ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Επίλυση ενός συστήματος 2×2

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 , δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους

Αλγεβρική επίλυση

Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Επίλυση με εξισώσεις

Επίλυση με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια):

Αλγεβρική επίλυση

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

3

Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} -3x+3y=6 \\ 5x+2y=-10 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi 1 \to \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \varepsilon\xi 1}$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ 5x+2y=-10 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi 2 \to \varepsilon\xi 2 - 5\varepsilon\xi 1}$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ 7y=0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi 2 \to \left(\frac{1}{7}\right)\varepsilon\xi 2}$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ y=0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi 1 \to \varepsilon\xi 1 + \varepsilon\xi 2}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x=-2, y=0$

Λύση με χρήση πινάκων

$$[A|b] = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 5\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{7}\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [A_R|b_R]$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 , με μία και μοναδική λύση

Γεωμετρική Ερμηνεία

Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} \boxed{-3x + 3y = 6} \\ \boxed{5x + 2y = -10} \end{cases}$$

Ως προς τις στήλες

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$x \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1:

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 , με μία και μοναδική λύση

Γεωμετρική Ερμηνεία

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

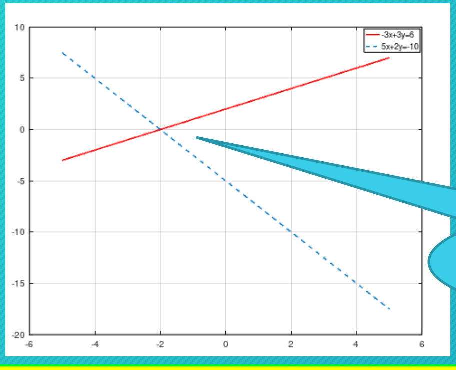
Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

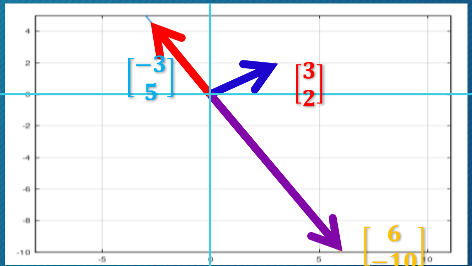
Ως προς τις στήλες

$$x \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x = -2, y = 0$



το σημείο τομής των δύο ευθειών (-2,0)



Δυο ευθείες στον χώρο R^2

… που τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = (-2, 0)$

Δυο διανύσματα στον χώρο R^2

… ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός τους μπορεί να δημιουργήσει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$

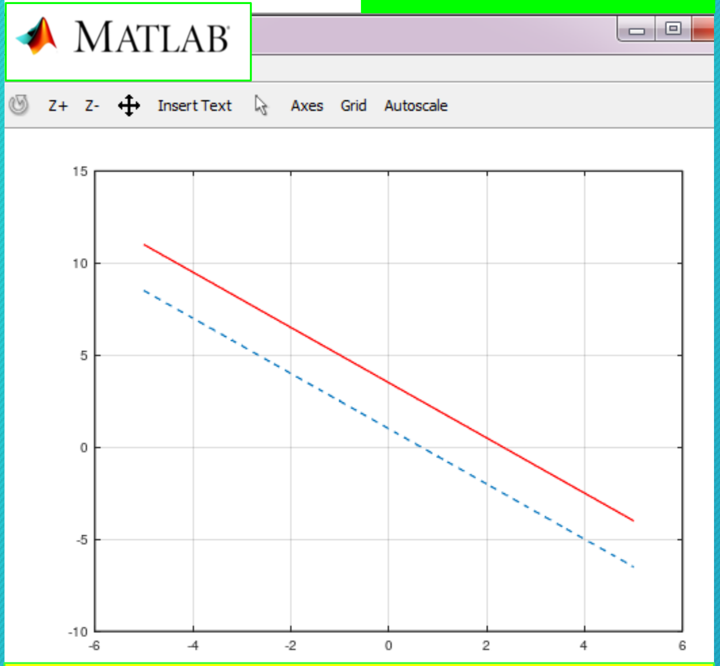
… Αυτός ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός προκύπτει για $x = -2, y = 0$

Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος 2×2


```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=-1.5*x+3.5;
>> z=-1.5*x+1;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 2

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

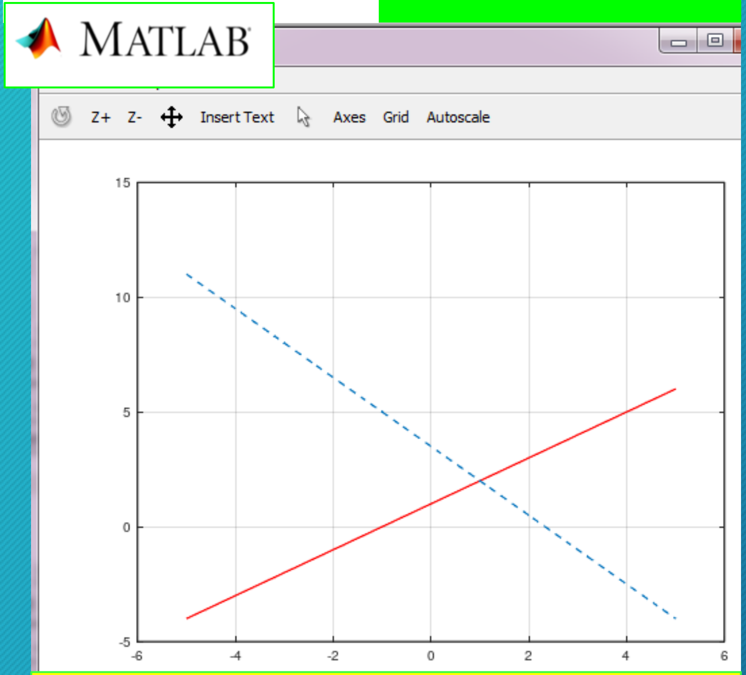


Το σύστημα δεν έχει λύση

```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=x+1;
>> z=-1.5*x+3.5;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 3

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

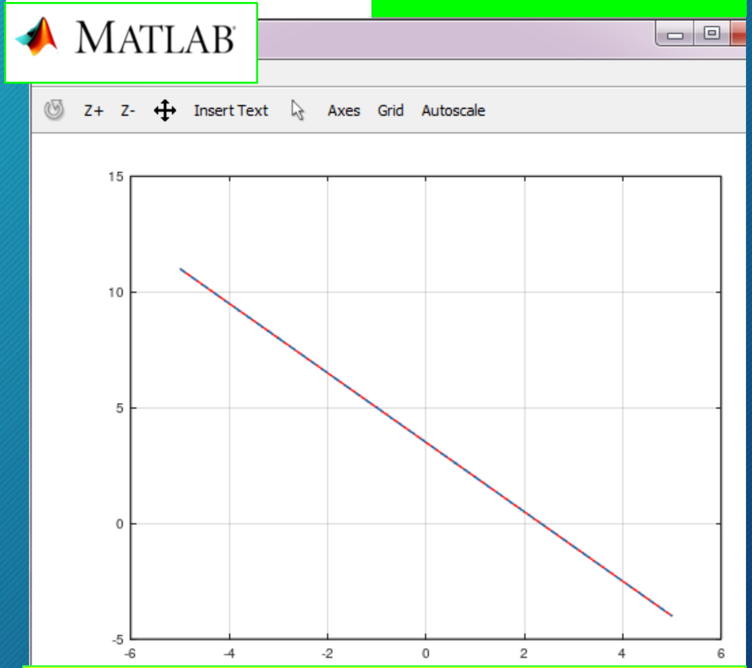


Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x=1, y=-2$

```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=-1.5*x+3.5;
>> z=(-6/4)*x+14/4;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 4

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 6x+4y=14 \end{cases}$$



Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις