# Σφαίρα

Κατσουλέας Γιώργος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

*gekats@mail.ntua.gr*

23 Δεκεμβρίου 2020

# Σφαίρα

## Θεώρημα

Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

1. Η σφαίρα με κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα $\alpha$ έχει εξίσωση:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha^2.$$
2. Η εξίσωση
$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \tag{1}$$
είναι εξίσωση σφαίρας με κέντρο
$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$$
και ακτίνα
$$\alpha = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \text{αν} \quad A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta > 0.$$

# Σφαίρα

Παρατήρηση: Μϊα εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $x, y, z$ αναπαριστά σφάιρα αν και μόνον αν

1. Οι συντελεστές των $x^2, y^2, z^2$ είναι ίσοι.
2. Η εξίσωση δεν έχει όρους που να περιλαμβάνουν τα γινόμενα $xy, yz, xz$.

Εφαρμογές:

1. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας που δίνεται από τη σχέση
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11.$$
2. Αναπαριστά η εξίσωση
$$2x^2 + 1 + 2y^2 + 3 + 2z^2 + 5 = 0$$
κάποια σφαίρα;
3. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας που δίνεται από τη σχέση
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z.$$

Εφαρμογή 1: Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας $(\Sigma)$, αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $(0,0,0),(0,1,-1),(-1,2,0)$ και $(1,2,3) \in (\Sigma)$.

Λύση:

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα σημεία στην εξίσωση της σφαίρας (1), έχουμε με αντικατάσταση:

$$\begin{cases} 0^2+0^2+0^2+A\cdot 0+B\cdot 0+\Gamma\cdot 0+\Delta=0, \\ 0^2+1^2+(-1)^2+A\cdot 0+B\cdot 1+\Gamma\cdot(-1)+\Delta=0, \\ (-1)^2+2^2+0^2+A\cdot(-1)+B\cdot 2+\Gamma\cdot 0+\Delta=0, \\ 1^2+2^2+3^2+A\cdot 1+B\cdot 2+\Gamma\cdot 3+\Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{15}{7}, \\ B=-\frac{25}{7}, \\ \Gamma=-\frac{11}{7}, \\ \Delta=0. \end{cases}$$

Εφαρμογή 2: Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας $(\Sigma)$, αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $A(-3,5,1)$ και $B(3,1,7) \in (\Sigma)$ είναι αντιδιαμετρικά.
Λύση: Το κέντρο της σφαίρας $K(x_K, y_K, z_K)$ προσδιορίζεται από

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0, \;\; y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+1}{2} = 3, \;\; z_K = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$$

Επίσης, η διάμετρος της σφαίρας βρίσκεται

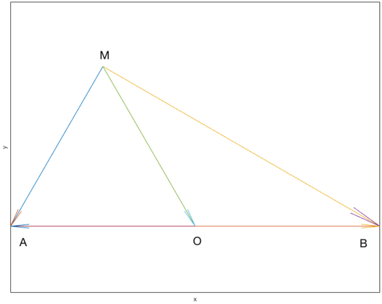
$$\begin{aligned} 2r = \|AB\|^2 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{(3+3)^2 + (1-5)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+16+36} = 2\sqrt{22}, \end{aligned}$$

ώστε $r = \sqrt{22}$. Η εξίσωση της ζητούμενης σφαίρας είναι

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 22.$$

Εφαρμογή 3: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χωρου που “βλέπουν” δοθέν ευθύγραμμο τμήμα με ορθή γωνία.

Λύση: Έστω $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος και $M(x, y, z)$ σημείο του τόπου.




Τότε $(\widehat{AMB}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0.$

Εφαρμογή 3: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χωρου που "βλέπουν" δοθέν ευθύγραμμο τμήμα με ορθή γωνία.

Λύση: Έστω $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος και $M(x, y, z)$ σημείο του τόπου.
Τότε $(\widehat{AMB}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$.
Α′ τρόπος: Αν $O$ μέσον του $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$), τότε

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\
\langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MO} \rangle + \langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB} \rangle + \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MO} \rangle + \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\
\left\| \overrightarrow{MO} \right\|^2 - \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\
\left\| \overrightarrow{MO} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{OA} \right\|^2 &= \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \right\|^2, \quad \text{σταθερό.}
\end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας $\left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \right\|$.

# Ισοδύναμος χαρακτηρισμός

Εφαρμογή 3: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χωρου που “βλέπουν” δοθέν ευθύγραμμο τμήμα με ορθή γωνία.

Λύση: Έστω $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος και $M(x, y, z)$ σημείο του τόπου.
Τότε $\widehat{(AMB)} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0.$
B′ τρόπος:

$$\langle (x - x_A, y - y_A, z - z_A), (x - x_B, y - y_B, z - z_B) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 =$$
$$\left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - x_A x_B\right] + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - y_A y_B\right] + \left[\left(\frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 - z_A z_B\right] =$$
$$= \left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2 > 0.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι σφαίρα κέντρου 0 και ακτίνας $\left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \right\| = \left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2.$

Εφαρμογή 4: Να εξεταστεί κατά πόσον η ευθεία $(\epsilon) : \frac{x+3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ εφάπτεται στη σφαίρα $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 10z = 10$.
Λύση: Τα σημεία της ευθείας έχουν τη μορφή $(4t - 3, 3t - 4, 5t)$, όπου $t \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς, τυχόν σημεία της ευθείας που βρίσκονται πάνω στη σφαίρα ικανοποιούν

$$(4t-3)^2 + (3t-4)^2 + 25t^2 + 4(4t-3) + 6(3t-4) + 10(5t) = 10 \Leftrightarrow$$

$$50t^2 + 36t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 + 2200}}{100}$$

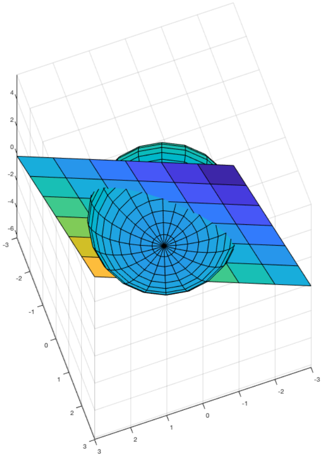
δηλαδή βρέθηκαν δύο διακριτά σημεία τομής.
Β′ Τρόπος: Προσδιορισμός κέντρου $K$ σφαίρας $(\Sigma)$ και εύρεση απόστασής του από την ευθεία $(\epsilon)$ μέσω του τύπου

$$d(K, \epsilon) = \frac{\left\|(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a}\right\|}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|},$$

όπου $\overrightarrow{r_0} = (-2, -3, -5)$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου $K$, $\overrightarrow{r_1} = (-3, -4, 0) \in (\epsilon)$ και $\overrightarrow{a} = (4, 3, 5)$ το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας.

# Τομή Επιπέδου – Σφαίρας

$$(\pi) \cap (\Sigma) = ?$$



# Τομή Επιπέδου – Σφαίρας

## Θεώρημα

Έστω $d = d(K, (\pi))$, όπου $K$ το κέντρο της σφαίρας. Αν:

1. $d > R$, τότε δεν υπάρχουν σημεία τομής.
2. $d = R$, τότε υπάρχει ένα σημείο επαφής (το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα).
3. $d < R$, τότε η τομή είναι κύκλος ακτίνας $\sqrt{R^2 - d^2}$ με κέντρο την προβολή του $K$ στο $(\pi)$.

Εφαρμογή 5: Δίνονται

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\Sigma),$$
$$x + y + z = \frac{1}{6}, \quad (\pi).$$

Ποια η τομή τους;

Λύση: Έχουμε

$$d = d(K, (\pi)) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - \frac{1}{6}|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} < 1 = R,$$

δηλαδή η τομή είναι κύκλος με ακτίνα

$$r^2 = 1^2 - \frac{1}{6^2 \cdot 3} = \frac{107}{6^2 \cdot 3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{107}}{6\sqrt{3}}.$$

Εφαρμογή 5: Δίνονται

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\Sigma),$$
$$x + y + z = \frac{1}{6}, \quad (\pi).$$

Ποια η τομή τους;

