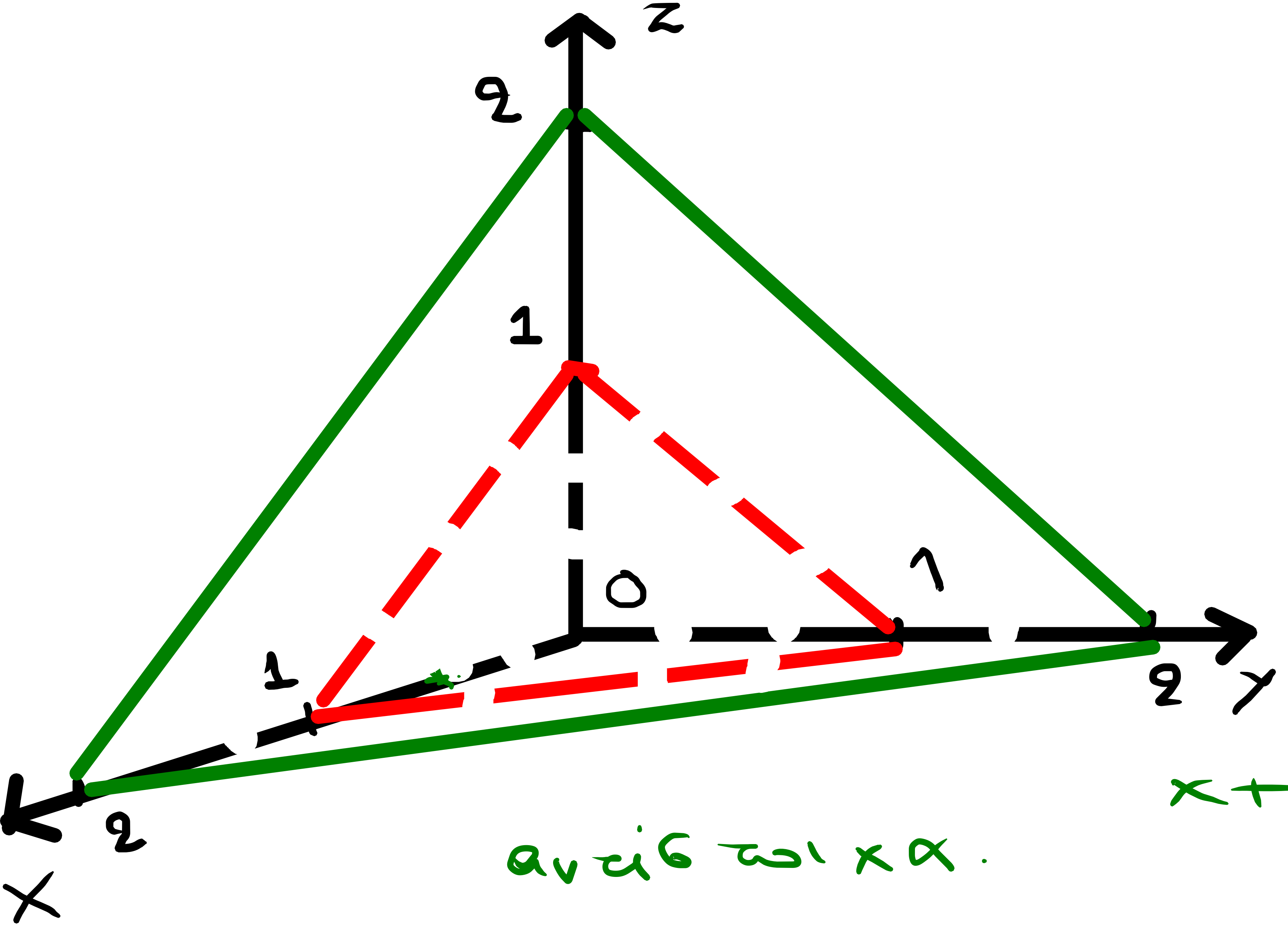
Άσκηση 10:



$x+y+z=1$

Για $z=0$,
$x+y=1$
(ευθεία στο xOy)

$x+y+z=2$

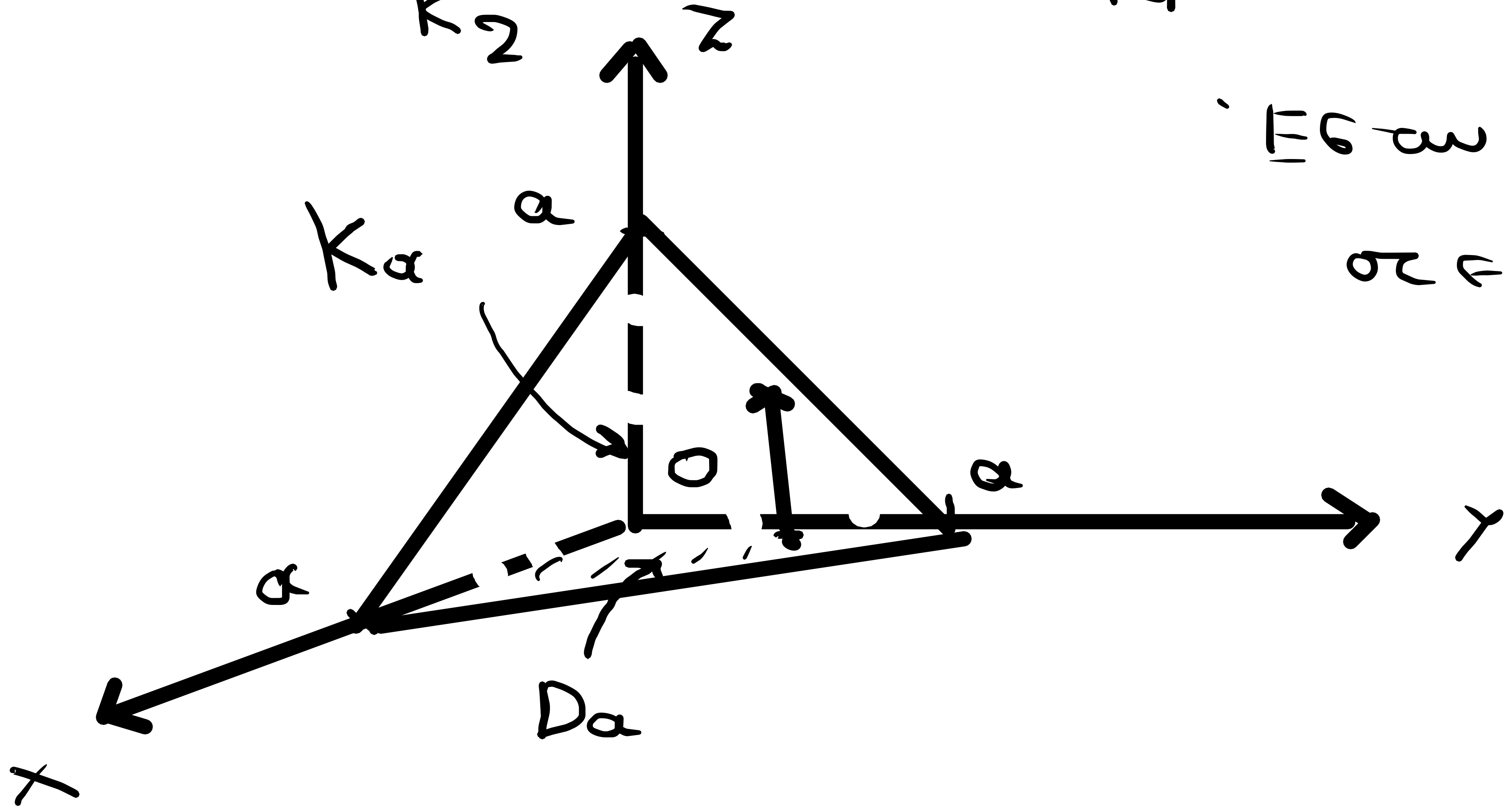
Έστω K_1, K_2 τα στερεά που βρίσκονται στο α' ογδοημόριο κ' φράσσονται από τα επίπεδα

$x+y+z=1$, $x+y+z=2$

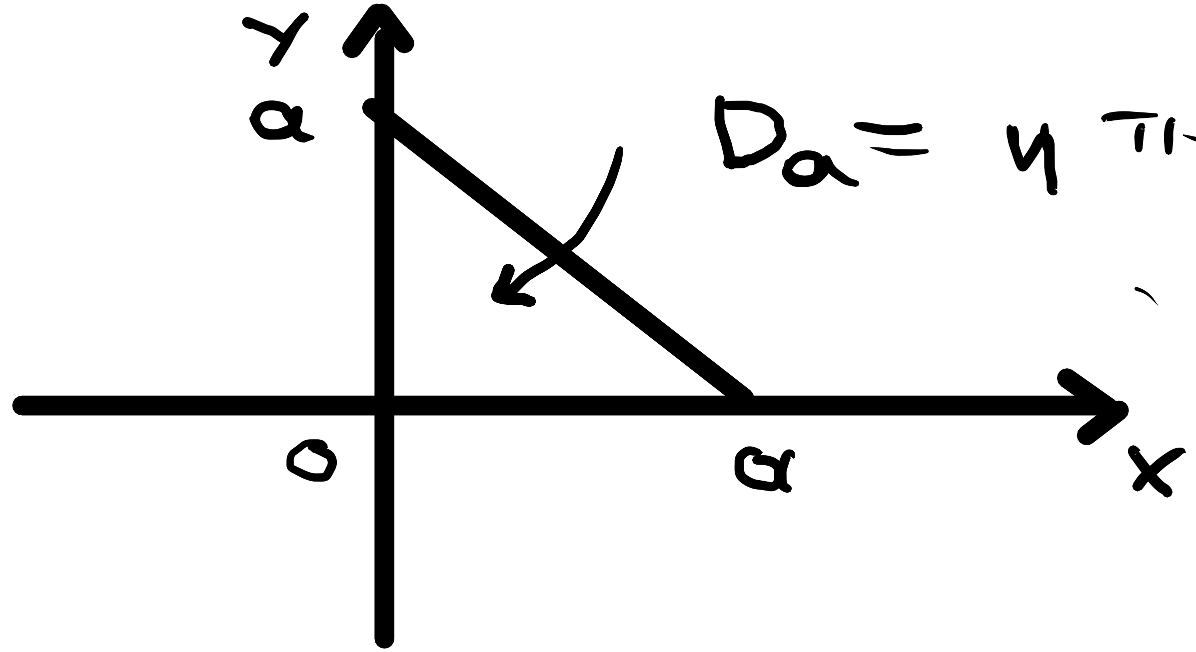
αντίστοιχα.

Το ζητούμενο ολοκλ. =

$$= \iiint_{K_2} f - \iiint_{K_1} f, \quad f(x,y,z) = (x+y+z+1)^{-4}$$



Έστω α>0 κ' K_α το στερεό του α' ογδοημορίου που φράσσεται από το επίπεδο $x+y+z=\alpha$



D_a = η προβολή του K_a στο xOy.

