

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ -ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.

02/02/2021

ΕΝΑΡΞΗ: 15:00 - ΛΗΞΗ ΥΠΟΒΟΛΗΣ: 16:45

Να αναρτήσετε ένα ενιαίο αρχείο pdf με σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις στο εργαλείο ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.
ΟΝΟΜΑ ΑΡΧΕΙΟΥ: ΤΟ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΑΣ.

ΟΜΑΔΑ Β

ΑΦΟΡΑ ΜΟΝΟ ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΜΕ Α.Μ. ΠΟΥ ΛΗΓΕΙ
ΑΠΟ 5 ΕΩΣ 9.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int_D \cos\left(\frac{y+x}{y-x}\right) dx dy,$$

όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x-1 \leq y \leq 0\}$.

(Υπόδειξη: Θέτουμε $u = y-x$, $v = y+x$.)

ΘΕΜΑ 2 (2 μ.): Εφαρμόζοντας κατάλληλα το Θ. Green, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (-y^3 + ye^x) dx + (\cos y + x^3 + e^x) dy,$$

όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (-1 + 2xz + y, 2yz^2 + x - 2y, 2y^2z + x^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να προσδιορίσετε βαθμωτή συνάρτηση Φ κλάσης C^2 τέτοια ώστε $\nabla\Phi = \vec{F}$, παρουσιάζοντας αναλυτικά τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \vec{F}$, όπου

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{4} \sin(t/8), \frac{t}{4}, t^{5/3} \cos(t/8) \right), \quad t \in [0, 4\pi].$$

ΘΕΜΑ 4 (2 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}, e^z, \sin(y^2) \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να υπολογίσετε τη ροή του \vec{F} διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2y, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

(Υπόδειξη: Θεώρημα Gauss.)

ΘΕΜΑ 5 (2 μ.): Δίνεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (-x^2, z^4 e^{z^2+y^2}, y^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου C το θετικά προσανατολισμένο χείλος (σύνορο) του τμήματος της επιφάνειας του επιπέδου $z = x+1$ που αποκόπτεται ο ελλειπτικός κώνος $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$.

(Υπόδειξη: Θεώρημα Stokes.)

(1)

ΟΜΑΔΑ Β

Θ.1.: Θέσουμε $u = y - x, v = y + x \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2}}$$

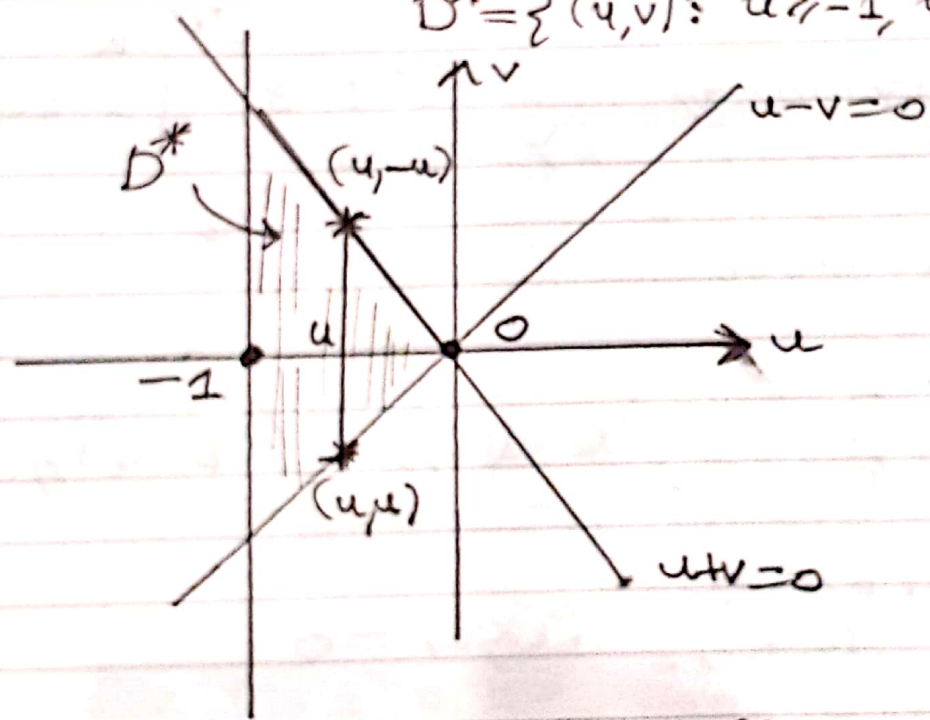
Για $(x, y) \in D$, έχουμε $x > 0 \Leftrightarrow \boxed{u - v \leq 0}$,

