Διανυσματικοί χώροι

Κατσουλέας Γιώργος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

16 Δεκεμβρίου 2020

Διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Ορισμός

Ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ αποτελείται από:

- ένα μη κενό σύνολο V.
- μία εσωτερική πράξη $V \times V \to V$ (πρόσθεση) που απεικονίζει το διατεταγμένο ζεύγος
$$(u, v) \xrightarrow{+} u + v$$
- μία εξωτερική πράξη $\mathbb{F} \times V \to V$ (βαθμωτός πολλαπλασιασμός) που απεικονίζει το διατεταγμένο ζεύγος
$$(\lambda, u) \xrightarrow{\cdot} \lambda \cdot u,$$

έτσι ώστε να ισχύουν:

Ορισμός

1. $u + v = v + u$, $\forall u.v \in V$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$.
3. $\exists \mathbb{O} \in V$ με την ιδιότητα
$$u + \mathbb{O} = \mathbb{O} + u = u, \forall u \in V$$
4. $\forall u \in V$ $\exists (-u) \in V$ με την ιδιότητα
$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbb{O}, \forall u \in V$$
5. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}, u, v \in V$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, u \in V$.
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u) = \mu \cdot (\lambda \cdot u)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, u \in V$.
8. $1 \cdot u = u$, $\forall u \in V$.

Τα στοιχεία του συνόλου V καλούνται διανύσματα, ενώ εκείνα του σώματος $\mathbb{F}$ καλούνται συντελεστές.

Διανυσματικός χώρος: Παραδείγματα

1. Το σύνολο $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

   και το βαθμωτό γινόμενο

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n),$$

   είναι δ.χ. με ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης το μηδενικό διάνυσμα $\mathbb{O}' = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ και αντίθετο στοιχείο του τυχαίου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ το $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. Το σύνολο όλων των πραγματικών πολωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n:

$$\Pi_n(\mathbb{R}) = \left\{ a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : k \leq n, a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Το σύνολο όλων των πραγματικών σναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$:

$$C([\alpha, \beta]) = \{ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : f \ \text{ συνεχής συνάρτηση} \}.$$

4. Το σύνολο όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

Η έννοια του διανυσματικού υπόχωρου

Ορισμός

Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός δ.χ. V ($U \subseteq V, U \neq \emptyset$), εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις, είναι επίσης δ.χ. καλείται υπόχωρος του V (συμβ. $U \leq V$).

- Για να αποδείξουμε ότι ένα μη κενό υποσύνολο U ενός δ.χ. V είναι υπόχωρος του V, αρκεί να δείξουμε ότι οι πράξεις "+" και "·" είναι κλειστές στο U, δηλαδή

  i. $u + v \in U$, για κάθε $u, v \in U$,
  ii. $\lambda \cdot u \in U$, για κάθε $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

  Ισοδύναμα,

  $$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in U, \text{ για κάθε } u, v \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}.$$

- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον δύο υπόχωρους, τον ίδιο τον V, και τον τετριμμένο υπόχωρο $\{\mathbb{O}\}$.

Διανυσματικός υπόχωρος: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω ο δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$, εφοδιασμένος με τις γνωστές πράξεις.

- Το υποσύνολο

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

είναι υπόχωρος του $V = \mathbb{R}^3$.

- Το υποσύνολο

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 1\} = \{(x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

δεν είναι υπόχωρος του $V = \mathbb{R}^3$.

Τομή και άθροισμα υπόχωρων

Συμβολισμός

Έστω ένας δ.χ. V και δύο υπόχωροί του, U και W. Τότε ορίζουμε την τομή των U και W:

$$U \cap W = \{u \in V : u \in U \text{ και } u \in W\}$$

και το άθροισμα των U και W,

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U \text{ και } w \in W\}$$

Θεώρημα

Η τομή και το άθροισμα δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in U \cap W$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ισχύει

$$\begin{cases} x, y \in U, \\ x, y \in W \end{cases} \underset{U, W \leq V}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in U, \\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in W \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in U \cap W \Rightarrow U \cap W \leq V.$$

Θεώρημα

Η τομή και το άθροισμα δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Επιπλέον, για κάθε $x, y \in U + W$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έχουμε

$$x = x_U + x_W, \text{ με } x_U \in U, x_W \in W, \text{ και } y = y_U + y_W, \text{ με } y_U \in U, y_W \in W$$

και επομένως

$$\begin{cases} \lambda \cdot x_U + \mu \cdot y_U \in U, \\ \lambda \cdot x_W + \mu \cdot y_W \in W \end{cases} \Rightarrow (\lambda \cdot x_U + \mu \cdot y_U) + (\lambda \cdot x_W + \mu \cdot y_W) \in U + W$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot x + \mu y \in U + W \Rightarrow U + W \leq V.$$

Ένωση υπόχωρων

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η ένωση δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι υπόχωρος του V αν και μόνον αν $U \leq W$ ή $W \leq U$.

Λύση: Για το αντίστροφο, είναι προφανές ότι αν $U \subseteq W$ ή $W \subseteq U$, τότε

$$U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W = W \leq V \quad \text{και} \quad W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U \leq V.$$

Για το ευθύ, ας υποθέσουμε ότι $U \cup W \leq V$ και ότι οι U, W δεν είναι υπόχωροι ο ένας του άλλου. Θεωρούμε δύο διανύσματα $x \in U$ με $x \notin W$ και $y \in W$ με $y \notin U$. Τότε

$$x, y \in U \cup W \;\; U \cup \overset{\Rightarrow}{W} \leq V \;\; x+y \in U \cup W \Rightarrow \begin{cases} x+y \in U \text{ ή}, \\ x+y \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x+y) - x \in U \text{ ή}, \\ x = (x+y) - y \in W \end{cases}$$

δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο.

Λύση ομογενούς γραμμικού συστήματος

Άσκηση: Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$, όπου ο πίνακας του συστήματος A είναι ένας $n \times m$ πραγματικός πίνακας. Να δειχθεί ότι η γενική λύση του συστήματος είναι υπόχωρος του δ.χ. $V = \mathbb{R}^m$.