Λύση: Για την εύρεση του κέντρου $K$ του κύκλου-τομής, παρατηρούμε ότι το $K$ προκύπτει ως σημείο τομής του επιπέδου $(\pi)$ με την ευθεία $(\epsilon)$ που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετη στο $(\pi)$. Γνωρίζουμε ότι $(1,1,1)\perp(\pi)$, ώστε η ευθεία $(\epsilon)$ έχει τη μορφή

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}.$$

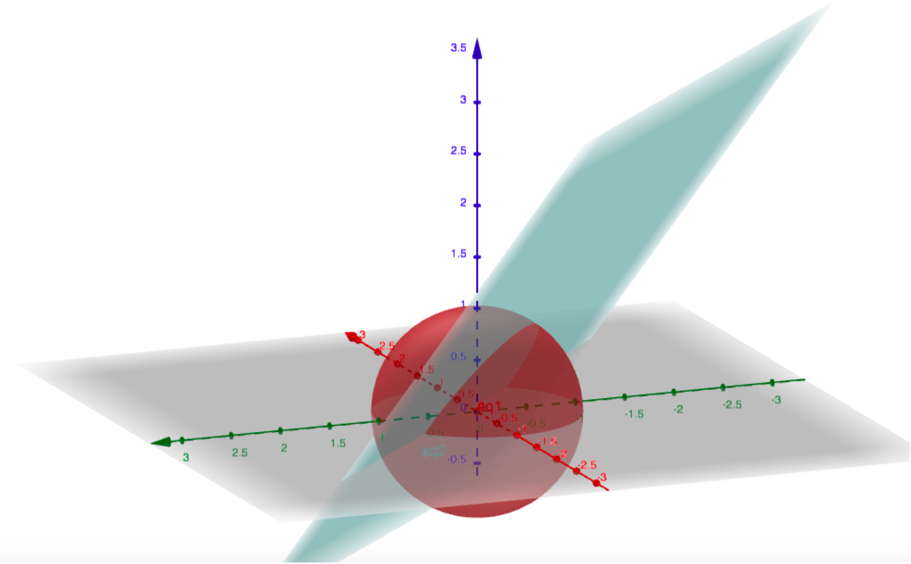
Άρα το κέντρο $K$ του κύκλου-τομής βρίσκεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = \frac{1}{6}, \\ x = y = z \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{8}.$$

Δηλαδή $K(\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{18})$ και ο κύκλος-τομή των $(\Sigma)$ και $(\pi)$ βρίσκεται

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{18})^2 + (y - \frac{1}{18})^2 + (z - \frac{1}{18})^2 = r^2 = \frac{107}{108}, \\ x + y + z = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

# Τομή Επιπέδου – Σφαίρας



# Τομή Επιπέδου – Σφαίρας: Παραδείγματα

Εφαρμογή 6: Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου στο σημείο $(2, 3, 1)$ της σφαίρας $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 6z + 4 = 0$ επιπέδου.

Λύση: Προφανώς $A(2, 3, 1) \in (\Sigma)$ και το κέντρο $K(0, 2, 3)$ της σφαίρας προσδιορίζεται

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 6z + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

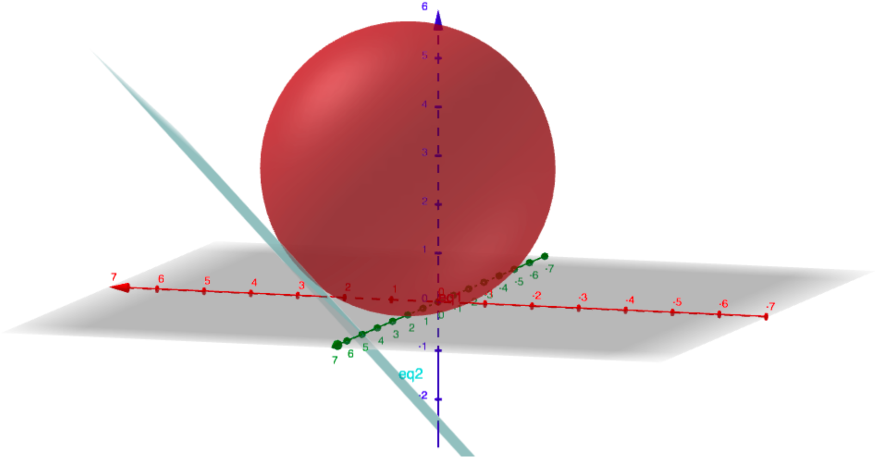
Το ζητούμενο επίπεδο $(\Pi)$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 3, -4) \in (\Sigma) \cap (\Pi)$ και έχει κάθετη διεύθυνση την $\vec{n} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK} = (x_A - x_K, y_A - y_K, z_A - z_K) = (2, 1 - 2)$.
Το τυχαίο σημείο $P(x, y, z) \in (\pi)$ του επιπέδου ικανοποιεί