Για σταθερό $(x,y) \in D_a$

κ' $(x,y,z) \in K_a$, έχουμε $0 \le z \le a-x-y$

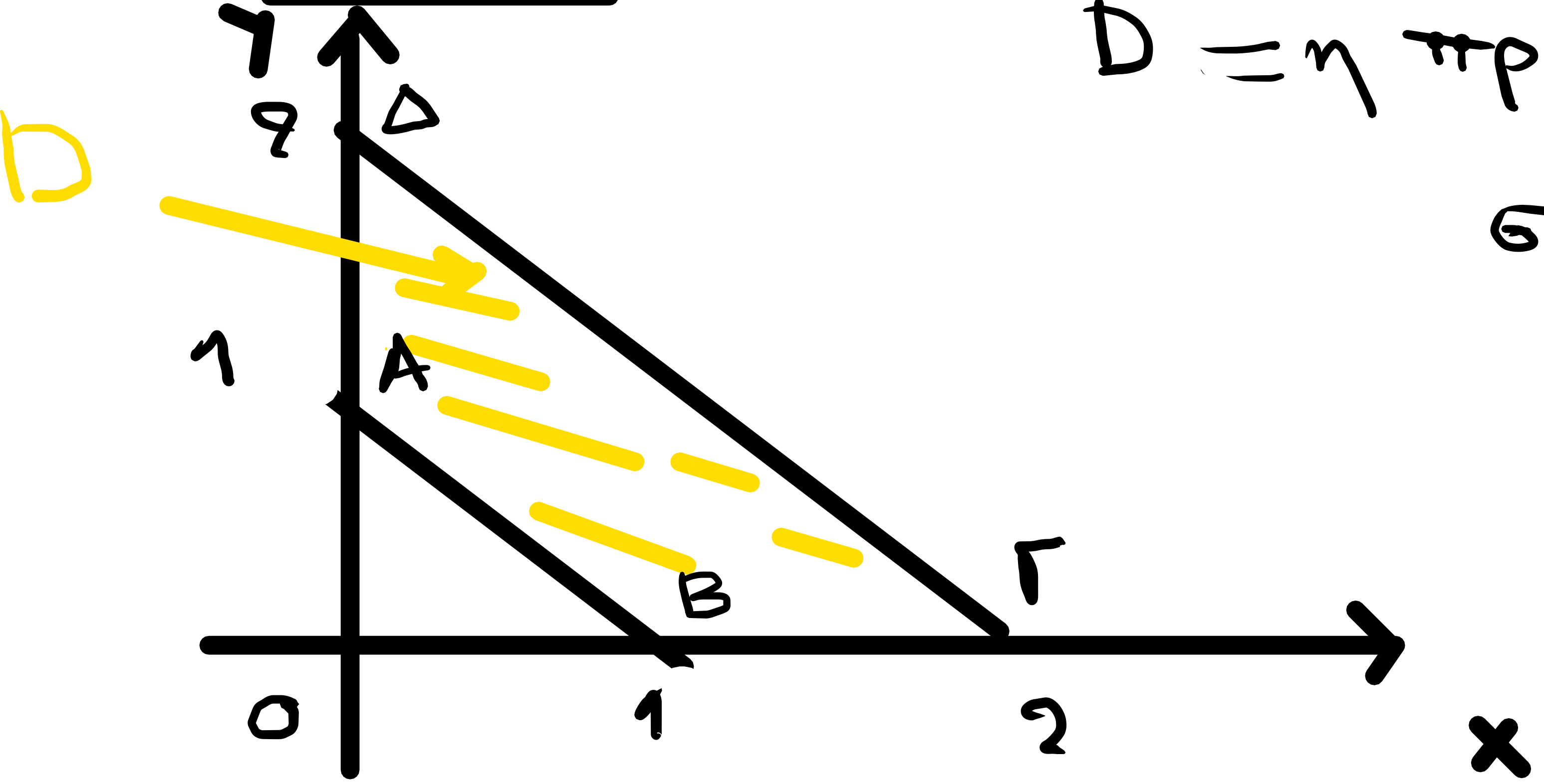
$$\Rightarrow \iiint_{K_a} f = \iint_{D_a} \left(\int_0^{a-x-y} f \, dz \right) dx\,dy = \dots$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2} - \frac{a^2}{(1+a)^3}\right) = \dots$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{a}{1+a}\right)^3 = J_a$$

Το αρχικό ζητούμενο ολοκλ. $= J_2 - J_1 = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \dots$

Αλλιώς:



D = η προβολή του αρχικού στερεού K στο xy-επίπεδο.

$$\iiint_K f = \iint_D \underbrace{\left(\int_0^{2-x-y} f\,dz\right)}_{\varphi(x,y)} dx\,dy$$