Λύση: Έστω

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\right\} \neq \emptyset$$

το σύνολο όλων των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος. Προφανώς, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και αρκεί να αποδείξουμε την κλειστότητα των πράξεων. Για κάθε $x, y \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\begin{cases} Ax = 0, \\ Ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(Ax) + \mu(Ay) = 0 \Rightarrow A(\lambda x + \mu y) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \Rightarrow U \leq \mathbb{R}^m.$$

Ορισμός

Έστω ένας δ.χ. V και κάποια στοιχεία του $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$. Γραμμική θήκη των $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ καλούμε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k : \text{ για κάθε } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\}.$$

Πρόταση

Η γραμμική θήκη $[x_1, x_2, \ldots, x_k] \subseteq V$ είναι πάντα υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε $x, y \in [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έχουμε

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k, \\ y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) + \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)x_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)x_2 + \cdots + (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)x_k \\ &\in [x_1, x_2, \ldots, x_k] \Rightarrow [x_1, x_2, \ldots, x_k] \leq V. \end{aligned}$$

Τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ καλούνται γεννήτορες του δ.χ. $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$.

Γραμμική θήκη: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω ο δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 1)$ και $x_2 = (0, 1, 1)$. Η γραμμική θήκη των δύο διανυσμάτων είναι

$$\begin{aligned}
[(1,2,1),(0,1,1)] &= \{\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,1,1)) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha_1, \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) : x - y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δε μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
Διαφορετικά, καλούνται γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατηρούμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0. \tag{1}$$

Πράγματι, αν $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ γραμμικώς εξαρτημένα και θεωρώντας ότι

$$x_1 = \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \cdots + \gamma_k x_k,$$

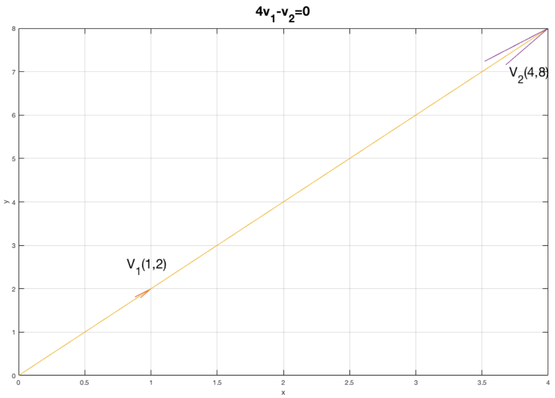
τότε ισχύει η σχέση της μορφής (1):

$$x_1 + (-\gamma_2)x_2 + (-\gamma_2)x_3 + \cdots + (-\gamma_k)x_k = 0,$$

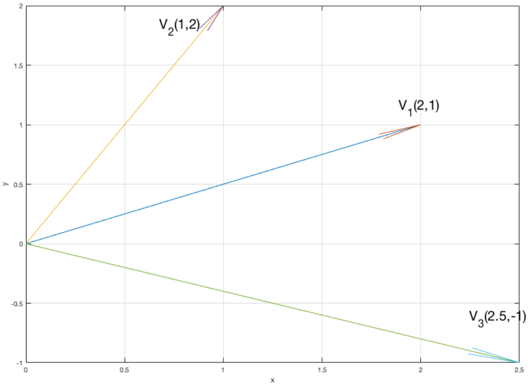
Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε x_1 γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $x_2, x_3, \ldots, x_k$:

$$x_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) x_3 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) x_k,$$

Γρ. εξαρτημένα διανύσματα



Γρ. εξαρτημένα διανύσματα (2)



Γνωρίζουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ γρ. εξαρτημένα γιατί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχει μη μηδενικές λύσεις!

Γραμμική ανεξαρτησία: Παρατηρήσεις

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Το μονοσύνολο $\mathbb{S} = \{x\} \subset V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνο αν $x = 0 \in V$.
- Το σύνολο $\mathbb{S} = \{x_1, x_2\} \subset V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνο αν το ένα διάνυσμα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \cup \{0\}$ είναι γρ. εξαρτημένο. (Γενικότερα, κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικώς εξαρτημένο).
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \setminus \{x_i\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο, για κάθε $i = 1, \ldots, k$. (Γενικότερα, κάθε υποσύνολο ενός γρ. ανεξάρτητου συνόλου είναι γρ. ανεξάρτητο).
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \cup \{x_{k+1}\}$ είναι επίσης γρ. εξαρτημένο. (Γενικότερα, κάθε υπερσύνολο ενός γρ. εξαρτημένο συνόλου είναι γρ. εξαρτημένο).

Γραμμική ανεξαρτησία: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Τα διανύσματα

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)^T \end{aligned}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^n$.

Γραμμική ανεξαρτησία: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Τα μονόνυμα $1, t, t^2, \ldots, t^n \in \Pi_n(\mathbb{K})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\Pi_n(\mathbb{K})$.

Πράγματι, η απαίτηση

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2 + \cdots + \lambda_{n+1} \cdot t^n = 0$$

σημαίνει ότι το πολυώνυμο στο αριστερό μέλος πρέπει να είναι μηδενικό για κάθε $t \in \mathbb{K}$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Γραμμική ανεξαρτησία: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 2, 1)^T$, $v_2 = (2, 3, 4, 1)^T$, $v_3 = (3, 8, 7, 5)^T$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
  Γράφουμε την εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ ως το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

  Ο πίνακας του συστήματος ανάγεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Συνεπώς, μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ και τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Γραμμική ανεξαρτησία: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $v_1 = (2,1,3)^T$, $v_2 = (5,-2,4)^T$, $v_3 = (3,8,-6)^T$ και $v_4 = (2,7,-4)^T$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
  Γράφουμε την εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ ως το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 8\lambda_3 + 7\lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

  Το ομογενές αυτό σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους παρά εξισώσεις. Συνεπώς, έχει μη τετριμμένη λύση και τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Στον $\mathbb{R}^3$, το σύνολο $\mathbb{S} = \{e_1, e_2, e_3, v\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο για οποιοδήποτε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$.
  (Παρόμοια περίπτωση με την προηγούμενη.) Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε οποιοδήποτε τέτοιο διάνυσμα ως

  $$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

  για κατάλληλους πραγματικούς συντελεστές c_1, c_2, c_3. Συνεπώς,

  $$-c_1 e_1 - c_2 e_2 - c_3 e_3 + v = 0$$

  με μη μηδενικούς συντελεστές $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-c_1, -c_2, -c_3, 1) \neq 0 \in \mathbb{R}^4$.