$$\langle \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right), \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK}\right) \rangle = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\langle (x - 2, y - 3, z - 1), (2, 1 - 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z - 5 = 0.$$

# Εφαπτόμενο Επίπεδο



Εφαρμογή 7: Να δειχθεί ότι το επίπεδο $(\Pi): 2x - y - 2z = 16$ εφάπτεται στη σφαίρα $(\Sigma): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.

Λύση: Η σφαίρα ξαναγράφεται

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2^2 + 1^2 = 1^2 + 3 = 9,$$

δηλαδή πρόκειται για σφαίρα κέντρου $K(2, -1, -1)$ και ακτίνας $r = 3$.
Η απόσταση

$$d(K, (\Pi)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 16|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3,$$

δηλαδή ταυτίζεται με την ακτίνα της σφαίρας $(\Sigma)$.
Έστω $A(x_A, y_A, z_A) \in (\Sigma) \cap (\Pi)$ το ζητούμενο σημείο επαφής. Τότε το διάνυσμα

$$\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK}\right) \perp (\Pi) \Leftrightarrow (x_A - 2, y_A + 1, z_A + 1) = t(2, -1, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 + 2t, \\ y_A = -1 - t, \\ z_A = -1 - 2t \end{cases}.$$

Επειδή επιπλέον $A(x_A, y_A, z_A) \in (\Pi)$, έχουμε

$$2(2+2t) - (-1-t) - 2(-1-2t) = 16 \Leftrightarrow t = 1,$$

ώστε $A(4, -2, -3)$.

# Τομή Επιπέδου – Σφαίρας: Παραδείγματα

Εφαρμογή 8: Να βρεθεί η σφαίρα κέντρου $K(-1, 2, 3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $(\Pi) : 2x - y + 2z = 6$.

Λύση: Έχουμε

$$d(K, (\Pi)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{3},$$

η οποία πρέπει να είναι η ακτίνα της σφαίρας $(\Sigma)$. Συνεπώς, η ζητούμενη σφαίρα προσδιορίζεται

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{16}{9}.$$

# Ασκήσεις

1 Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 6y - 8z - 25 = 0$$

παριστάνει σφαίρα, της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Στη συνέχεια, να εξεταστεί αν υπάρχει επίπεδο που να διέρχεται από το $A(2, 3, -6)$ και να εφάπτεται της σφαίρας.

2 Να βρεθεί η οικογένεια σφαιρών που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο $Oxyz$ και εφάπτεται στα επίπεδα $Oxy$, $Oyz$ και $Ozx$.

3 Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y - 16z + 111 &= 0, \\ 2x + 2y + z - 17 &= 0. \end{aligned}$$

# Τομή σφαιρών

Παρατήρηση: Τα σημεία τομής δύο σφαιρών

$$(\Sigma_1) : S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0,$$
$$(\Sigma_2) : S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$

ικανοποιούν επίσης την εξίσωση $S_1 - S_2 = 0$:

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2)z + (\Delta_1 - \Delta_2) = 0,$$

η οποία αποτελεί εξίσωση επιπέδου $(\Pi)$.
Αφού $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2) = (\Sigma_i) \cap (\Pi)$, για $i = 1, 2$, η τομή (στο βαθμό που υπάρχει) είναι κύκλος.