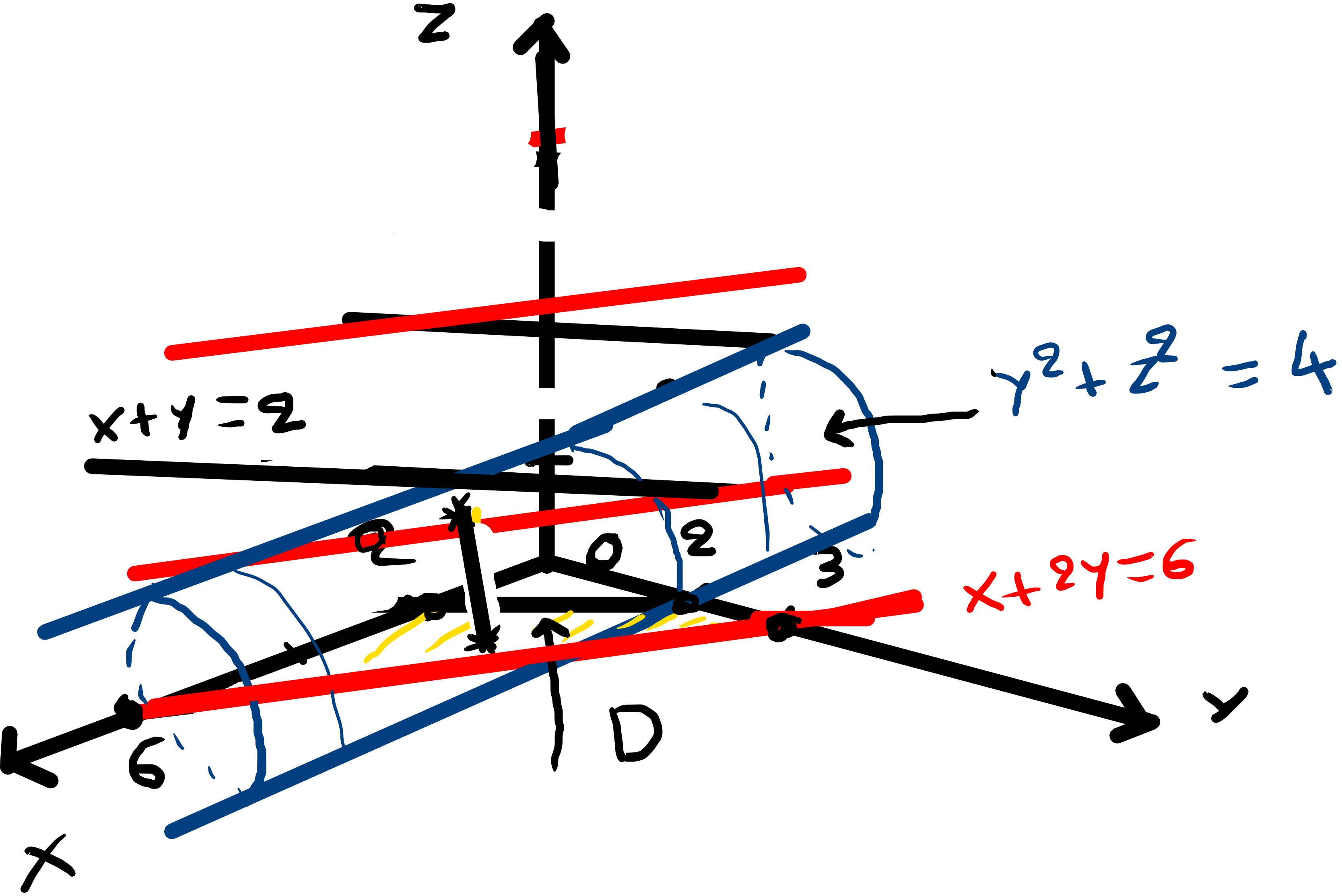
$$= \iint_{O\Gamma\Delta} \varphi - \iint_{OAB} \varphi = \cdots$$

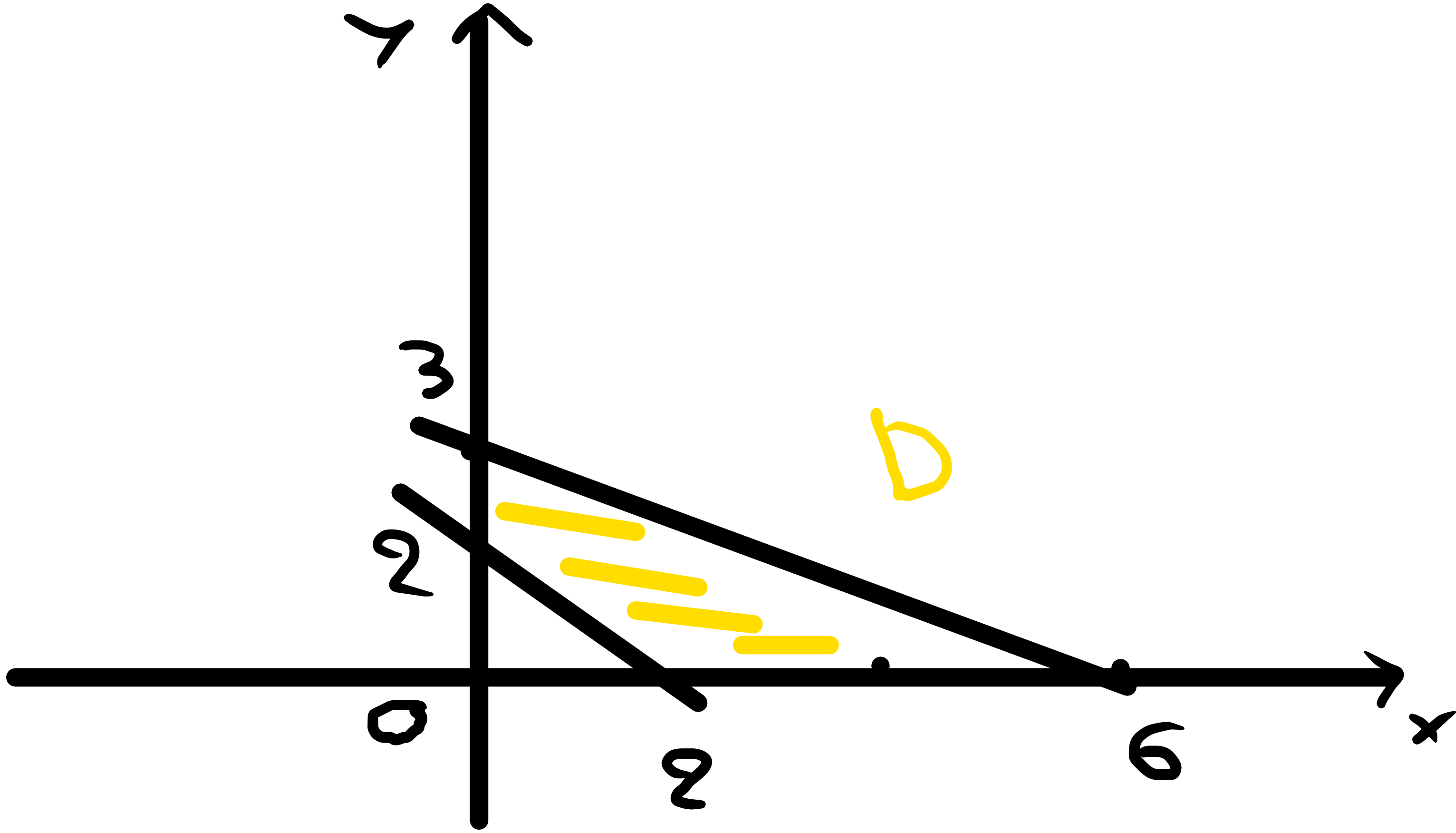
Άσκηση 12:

Επίπεδα : $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=6 \end{cases}$

" z

$$K=\{(x,y,z) : (x,y)\in D, \; 0\le z\le \sqrt{4-y^2}\}$$

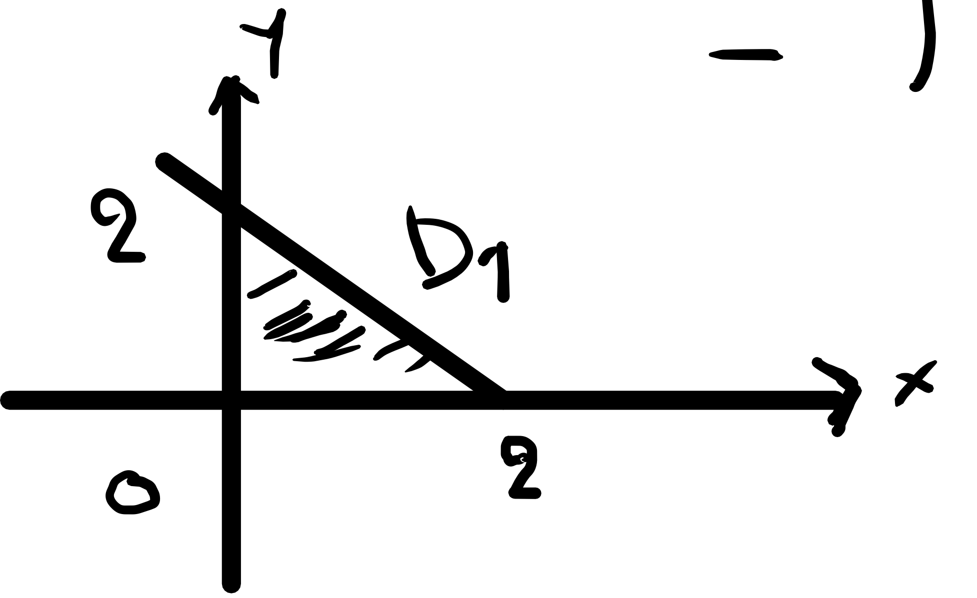


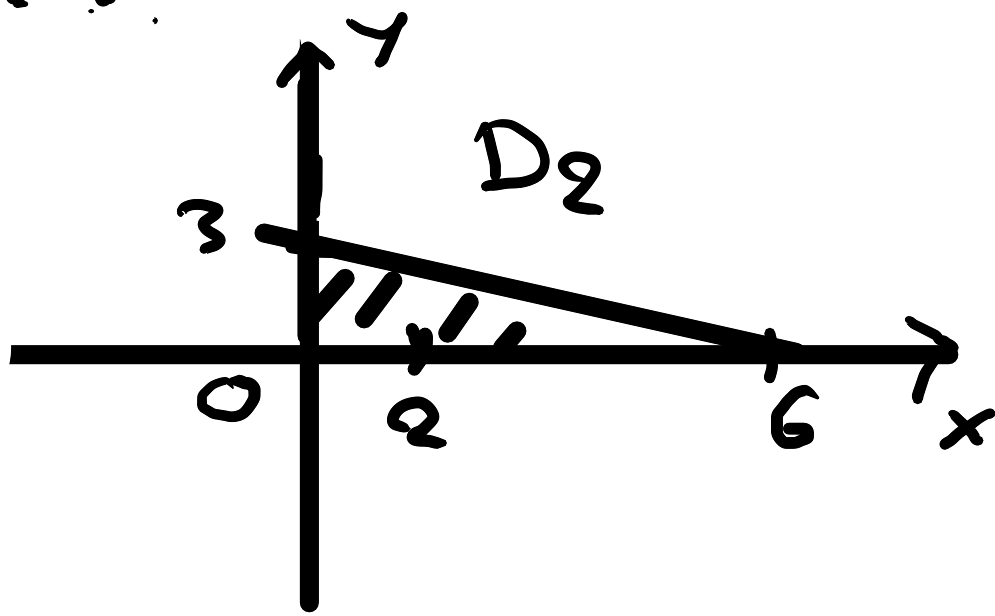


$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\,dz \right) dx\,dy$$

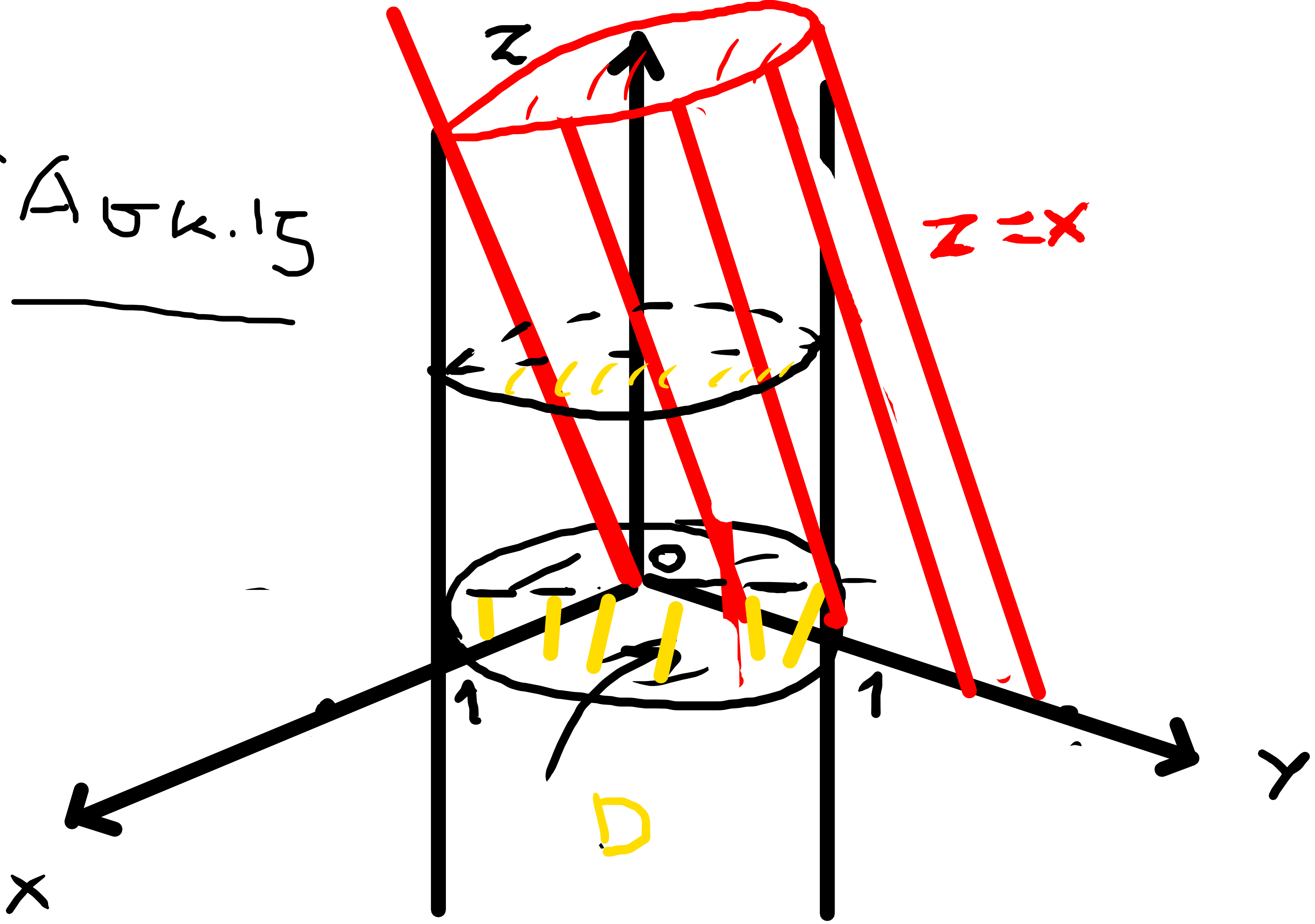
$$= \frac{1}{2}\iint_D (4-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\left[\iint_{D_2} (4-y^2)\,dx\,dy \,- \right.$$