$y \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{u + v \leq 0}$

$y - x > -1 \Leftrightarrow \boxed{u > -1}$

\Rightarrow το D μετασχηματίζεται στο χωρίο

$$D^* = \{(u, v) : u > -1, u - v \leq 0, u + v \leq 0\}.$$



$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -1/2.$$

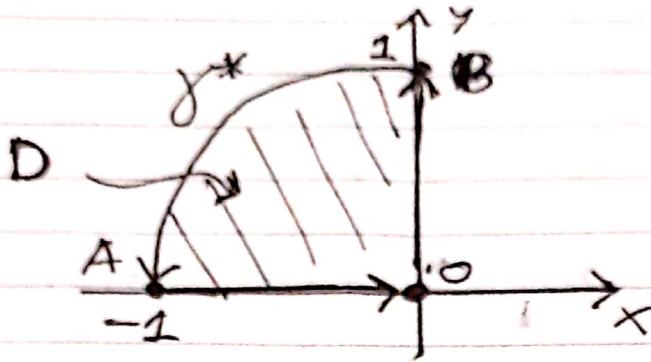
το ολοκλήρωμα παίρνεται $\iint_{D^*} \cos\left(\frac{v}{u}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv =$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D^*} \cos\left(\frac{v}{u}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left[\int_u^{-u} \cos\left(\frac{v}{u}\right) dv \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u \sin\left(\frac{v}{u}\right) \Big|_{v=u}^{v=-u} du = -\sin 1 \int_{-1}^0 u du =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 1 \right]$$

Θ.2:



Θεωρούμε την θετική προσανατολ. κλειστή τμ-αία καμπύλη

$$\Gamma = \gamma + \vec{AO} + \vec{OB}.$$

Εάν $P = -y^3 + ye^x$, $Q = \cos y + x^3 + e^x$, από θ-Green παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \\ &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \quad 3 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 r^3 dr d\varphi \\ &= \boxed{3\pi/8}, \text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \frac{3\pi}{8} - \int_{\vec{AO}} (Pdx + Qdy) - \int_{\vec{OB}} (Pdx + Qdy).$$

• Για $(x, y) \in \vec{AO}$, έχουμε $y = 0, dy = 0, P(x, 0) = 0$

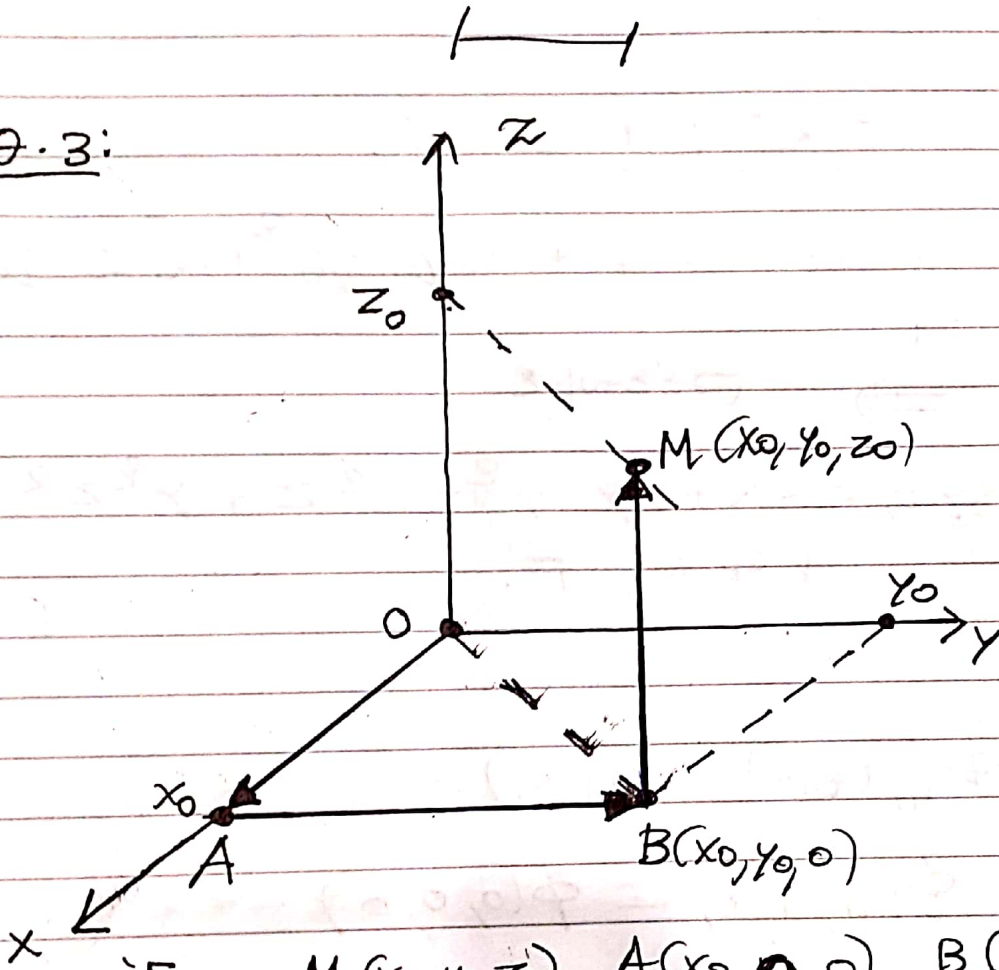
$$\Rightarrow \int_{\vec{AO}} (Pdx + Qdy) = 0.$$