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Οποιοδήποτε σύνολο περιλαμβάνει το 0 είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
  Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα από τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$. Έστω $x_i = 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, k$. Τότε ο γραμμικός σύνδυασμός

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \cdots + 0x_k = 0$$

  με μόνο μη μηδενικό συντελεστή τον λ_i δίνει το μηδενικό διάνυσμα.

Γραμμική ανεξαρτησία στον $\mathbb{R}^m$: Κριτήριο

Θεώρημα

Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ και ο αντίστοιχος πίνακας $A = \begin{bmatrix} v_! & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \in M_{m,n}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2. Το ομογενές σύστημα $A\lambda = 0$ έχει ως λύση τον τετριμμένο υπόχωρο $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
3. Το ομογενές σύστημα $R\lambda = 0$, οπου $R \in M_{m,n}$ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A, έχει ως λύση τον τετριμμένο υπόχωρο $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
4. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in M_{m,n}$ του πίνακα A εμφανίζει μη μηδενικό ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη.

Παρατηρήσεις:

- Ειδικά στην περίπτωση που $n = m$, δηλαδή όταν ο πίνακας A είναι $n \times n$ τετραγωνικός, η γραμμκή ανεξαρτησία των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη $det(A) \neq 0$.
- Ειδικά στην περίπτωση που $n > m$, τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Γραμμική ανεξαρτησία στον $\mathbb{R}^m$: Εφαρμογή

- Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $v_1 = (1, 4, 7)$, $v_2 = (2, 5, 8)$ και $v_3 = (3, 6, 9)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, καθώς

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

- Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $v_1 = (1, 4, 7)$, $v_2 = (2, 5, 0)$ και $v_3 = (3, 6, 9)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, καθώς

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -48 \neq 0$$

Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- $\mathbb{S} = \{v_1 = (1,4,7,1), v_2 = (2,5,8,2), v_3 = (3,6,9,3)\}$.
- $\mathbb{S} = \{v_1 = (1,4,7,1), v_2 = (2,5,8,2), v_3 = (3,6,9,4)\}$.

Διακρίνετε κάποια μέθοδο για την κατασκευή επιπλέον διανυσμάτων που να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα με τα διανύσματα των παραπάνω συνόλων;

Γραμμική ανεξαρτησία: Ασκήσεις

Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα πολυωνύμων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- $\mathbb{S} = \left\{p_1 = t^3 + t^2, p_2 = t^3 + t, p_3 = t^2 + t\right\}$.
- $\mathbb{S} = \left\{p_1 = t^2 + t, p_2 = t^2 + t - 2, p_3 = 1\right\}$.

- Έχουμε

$$\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(t^3 + t^2) + \lambda_2(t^3 + t) + \lambda_3(t^2 + t) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)t^3 + (\lambda_1 + \lambda_3)t^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Άλλη γραφή: Γράφουμε $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ώστε

$$\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Γραμμική ανεξαρτησία: Ασκήσεις

- Είναι το σύνολο $\{(1,2),(3,4)\} \subset \mathbb{R}^2$ γρ. ανεξ.;
- Είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ γρ. ανεξ.;
- Είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2$ γρ. ανεξ.;
- Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, u_3\}$ με $u_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $u_2 = v_2 + v_3$ και $u_3 = v_3$ είναι επίσης γρ. ανεξάρτητο.
- Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, u_3\}$ με $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ και $u_3 = v_2 - v_3$ είναι επίσης γρ. ανεξάρτητο.

Γραμμική ανεξαρτησία: Επίδραση του σώματος

- Έστω $V = \mathbb{C}$ ο διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Τα διανύσματα $z_1 = 1$ και $z_2 = i$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επειδή για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, η σχέση

$$\lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- Έστω $V = \mathbb{C}$ ο διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$. Τα διανύσματα $z_1 = 1$ και $z_2 = i$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, επειδή η σχέση

$$\lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$$

αληθεύει για $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = i$.

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις και γραμμική θήκη

Με τον όρο "χώρος των γραμμών" (row space) ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} \in M_{k\times n}$ αναφερόμαστε στη γραμμική θήκη $Row(A) = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Πρόταση

Ο χώρος των γραμμών ενός πίνακα $A \in M_{k\times n}$ ταυτίζεται με το χώρο των γραμμών της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του.

Σκιαγράφηση απόδειξης: Αρκεί να δειχθεί ότι οι στοιχειώδεις γραμμοπράξεις δεν αλλάζουν το χώρο των γραμμών. Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ οι γραμμές του A.

- $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$: (από αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης).
- $\Gamma_j \to c\Gamma_j (c \neq 0)$:

$$\left[x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots x_k\right] = \left\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1}x_{j-1} + (c\lambda_j)x_j + \lambda_{j+1}x_{j+1} + \cdots + \lambda_k x_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\right\}$$
$$= \left[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots x_k\right].$$

- $\Gamma_j \to \Gamma_j + c\Gamma_i$:

$$\left[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - cx_i, x_{j+1}, \ldots x_k\right] = \left\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_j(x_j - cx_i) + \lambda_{j+1}x_{j+1} + \cdots + \lambda_k x_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\right\}$$
$$= \left[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots x_k\right]$$

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις και γραμμική θήκη· Η απόδειξη για την $\Gamma_j \to \Gamma_j + c\Gamma_i$

Πρόταση

Ο χώρος των γραμμών ενός πίνακα $A \in M_{k\times n}$ ταυτίζεται με το χώρο των γραμμών της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του.