# Τομή σφαιρών: Περιπτώσεις

Έστω δύο σφαίρες $(\Sigma_i)$ $(i = 1, 2)$ κέντρων $K_i$ και ακτίνας $r_i$ (ι=1,2) με απόσταση κέντρων $d(K_1, K_2)$.

| Συνθήκη | Συμπέρασμα |
|---|---|
| $d > r_1 + r_2$ | $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2) = \emptyset$ |
| $d = r_1 + r_2$ | $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$ εφάπτονται εξωτερικά |
| $d = \|r_1 - r_2\|$ | $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$ εφάπτονται εσωτερικά |
| $d < \|r_1 - r_2\|$ | $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2) = \emptyset$ |
| $\|r_1 - r_2\| < d < r_1 + r_2$ | $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2) \neq \emptyset$ κύκλος |

## Ορισμός

Γωνία τομής δύο σφαιρών ορίζεται ως η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων επιπέδων στις σφαίρες αυτές σε κάποιο σημείο επαφής.

Παρατήρηση: Πράγματι, θεωρώντας σφαίρες $(\Sigma_i)$ $(i = 1, 2)$ κέντρων $K_i$ και ακτίνας $r_i$ (ι=1,2) με απόσταση κέντρων $d(K_1, K_2)$ και $A \in (\Sigma_1) \cap (\Sigma_2)$, έχουμε

$$\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AK_2} - \overrightarrow{AK_1}\right\|^2 = \|AK_2\|^2 + \|AK_1\|^2 - 2\langle\overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_1}\rangle$$
$$= \|AK_2\|^2 + \|AK_1\|^2 - 2\,\|AK_2\|\,\|AK_1\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}}\right),$$

δηλαδή

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}}\right) = \frac{r_2^2 + r_1^2 - d(K_1, K_2)^2}{2r_1r_2}.$$

# Γωνία τομής δύο σφαιρών

Εφαρμογή: Να βρεθεί η γωνία τομής των σφαιρών $(\Sigma_1): x^2+y^2+z^2=4$ και $(\Sigma_2): x^2+y^2+z^2-2x=0$.

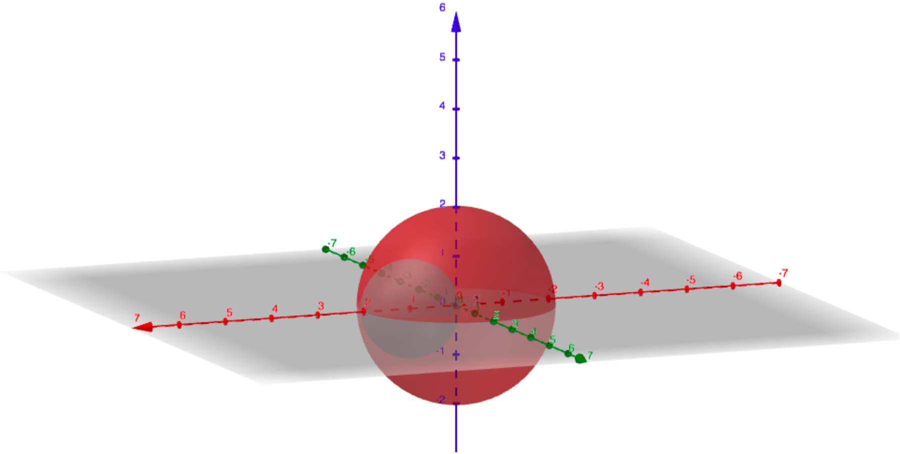
Λύση: Τα κέντρα των δύο σφαιρών είναι $K_1(0,0,0)$, $K_2(1,0,0)$ και οι ακτίνες τους βρίσκονται $r_1=2$ και $r_2=1$. Επίσης, εχόυμε απόσταση μεταξύ των κέντρων τους $d(K_1,K_2)=1$.

Συνεπώς, οι σφαίρες τέμνονται κατά γωνία $\theta$ με

$$\cos(\theta)=\frac{2^2+1^2-1^2}{2\cdot 2\cdot 1}=1,$$

άρα $\theta=0$.

# Γωνία τομής δύο σφαιρών (προηγούμενο παράδειγμα)



# Ασκήσεις

1 Να βρεθεί η γωνία τομής των σφαιρών

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=4.$$

2 Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που εφάπτεται του επιπέδου $3x+2y-z+2=0$ στο σημείο $P(1-,2,1)$ που επιπλέον τέμνει τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ κάθετα.

3 Να δειχθεί ότι οι σφαίρες

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+10x+2z+10=0.$$

τέμνονται και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.