• Για $(x, y) \in \vec{OB}$, έχουμε $x = 0, dx = 0, Q(0, y) = \cos y + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\vec{OB}} (Pdx + Qdy) &= \int_0^1 (1 + \cos y) dy = \\ &= 1 + \sin 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area, } \int_C (P dx + Q dy) &= \frac{3\pi}{8} - 0 - 1 - \sin 1 \\ &= \boxed{\frac{3\pi}{8} - 1 - \sin 1} \end{aligned}$$

Θ.3:



Έστω $M(x_0, y_0, z_0), A(x_0, 0, 0), B(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$.
Θεωρούμε την καταρτιάζη

$$\Gamma = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM}.$$

• Για $(x, y, z) \in \vec{OA}$, έχουμε $y = z = 0, x \in [0, x_0]$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} \vec{F} = \int_0^{x_0} (-1) dx = \underline{\underline{-x_0}}.$$

• Για $(x, y, z) \in \vec{AB}$, έχουμε $x = x_0, y \in [0, y_0], z = 0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} (x_0 - 2y) dy = \underline{\underline{x_0 y_0 - y_0^2}}.$$

(4)

• Για $(x, y, z) \in \vec{BM}$, έχουμε
 $x = x_0, y = y_0, z \in [0, z_0]$

$$\Rightarrow \int_{\vec{BM}} \vec{F} = \int_0^{z_0} (x_0^2 + 2y_0^2 z) dz$$
$$= \underline{\underline{x_0^2 z_0 + y_0^2 z_0^2}}$$

Επιπλέον, $\int_{\Gamma} \vec{F} = -x_0 + x_0 y_0 - y_0^2 + x_0^2 z_0 + y_0^2 z_0^2$

\Rightarrow Θέλουμε

$$\Phi(x, y, z) = -x + xy - y^2 + x^2 z + y^2 z^2$$

ή $\nabla \Phi = \vec{F}$

Επιπλέον, δόν,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \Phi(\gamma(4\pi)) - \Phi(\gamma(0)) =$$

$$= \Phi(\pi, \pi, 0) - \Phi(0, 0, 0)$$

$$= -\pi + \pi^2 - \pi^2 = \underline{\underline{-\pi}}$$

||

5

$$\begin{aligned} \text{Θ. 4: } \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{3} \frac{3}{2} (x^2+y^2)^{3/2-1} 2x + 0 + 0 \\ &= x \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

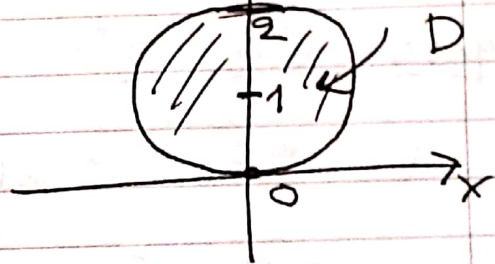
4) Η συνάρτηση που λούτα (λόγω Θ - Gauss) κτ

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_K x \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) x \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_D x (x^2+y^2)^{3/2} \, dx \, dy, \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{5}\pi/6 \end{matrix}$$