$$\left. - \iint_{D_1} (4-y^2)\,dx\,dy \right] = \cdots$$





Άσκ. 15



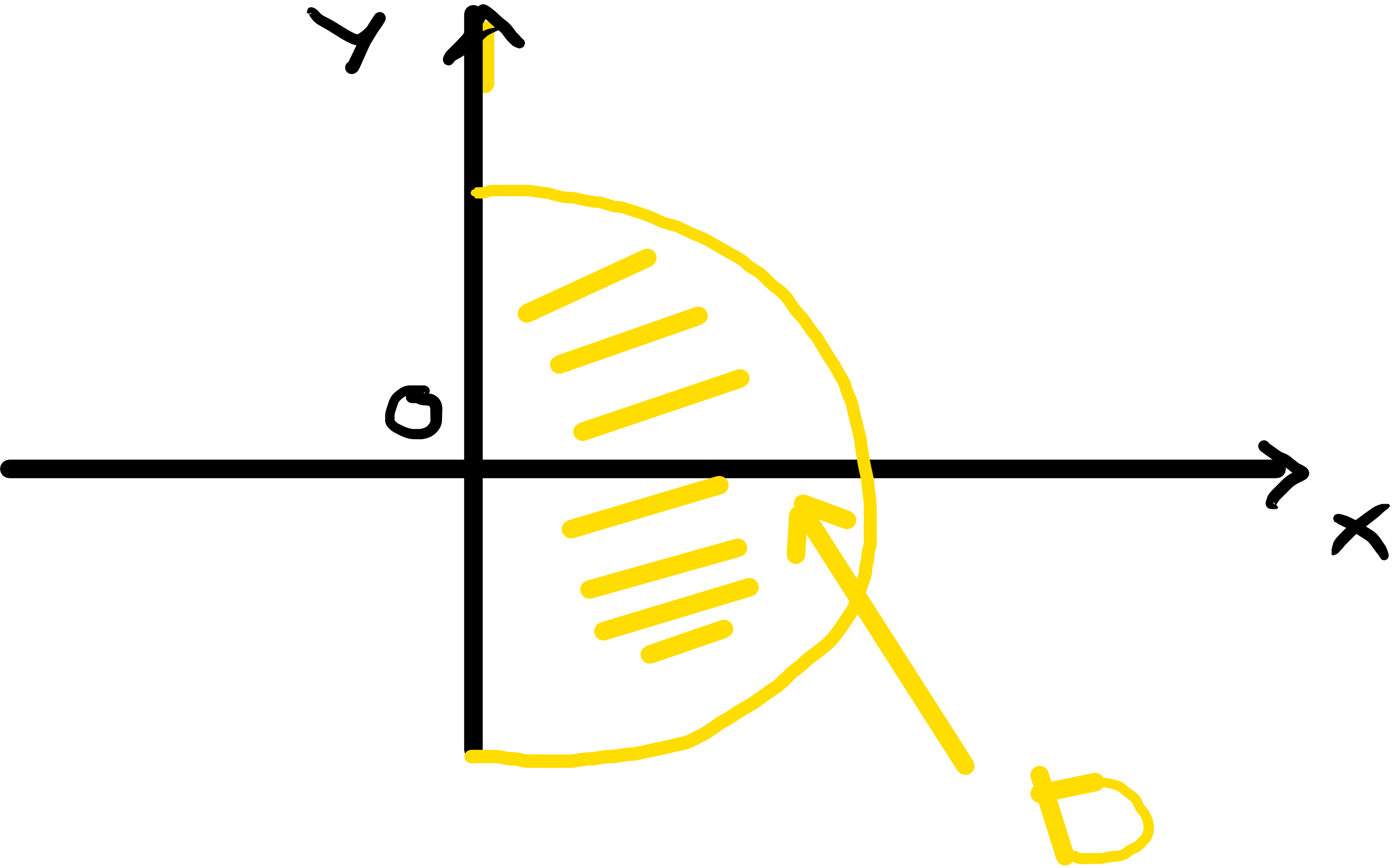
$$x^2+y^2=1$$
$$z=x$$
$$z\geq 0$$

$$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$$

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint_D\left(\int_0^x