x^2$, $y=2-x^2$ τέμνονται στα σημεία $(1,1)$, $(-1,1)$. Το A είναι x–απλό.

Για σταθερό $x\in[-1,1]$, το y κινείται μεταξύ x^2 κ' $2-x^2$,

οπότε

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x^2}|x|\,dy\right)dx=$$

$$=2\int_{-1}^{1}|x|(1-x^2)\,dx=4\int_{0}^{1}x(1-x^2)\,dx$$

$$=4\left(\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^3\,dx\right)=\ldots$$