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2y\}.$$



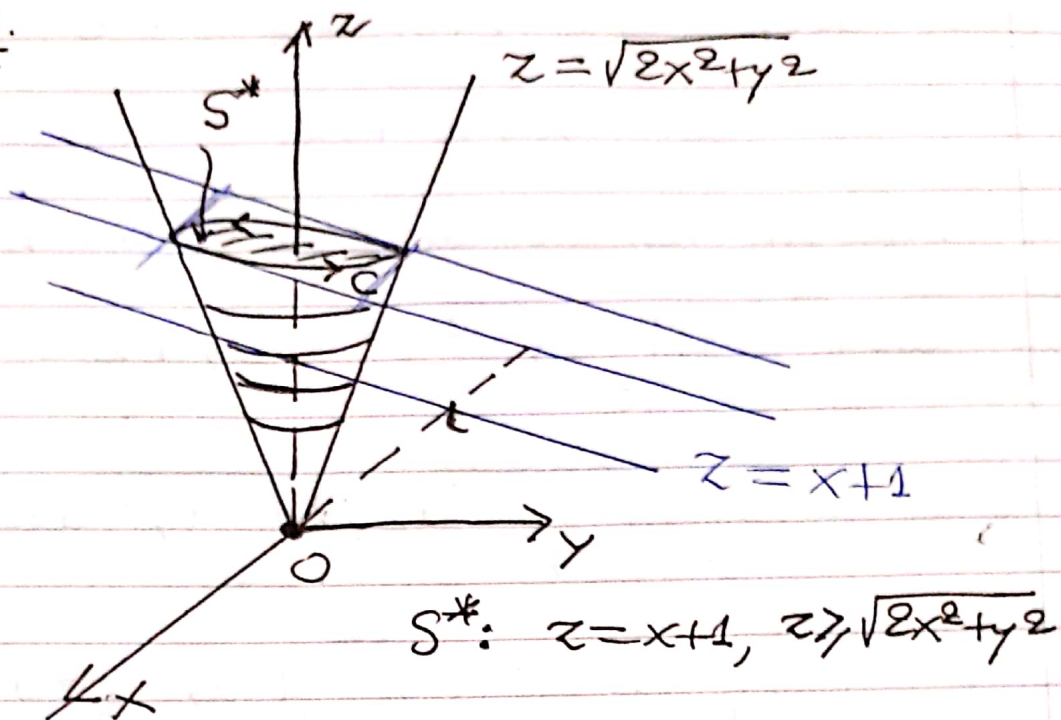
Θέτουμε $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$\{(x,y) \in D \Rightarrow \underline{0 \leq \varphi \leq \pi}, \quad r^2 \leq 2r \sin \varphi \Rightarrow \underline{0 \leq r \leq 2 \sin \varphi}\}$$

$$\text{5' } J = r \Rightarrow \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} =$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin \varphi} r^5 \cos \varphi \right) dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \frac{2^6}{6} \sin^6 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2^6}{6} \frac{\sin^7 \varphi}{7} \Big|_0^\pi = \boxed{0}.$$

0.5.

Παραμέτρηση της S^* : $S(u, v) = (u, v, 1 + u)$

$$\text{με } \sqrt{2u^2 + v^2} \leq u + 1 \Leftrightarrow 2u^2 + v^2 \leq (u + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 + v^2 \leq u^2 + 2u + 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2u \leq 1 \Leftrightarrow (u - 1)^2 + v^2 \leq 2,$$

οπότε

$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \Delta = \{(u, v) : (u - 1)^2 + v^2 \leq 2\}, \text{ με}$$

$$S(u, v) = (u, v, 1 + u).$$

Θ. Stokes $\Rightarrow \int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}^{\uparrow}(u, v) du dv.$

Έχουμε $S_u \times S_v = (-1, 0, 1)$

$$\text{η}' (S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = 1 > 0 \Rightarrow \text{το } S_u \times S_v$$

"δείχνει" προς τα έξω, αν σχεδιάσει με αρχή

$$\text{το } S(u, v) \Rightarrow \underline{\vec{n}^{\uparrow}(u, v) = (-1, 0, 1)}.$$

(7)

$\forall \rho, \forall (u, v) \in \Delta,$

$$\text{rot } \vec{F}(\Delta(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) =$$

$$= (-u^2, (u+1)^4 e^{v^2 + (u+1)^2}, v^2) \cdot (-1, 0, 1)$$

$$= u^2 + v^2 \quad \Rightarrow \quad \int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} (u^2 + v^2) du dv$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \quad \begin{array}{l} u = r \cos \rho + 1 \\ v = r \sin \rho \end{array} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left[(1 + r \cos \rho)^2 + r^2 \sin^2 \rho \right] r dr d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 + 1 + 2r \cos \rho) r dr d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^3 + r) dr + 2 \int_0^{2\pi} \cos \rho d\rho \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \boxed{4\pi}$$