z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right)dx\,dy=$$

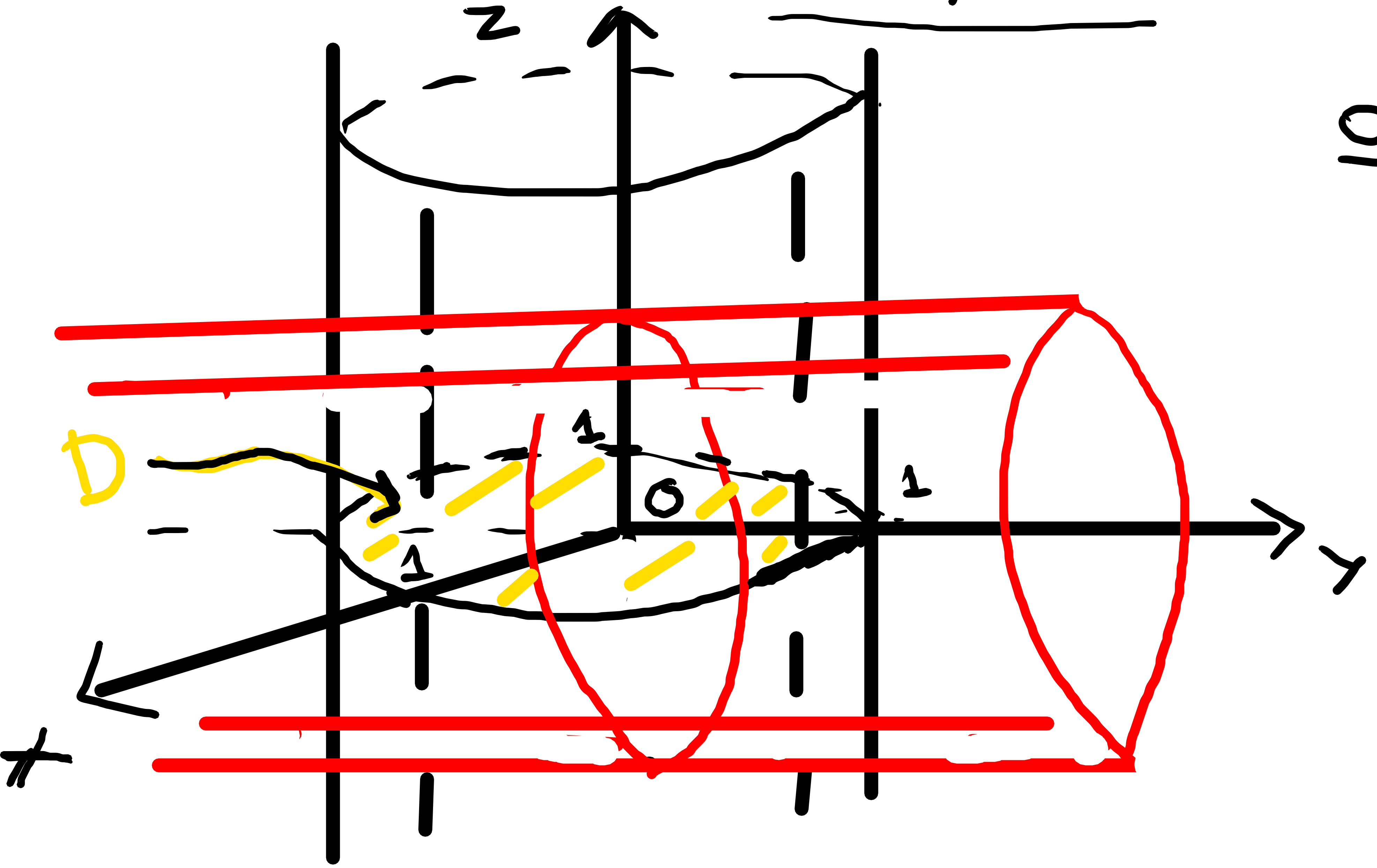
$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\;\frac{x^2}{2}\,dx\,dy \;\underset{y=r\sin\varphi}{\overset{x=r\cos\varphi}{=}}\; \cdots \; \frac{\pi}{20}$$



$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$$

Άσκηση 18

$\underline{\Omega}$ στερεό που φράσσεται από τους κυλίνδρους $\underline{x^2+y^2=1}$, $x^2+z^2=1$



$$\underline{\Omega} = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, \; x^2+z^2 \leq 1 \}$$

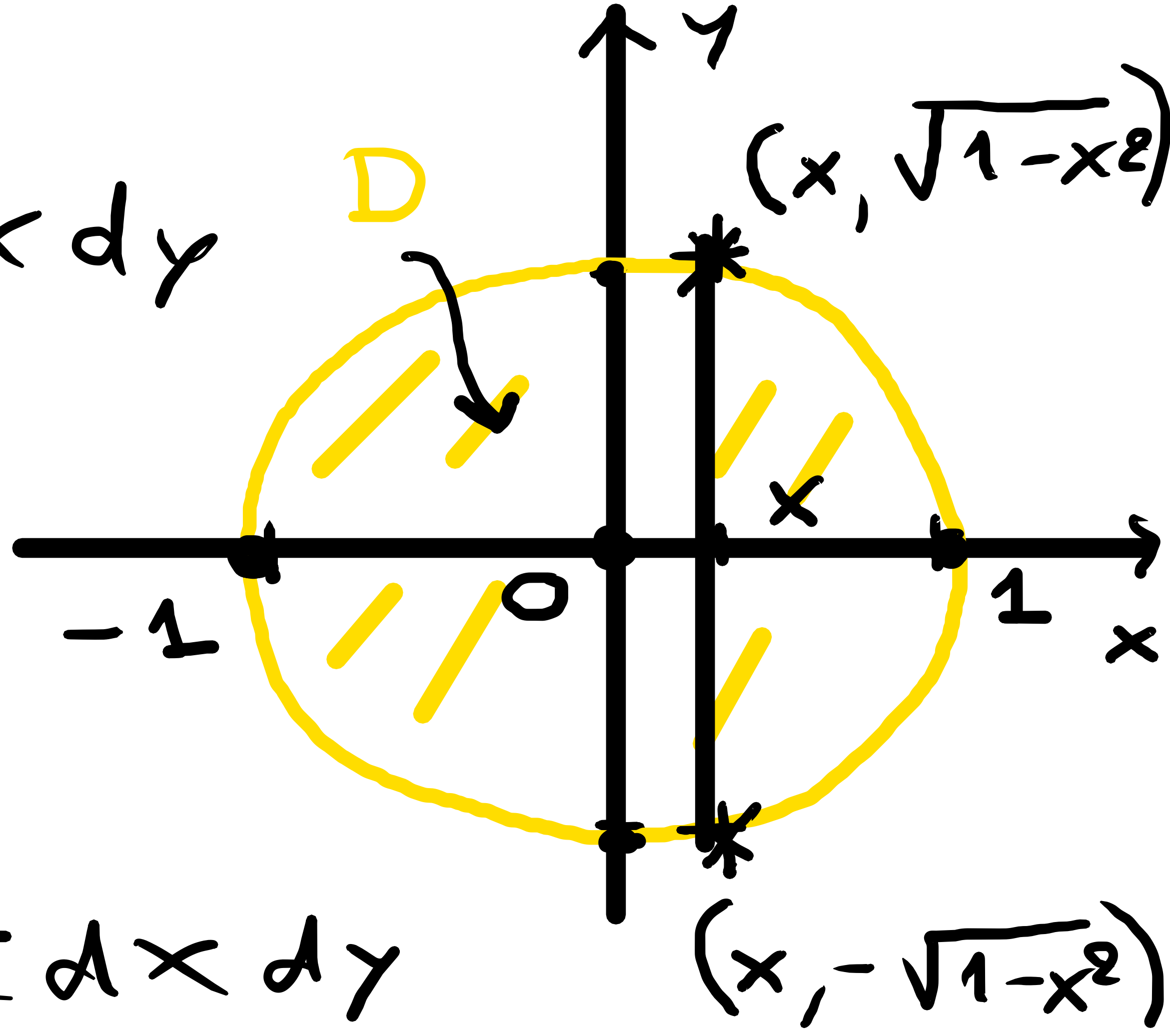
$$x^2 + z^2 \leq 1$$

$$\iff z^2 \leq 1-x^2$$

$$\iff |z| \leq \sqrt{1-x^2}$$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}$

$$V(\Omega) = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \right) dx\,dy$$



$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$$

$$V(\Omega) = 2 \iint_\Omega \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,dy \right) dx =$$

$$= 4\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 8\int_0^1 (1-x^2)\,dx =$$

$$= 8\left(1-1/3\right) = 16/3$$