ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
11α. Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Άσκηση 1

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A και $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμά του με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

Το διάνυσμα $7\vec{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $3A^2 + 5A + I$;

Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

Αφού το $\vec{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ, τότε ισχύει: $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$

Για να δούμε αν είναι ιδιοδιάνυσμα του $3A^2 + 5A + I$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο: $(3A^2 + 5A + I) \cdot 7\vec{u}$

Προσπαθούμε να το φέρουμε στη μορφή
$$\left(3A^2 + 5A + I\right) \cdot 7\vec{u} = \mu \cdot 7\vec{u}$$
τότε το μ θα είναι η ιδιοτιμή του.

Άσκηση 1-Λύση (συνέχεια)

- $$\boldsymbol{(3A^2+5A+I)\cdot 7\vec{u} = 3A^2\cdot 7\vec{u} + 5A\cdot 7\vec{u} + I\cdot 7\vec{u} = 3\cdot 7\cdot (A^2\cdot\vec{u}) + 5\cdot 7(A\cdot\vec{u}) + 7\cdot (I\cdot\vec{u}) =}$$

$$\boldsymbol{= 3\cdot 7\cdot [A\cdot (A\cdot\vec{u})] + 5\cdot 7\cdot (A\cdot\vec{u}) + 7\cdot\vec{u} =}$$

$$\boldsymbol{= 3\cdot 7\cdot [A\cdot (\lambda\cdot\vec{u})] + 5\cdot 7\cdot (\lambda\cdot\vec{u}) + 7\cdot 1\cdot\vec{u} =}$$

$$\boldsymbol{= 3\cdot 7\cdot [\lambda\cdot (A\cdot\vec{u})] + 5\cdot 7\cdot (\lambda\cdot\vec{u}) + 1\cdot 7\cdot\vec{u} =}$$

$$\boldsymbol{= 3\cdot 7\cdot [\lambda\cdot (\lambda\cdot\vec{u})] + 5\cdot 7\cdot (\lambda\cdot\vec{u}) + 1\cdot 7\cdot\vec{u} =}$$

$$\boldsymbol{= 3\cdot 7\cdot (\lambda^2\cdot\vec{u}) + 5\cdot 7\cdot (\lambda\cdot\vec{u}) + 1\cdot 7\cdot\vec{u} =}$$

$$\boldsymbol{= 3\lambda^2\cdot (7\vec{u}) + 5\lambda\cdot (7\vec{u}) + 1\cdot (7\vec{u}) =}$$

$$\boldsymbol{= (3\lambda^2+5\lambda+1)\cdot 7\vec{u}}$$

Η τελευταία σχέση μας φανερώνει, αφού $7\vec{u}\neq\vec{0}$, ότι το $\overrightarrow{7u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $3A^2+5A+I$ με ιδιοτιμή $\boxed{3\lambda^2+5\lambda+1.}$

Σημείωση: $\vec{u} = 1\cdot\vec{u}$ (βαθμωτός πολλαπλασιασμός) και $\vec{u} = I\cdot\vec{u}$ (πολλαπλασιασμός πινάκων)

Άσκηση 2

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A και $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμά του με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, το $\vec{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^{-1}; Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

Αφού το $\vec{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ, τότε ισχύει: $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$

$$\boldsymbol{A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \overset{}{\underset{A\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\varepsilon\psi\iota\mu o\varsigma}{\Longleftrightarrow}} A^{-1} \cdot A \cdot \vec{u} = A^{-1} \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) \Leftrightarrow}$$

Αφού A αντιστρέψιμος, $detA \neq 0$, άρα καμία ιδιοτιμή ίση με 0, επομένως $\lambda \neq 0$ και μπορούμε να διαιρέσουμε με λ.

$$\boldsymbol{I \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (A^{-1} \cdot \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot (A^{-1} \cdot \vec{u}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{u} = A^{-1} \cdot \vec{u}.}}$$

Η τελευταία σχέση μας φανερώνει, αφού $\vec{u} \neq \vec{0}$, ότι το $\vec{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{A^{-1}}$ με ιδιοτιμή $\frac{1}{\lambda}$.