Απόδειξη: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ οι γραμμές του A. Θα δείξουμε ότι

$$\left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_k\right] = \left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + cv_i, \ldots v_k\right]$$

Για τον εγκλεισμό $\subseteq$: Έστω $x \in \left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_k\right]$. Δηλ. υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ τέτοια, ώστε

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k$$

Αναδιατάσσοντας,

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \left(\lambda_i - c\lambda_j + c\lambda_j\right) v_i + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \left(\lambda_i - c\lambda_j\right) v_i + \cdots + \lambda_j \left(v_j + cv_i\right) + \cdots + \lambda_k v_k \in \left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + cv_i, \ldots v_k\right]. \end{aligned}$$

Για τον εγκλεισμό $\supseteq$: Έστω $x \in \left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + cv_i, \ldots v_k\right]$. Δηλ. υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ τέτοια, ώστε

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_j \left(v_j + cv_i\right) + \cdots + \lambda_k v_k \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \left(\lambda_i + c\lambda_j\right) v_i + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k \in \left[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_k\right]. \end{aligned}$$

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις και γραμμική θήκη· Μία ακόμα θεώρηση της απόδειξης

Πρόταση

Ο χώρος των γραμμών $Row(A) = [v_1, \ldots v_k]$ ενός πίνακα $A \in M_{k\times n}$ ταυτίζεται με το χώρο των γραμμών $Row(R) = [r_1, \ldots r_k]$ της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του $R \in M_{k\times n}$.

Απόδειξη: Υπάρχει πίνακας (γινόμενο στοιχειωδών πινάκων) $E \in M_{k\times k}$: $EA = R$. Ισοδύναμα,

$$EA = R \Leftrightarrow E\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_k^T \end{bmatrix} \overset{\text{αναστροφή}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix} E^T = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_k \end{bmatrix}$$

Έστω $x \in Row(A) = [v_1, \ldots v_k]$. Έχουμε

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \overset{E \text{ αντιστρέψιμος}}{=} \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_k \end{bmatrix} (E^T)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Θέτοντας $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} = (E^T)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$, έχουμε $x = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i r_i \in [r_1, \ldots, r_k] = Row(R)$, δηλαδή

$$Row(A) = [v_1, \ldots v_k] \subseteq Row(R) = [r_1, \ldots, r_k].$$

Όμοια ο αντίστροφος εγκλεισμός.

Γραμμική ανεξαρτησία και κλιμακωτή μορφή

Πρόταση

Έστω $\mathbb{S} = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ και $v \in V$. Αν $v \in [x_1, \ldots, x_k]$ με

$$v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k, \text{ με } \lambda_m \neq 0.$$

Τότε

$$[x_1, \ldots, x_k] = \left[x_1, \ldots, x_{m-1}, v, x_{m+1}, \ldots, x_k\right],$$

δηλαδή η γραμμική θήκη δεν αλλάζει με την αντικατάσταση του x_m από το v.

Απόδειξη για $(k, m) = (3, 2)$ (σπίτι η γενική περίπτωση): Προφανώς, έχουμε
$v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \overset{\lambda_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} x_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1 + \frac{1}{\lambda_2} v - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} x_3$, ώστε

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & v & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & v & x_3 \end{bmatrix} E.$$

Τότε $x \in [x_1, x_2, x_3]$ γράφεται $x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & v & x_3 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, ώστε θέτοντας
$E \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$, έχουμε τελικά $x = \begin{bmatrix} x_1 & v & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \mu_1 x_1 + \mu_2 v + \mu_3 x_3 \in [x_1, v, x_3]$, δηλαδή
$[x_1, x_2, x_3] \subseteq [x_1, v, x_3]$.
Όμοια ο αντίστροφος εγκλεισμός (άσκηση).

Γραμμική ανεξαρτησία και κλιμακωτή μορφή

Πρόταση

Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Τοποθετούμε τα διανύσματα x_i ως γραμμές σε έναν πίνακα $R = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{bmatrix} \in M_{k\times n}$ σε κλιμακωτή μορφή. Θεωρούμε συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0. \tag{2}$$

Έστω a_i η θέση του ηγετικού στοιχείου του διανύσματος x_i $(i = 1, \ldots, k)$. Αφού R σε κλιμακωτή μορφή:

- $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$,
- $r_{i,a_j} = 0, i > j$.

Τότε η συντεταγμένη στη θέση a_1 του διανύσματος $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ (η οποία από την ισότητα (2) πρέπει να είναι μηδενική) δίνεται από $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_{i,a_1} = \lambda_1 r_{1,a_1}$. Όμως $r_{1,a_1} \neq 0$ ως το ηγετικό στοιχείο της πρώτης γραμμής.
Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 = 0$.
Τότε, η (2) γίνεται $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$ και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε και ότι $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Έλεγχος γρ. ανεξαρτησίας (Κριτήριο ΙΙ) και προσδιορισμός ελαχίστου πλήθους γρ. ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν γρ. θήκη

Παρατηρήσεις:

- Στον δ.χ. $V = \mathbb{R}^n$, αν τα διανύσματα–γραμμές $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}\right)$, $x_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}\right)$, …, $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}\right)$ είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε είναι γρ. ανεξάρτητα. Π.χ. στον $V = \mathbb{R}^4$, τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 0, 1)$, $x_2 = (0, -1, 12, 11)$ και $x_3 = (0, 0, 0, 2)$ είναι γρ. ανεξάρτητα.
- Γενικότερα, για τον έλεγχο της γραμμικής εξαρτησίας k διανυσμάτων-γραμμών, θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \ldots & x_k^{(k)} \end{bmatrix}$$

  και τον κλιμακοποιούμε με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.
- Στην περίπτωση που προκύψουν μηδενικές γραμμές, τα αρχικά διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παράδειγμα: Στον δ.χ. $V = \mathbb{R}^4$, για τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 1)$, $x_3 = (1, -4, 2, 1)$ και $x_4 = (1, -7, 3, 1)$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι μη μηδενικές γραμμές που προκύπτουν στην κλιμακωτή μορφή αντιστοιχούν σε γρ. ανεξ. διανύσματα που παράγουν τον ίδιο χωρο, ενώ οι μηδενικές γραμμές αντιστοιχούν σε διανύσματα που μπορούν να γραφούν ως γρ. συνδυασμοί των υπολοίπων και γι'αυτό απαλείφονται.

Παράδειγμα: Στον δ.χ. $V = \Pi_3(\mathbb{R})$ να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος των διανυσμάτων που παράγουν τη γραμμική θήκη των
$\mathbb{S} = \left\{ t^3 + 3t^2, 2t^3 + 2t - 2, t^3 - 6t^2 + 3t - 3, 3t^2 - t + 1 \right\}$. Γράφουμε

$$p_1(t) = t^3 + 3t^2 = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2(t) = 2t^3 + 2t - 2 = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p_3(t) = t^3 - 6t^2 + 3t - 3 = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad p_4(t) = 3t^2 - t + 1 = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & p_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} A,$$

όπου

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

῎Αρα τα πολυώνυμα που παράγουν τον ίδιο χώρο με εκείνα του $\mathbb{S}$ είναι τα

$$t^3 + 3t^2, t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}.$$

Γραμμοπράξεις και γραμμική εξάρτηση στηλών

Πρόταση

Έστω οι $n \times k$ πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k, \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας R προκύπτει από τον πίνακα A με την εκτέλεση μίας ή περισσότερων γραμμοπράξεων. Αν οι στήλες του A ικανοποιούν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

για κατάλληλους συντελεστές λ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), τότε οι στήλες του R ικανοποιούν την αντίστοιχη σχέση:

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_k r_k = 0$$

Γραμμοπράξεις και γραμμική εξάρτηση στηλών: Παράδειγμα

Να εντοπιστούν τυχόν γραμμικές εξαρτήσεις μεταξύ των στηλών των πινάκων:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; \left(\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$

Βάση διανυσματικού χώρου

Ορισμός

Αν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι

- γρ. ανεξάρτητα και
- παράγουν όλο το χώρο V, δηλαδή $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = V$,

τότε το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ καλείται βάση του δ.χ. V.

Παρατήρηση: Προκειμένου να εξεταστεί αν κάποιο σύνολο $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ αποτελεί βάση του V:

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα $S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα
$$S\Lambda = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0 \in V$$
έχει μοναδική λυση τη μηδενική $\Lambda = 0_n$.
2. Ελέγχουμε αν το σύστημα
$$Sx = b$$
είναι συμβιβαστό για κάθε $b \in V$. (Στην περίπτωση αυτή, παρατηρήστε ότι θα έχει επιπλέον και μοναδική λύση.)

Βάση διανυσματικού χώρου: Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα σύνολα αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^2$.

1. $\mathbb{S}_1 = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
2. $\mathbb{S}_2 = \left\{ f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$
3. $\mathbb{S}_3 = \left\{ f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Λύση (ενδεικτικά η 1): Παρατηρούμε ότι το σύνολο είναι γρ. εξαρτημένο. Πράγματι, θέτοντας $S_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & f_1 \end{bmatrix}$, έχουμε

$$S_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2 - f_1 = 0_2$$

Δεν είναι βάση, ωστόσο παράγει το χώρο $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, για κάθε $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, το σύστημα $S_1 x = b$ είναι συμβιβαστό:

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array}\right]$, δηλαδή $b = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma f_1$ με συντελεστές $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο $\left\{t^2+2t-3, t^2+5t, 2t^2-4\right\}$ αποτελεί βάση του $\Pi_3(\mathbb{R})$.

$$\alpha(t^2+2t-3)+\beta(t^2+5t)+\gamma(2t^2-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0, \\ 2\alpha+5\beta=0 \\ -3\alpha-4\gamma=0 \end{cases}$$

Όμως $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$, δηλαδή

τα πολυώνυμα του συνόλου είναι γρ. ανεξ., αλλά δεν πάραγουν το χώρο $\Pi_3(\mathbb{R})$.

Βάση διανυσματικού χώρου: Παραδείγματα

Παράδειγμα: Η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από τα διανύσματα

$$\overrightarrow{e}_i = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{Θέση}-i}, 0, \ldots, 0\right) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Άσκηση: Να βρεθούν βάσεις για τους χώρους

- των πραγματικών πινάκων διάστασης 3×3,
- των πραγματικών συμμετρικών πινάκων διάστασης 3×3,
- των πραγματικών άνω τριγωνικών πινάκων διάστασης 3×3,
- των πραγματικών διαγώνιων πινάκων διάστασης 3×3.
- των πραγματικών αντισυμμετρικών πινάκων διάστασης 3×3.

Τι σχέσεις υπάρχουν μεταξύ των χώρων αυτών;

Μοναδικότητα αναπαράστασης ως προς βάση

Θεώρημα

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ βάση ενός δ.χ. V, τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο $y \in V = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (σίγουρα γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Ας υποθέσουμε ότι

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n.$$

Τότε

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)x_n$$

και από τη γρ. ανεξαρτησία των $x_1, x_2, \ldots, x_n$, καταλήγουμε ότι

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Συντεταγμένες ως προς βάση δ.χ.

Συμβολισμός: Αν $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ βάση, τότε οι συντελεστές ενός διανύσματος $v \in V$ ως προς την $\mathbb{S}$ συμβολίζονται

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathbb{S}}$$

Παράδειγμα: Για την αναπαράσταση του διανύσματος $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση

$$\mathbb{S} = \left\{ s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

θέτουμε πρώτα

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια προσδιορίζουμε συντελεστές α_1, α_2, ώστε

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = v \Leftrightarrow S \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} s_1 + \frac{5}{2} s_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}_{\mathbb{S}}.$

Συντεταγμένες ως προς βάση δ.χ.

Εφαρμογή: Να αναπαρασταθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Βάση διανυσματικού χώρου: Συνέπειες ορισμού

Θεώρημα

Αν $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ βάση του δ.χ. V, τότε κάθε σύνολο που περιέχει περισσότερα των n διανυσμάτων είναι γρ. εξαρτημένο.

Απόδειξη: Έστω $\mathbb{T} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$ με $|\mathbb{T}| = m > n$. Θ.δ.ο. υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

Όμως $\mathbb{S} \subset V$ βάση, ώστε θέτοντας $S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$ μπορούμε να εκφράσουμε $u_i = S\alpha_i$ για κατάλληλα διανύσματα συντελεστών $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Τότε $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\alpha_1 & S\alpha_2 & \ldots & S\alpha_m \end{bmatrix} = S \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n \times m}}$ ώστε η σχέση (3) ξαναγράφεται

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow S \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} = 0 \overset{\mathbb{S} \text{ βάση}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = 0_n$$

Το τελευταίο σύστημα έχει απειρία λύσεων, καθώς ο πίνακας του συστήματος $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ με $m \geq n$. Αυτό αποδεικνύει και την γρ. εξάρτηση των στοιχείων του $\mathbb{T}$.

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Πόρισμα

Αν $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ βάση του δ.χ. V, τότε κάθε γρ. ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων περιέχει n ή λιγότερα διανύσματα του V.

Θεώρημα

Κάθε βάση ενός χώρου V πεπερασμένης διάστασης πρέπει να περιέχει το ίδιο πλήθος διανυσμάτων.

Απόδειξη: Έστω $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ και $\mathbb{T} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$ βάσεις. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{S}\ \text{βάση},\\ \mathbb{T}\ \text{γρ. ανεξ.}\end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbb{T}| \leq |\mathbb{S}| \Rightarrow m \leq n \text{ και όμοια } \left.\begin{array}{l}\mathbb{S}\ \text{γρ. ανεξ.},\\ \mathbb{T}\ \text{βάση}\end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbb{S}| \leq |\mathbb{T}| \Rightarrow n \leq m,$$

ώστε καταλήγουμε στο συμπέρασμα $m = n$, δηλ. $|\mathbb{T}| = |\mathbb{S}|$.

Ορισμός

Σε ένα δ.χ. V,το πλήθος των στοιχείων κάθε βάσης του καλείται διάσταση του V (συμβ. $dim(V)$). Δηλαδή, αν $V = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, τότε $dim(V) = n$.

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παραδείγματα

Παράδειγματα:

1. Ο δ.χ. $\Pi_n(\mathbb{R})$ έχει διάσταση $n+1$. (Μϊα βάση του είναι $\left\{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\right\}$.)
2. Ο δ.χ. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει διάσταση 4.

$$\left(\text{Μϊα βάση του είναι } \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right).$$

   Γενικά έχουμε $dim(\mathbb{R}^n) = dim(\mathbb{R}^{n\times 1}) = dim(\mathbb{R}^{1\times n})$.

3. Η γρ. θήκη

$$U = [(1,2,0,1),(1,-1,1,1),(1,-4,2,1),(1,-7,3,1)] = [(1,2,0,1),(1,-1,1,1)]$$

   αποτελεί υπόχωρο του $V = \mathbb{R}^4$ με βάση $\{(1,2,0,1),(1,-1,1,1)\}$ και άρα διάσταση $dim(U) = 2$.

Θεώρημα επέκτασης βάσης

Θεώρημα

Έστω V δ.χ. διάστασης n.

1. Αν το σύνολο $\mathbb{S} \subset V$ παράγει το χώρο V, τότε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{S}$ αποτελεί βάση για το δ.χ. V. Με άλλα λόγια, μία βάση μπορεί να κατασκευαστεί, παραλείποντας κατάλληλο πλήθος (ενδεχομένως κανένα) διανυσμάτων από το σύνολο $\mathbb{S}$.
2. Αν $\mathbb{S} \subset V$ γρ. ανεξ. σύνολο, τότε το σύνολο $\mathbb{S}$ μπορεί να επεκταθεί σε βάση του V με την προσθήκη κατάλληλου πλήθους διανυσμάτων (ενδεχομένως 0).

Πόρισμα

Έστω V δ.χ. διάστασης n και υπόχωρος $V_1 \leq V$. Τότε $dim(V_1) \leq n$. Επιπλέον, αν $dim(V_1) = n$, τότε $V_1 = V$.

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Συνέπειες

Πόρισμα

Σε ένα δ.χ. V διάστασης n, κάθε σύνολο $n+1$ διανυσμάτων είναι γρ. εξαρτημένο.

Παραδείγματα:

1. Το σύνολο
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
είναι γρ. εξαρτημένο.
2. Το σύνολο
$$\left\{ t^2 + t, t^2 - t, t + 1, t - 1 \right\} \subset \Pi_2(\mathbb{R})$$
είναι γρ. εξαρτημένο.

Υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

Θεώρημα

Έστω $U \leq \mathbb{R}^3$ υπόχωρος.

1. Αν $dim(U) = 0$, τότε $U = \{0\}$.
2. Αν $dim(U) = 1$, τότε ο U αποτελεί ευθεία που διέρχεται από την αρχή.
3. Αν $dim(U) = 2$, τότε ο U αποτελεί επίπεδο που διέρχεται από την αρχή.
4. Αν $dim(U) = 3$, τότε $U \equiv \mathbb{R}^3$.

Θεώρημα διάστασης

Θεώρημα

Αν U και W υπόχωροι ενός δ.χ. V, τότε

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Ιδέα απόδειξης: Έστω B_0 μία βάση για τον υπόχωρο $U \cap W$.
Μπορούμε να επεκτείνουμε την B_0 σε μία βάση $B_U = B_0 \cup B_1$ για τον U και μία βάση $B_W = B_0 \cup B_2$ για τον W.
Τότε το σύνολο $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ αποτελεί μία βάση για τον $U+W$, ώστε

$$\begin{aligned} dim(U+W) &= |B_0 \cup B_1 \cup B_2| \\ &= |B_U \cup B_W| \\ &= |B_U| + |B_W| - |B_U \cap B_W| \\ &= |B_U| + |B_W| - |B_0| \\ &= dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W). \end{aligned}$$

Θεώρημα διάστασης

Θεώρημα

Αν U και W υπόχωροι ενός δ.χ. V, τότε

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Απόδειξη: Περίπτωση 1η: $U \cap W \neq \{0\}$

Το σύνολο $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ προφανώς παράγει το χώρο $U+W$. Δηλαδή, αν $|B_0| = n$, $|B_1| = n_1$ και $|B_2| = n_2$, έχουμε $dim(U+W) \leq n + n_1 + n_2$. Αρκεί να δειχθεί πως το σύνολο $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Όμως, $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ γρ. ανεξάρτητο, όταν ο συνδυασμός

$$\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0 \in V. \tag{4}$$

ακριβώς όταν τα διανύσματα των συντελεστών $\kappa \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $\mu \in \mathbb{R}^{n_2}$ είναι όλα μηδενικά. Τότε

$$\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\in U} = \underbrace{-B_2\mu}_{\in W} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = -B_2\mu \in U \cap W.$$

Θεώρημα διάστασης

Θεώρημα

Αν U και W υπόχωροι ενός δ.χ. V, τότε

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Απόδειξη: Περίπτωση 1η: $U \cap W \neq \{0\}$ Είδαμε ότι $\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = -B_2\mu \in U \cap W$.

Άρα, και τα δύο διανύσματα εκφράζονται ως συνδυασμοί της βάσης B_0 του $U \cap W$. Ειδικά για το δεύτερο, έχουμε ότι υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$-B_2\mu = B_0\chi \Leftrightarrow B_0\chi + B_2\mu = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & B_2 \end{bmatrix}}_{\text{βάση του } W} \begin{bmatrix} \chi \\ \mu \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \chi = 0_n, \mu = 0_{n_2}.$$

Με αντικατάσταση στην (4), έχουμε

$$\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} + B_2\mu = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}}_{\text{βάση του } U} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0_n, \lambda = 0_{n_1}.$$

Άρα, οι στήλες του $\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ αποτελούν γρ. ανεξ. διανύσματα.
Περίπτωση 2η: $U \cap W = \{0\}$ Ασκησούλα..

Θεώρημα διάστασης: Εφαρμογή

Παράδειγμα: Έστω

$$V_1 = \{(x_1, x_1, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Να υπολογιστούν οι διαστάσεις των $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.
Προφανώς $x = (x_1, x_1, x_3, x_4) \in V_1$ ακριβώς όταν

$$(x_1, x_1, x_3, x_4) = x_1(1,1,0,0) + x_3(0,0,1,0) + x_4(0,0,0,1).$$

Δηλαδή

$$V_1 = [(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)] \text{ με } dim(V_1) = 3.$$

Όμοια,

$$V_2 = [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)] \text{ με } dim(V_1) = 3.$$

Παρατηρούμε ότι

$$V_1 \cap V_2 = \{(x,x,y,0), x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0,0), (0,0,1,0)] \text{ με } dim(V_1 \cap V_2) = 2.$$

Επομένως,

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ευθύ άθροισμα υπόχωρων

Παραδείγματα αθροίσματος υπόχωρων ($V = \mathbb{R}^3$)

Παράδειγμα 1: Έστω

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Τότε

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = V = \mathbb{R}^3$$

και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \in U + W$$

κατά μοναδικό τρόπο.

Παραδείγματα αθροίσματος υπόχωρων ($V = \mathbb{R}^3$)
Παράδειγμα 2: Έστω

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Τότε

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b + c \\ d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = V = \mathbb{R}^3$$

και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα στοιχείων των U, V με περισσότερους από έναν τρόπους:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in W} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in W} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in W}$$

Τι είναι αυτό που επιτρέπει στην περίπτωση αυτή την πολλαπλή γραφή;

Ευθύ άθροισμα υπόχωρων

Ορισμός

Ο υπόχωρος $U + W \subseteq V$ καλείται ευθύ άθροισμα (συμβ. $U \oplus W$) αν κάθε στοιχείο του $U + W$ εκφράζεται μονοσήμαντα ως $u + w$ με $u \in U$ και $w \in W$.

(Το προηγούμενο Παράδειγμα 1 ήταν ευθύ άθροισμα, ενώ το Παράδειγμα 2 όχι.)

Ευθύ άθροισμα υπόχωρων: Χαρακτηρισμός

Θεώρημα

Έστω $U, W \leq V$ υπόχωροι. Τότε ο υπόχωρος $U + W$ αποτελεί ευθύ άθροισμα ακριβώς όταν $U \cap W = \{0\}$.

$\Rightarrow$: Έστω $v \in U \cap W$ και σκεπτόμαστε την ανάλυσή του $v = v + 0 = 0 + v$ ως εξής:

$$v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W}$$

Όμως, ο χώρος $U + W$ αποτελεί ευθύ άθροισμα, ώστε το στοιχείο $v \in U + W$ εκφράζεται μονοσήμαντα ως άθροισμα στοιχείων $u + w$ με $u \in U$ και $v \in V$.
Συνεπώς, δείξαμε ότι $v = 0$.
$\Leftarrow$: Υποθέτοντας ότι $U \cap W = \{0\}$, θα δείξουμε ότι ο χώρος $U + W$ αποτελεί ευθύ άθροισμα.
Για το τυχαίο $v \in U + W$, εκφράζοντας $v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in W} = \underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in W}$, θα δείξουμε ότι

$\begin{cases} u_1 = u_2, \\ w_1 = w_2 \end{cases}$. Πράγματι, έχουμε

$$\underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in W} = \underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in W} \Leftrightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W} \overset{\text{αφού } U \cap W = \{0\}}{=} 0.$$

Ευθύ άθροισμα: Γενίκευση σε περισσότερους από δύο υπόχωρους

Παράδειγμα: Έστω οι υπόχωροι

$$U_1 = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\right\},$$
$$U_2 = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\right\},$$
$$U_3 = \left\{(0,y,y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\},$$

Προφανώς, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$. Επίσης,

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

αλλά

$$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{U_1} + \underbrace{(0,0,z)}_{U_2} + \underbrace{(0,0,0)}_{U_3}$$
$$= \underbrace{(x,y-z/2,0)}_{U_1} + \underbrace{(0,0,z/2)}_{U_2} + \underbrace{(0,z/2,z/2)}_{U_3}$$

κλπ..

Ευθύ άθροισμα: Γενίκευση σε περισσότερους από δύο υπόχωρους

Ορισμός

Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_k$ υπόχωροι ενός δ.χ. V. Θα λέμε ότι ο δ.χ. V είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $U_1, U_2, \ldots, U_k$ (συμβ. $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$) όταν:

- $V = U_1 + \cdots + U_n$,
- $U_j \cap \Sigma_{i \neq j} U_i = \{0\}$, για κάθε $j = 1, \ldots, k$.

Παράδειγμα: Έστω $V = \mathbb{R}^5$ και

$$U_1 = \{(x, 0, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$
$$U_2 = \{(0, y, z, 0, 0) : y, z \in \mathbb{R}\},$$
$$U_3 = \{(0, 0, 0, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε είναι

$$(x, y, z, u, v) = (x, 0, 0, 0, 0) + (0, y, z, 0, 0) + (0, 0, 0, u, v)$$

για κάθε $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$. Άρα είναι $U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^5$. Επιπλέον

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\},$$

οπότε $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Ευθύ άθροισμα: Γενίκευση σε περισσότερους από δύο υπόχωρους

Θεώρημα

Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_k$ υπόχωροι ενός δ.χ. V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.
- Κάθε $x \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, με $x_i \in U_i$ για $i = 1, \ldots, k$.

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U + W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

1. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - x_2 = x_3\}.$$

Λύση (1.): Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ότι το άθροισμα $U + W$ είναι ευθύ αν και μόνο αν $U \cap W \neq \{0\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{(x_1, x_2, x_3) \in V : (x_1, x_2, x_3) \in U \text{ και } (x_1, x_2, x_3) \in W\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U+W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

1. $V=\mathbb{R}^3$

$$U=\{(x_1,x_2,x_3) \in V : x_1+x_2+x_3=0\}, \quad W=\{(x_1,x_2,x_3) \in V : x_1-x_2=x_3\}.$$

Λύση (1.): Παρατηρούμε ότι $U+W=\mathbb{R}^3$, καθώς

$$dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)=2+2-1=3.$$

Για τις δύο διαφορετικές εκφράσεις του τυχαίου $(x,y,z) \in U+W=\mathbb{R}^3$ ως άθροισμα στοιχείων των U, W, αρκεί να βρούμε βάσεις για τους επιμέρους υπόχωρους

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}$$

(για U, W αντίστοιχα) και στη συνέχεια να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Πράγματι, τότε θα έχουμε $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}_{\in U} + \underbrace{\lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2}_{\in W}$ για τις διάφορες λύσεις $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ του συστήματος (5).

Ευθύ άθροισμα: Εφαρμογές

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U+W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

1. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - x_2 = x_3\}.$$

Λύση (1.): Σχετικά με τον υπόχωρο U, παρατηρούμε ότι

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 = -x_2 - x_3\} = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \in V : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(-x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3) \in V : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = [u_1, u_2]$$

και αντίστοιχα

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 = x_2 + x_3\} = \{(x_2 + x_3, x_2, x_3) \in V : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x_2, x_2, 0) + (x_3, 0, x_3) \in V : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = [w_1, w_2].$$

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U+W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U+W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

1. $V = \mathbb{R}^3$
$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,, \quad W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - x_2 = x_3\}\,.$$

Λύση (1.): Σχηματίζουμε το σύστημα (5) με αντίστοιχο επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{\Gamma_1 \to -\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to -\Gamma_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -x-y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -x-y \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z+x+y \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3 \\ \Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{z+x+y}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{z-x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{z+x+y}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{y-x-z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{z+x+y}{2} \end{array}\right]$$

Ευθύ άθροισμα: Εφαρμογές

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U + W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

1. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - x_2 = x_3\}.$$

Λύση (1.): Είδαμε ότι το σύστημα (5) είναι γραμμοϊσοδύναμο με το $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{y-x-z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{z+x+y}{2} \end{array}\right]$, ώστε

έχει γενική λύση

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y-x-z}{2} + t \\ z - t \\ \frac{z+x+y}{2} - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y-x-z}{2} \\ z \\ \frac{z+x+y}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Θεωρώντας το διάνυσμα $(1, 0, 0) \in U + W = \mathbb{R}^3$, έχουμε

- Για $t = 0$: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1/2, 0, 1/2, 0)$,ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in V} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in V}$$

- Για $t = 1$: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1/2, -1, -1/2, 1)$,ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in V} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in V}.$$

Άσκηση: Θεωρείστε τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W \subset V$,όπου $U, W \leq V$ υπόχωροι. Ποια από τα ακόλουθα αθροίσματα $U + W$ είναι ευθέα; Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V \cap W$ και να εκφράσετε ένα στοιχείο $z \in U + W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των U, W.

2. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(t, 0, -t) \in V : t \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

3. $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$U = \{A \in V : AB = 0\}, \quad W = \{A = [a_{ij}] \in V : a_{11} + a_{22} = 0\},$$

όπου $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $V = \mathbb{C}^3$

$$U = \{(t, t, t) \in V : t \in \mathbb{C}\}, \quad W = \{(2u, -u, u) \in V : u \in \mathbb{C}\}.$$

Λύση (3.): Για έναν πίνακα $A \in W$ έχουμε $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Επιπλέον, απαιτούμε

$$0 = AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = c = 0.$$

Άρα, δεν υπάρχει περιορισμός για το στοιχείο b, ώστε $U \cap W = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$.

Άσκηση: Θεωρείστε τον υπόχωρο

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Να βρεθούν τρεις διακεκριμένοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, τέτοιοι ώστε $\mathbb{R}^5 = U \oplus W_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Είναι το πλήθος τέτοιων υπόχωρων W (ώστε $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$) πεπερασμένο;

1 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

και

$$U = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Να δείξτε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Λύση: Λύνουμε τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα. Για το πρώτο, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Δηλαδή } \left. \begin{array}{l} \alpha = \gamma, \\ \beta = -2\gamma - \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $V = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)]$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (ως γραμμική θήκη) με $dim(V) = 2$.

1 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

και

$$U = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Να δείξτε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Λύση: Λύνουμε τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα. Για το δεύτερο, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Δηλαδή } \left. \begin{aligned} \alpha &= \gamma + 2\delta, \\ \beta &= -2\gamma - \delta \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $U = [(1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)]$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (ως γραμμική θήκη) με $dim(V) = 2$.

1 Έχουμε

$$V = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)] \text{ και } U = [(1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)] \leq \mathbb{R}^4$$

Να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Λύση: Το άθροισμα $V + U$ ταυτίζεται με τη γραμμική θήκη των διανυσμάτων των βάσεων των V, U, δηλ.

$$V + U = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)] \leq \mathbb{R}^4.$$

Με διαδικασία κλιμακοποίησης, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $V + U = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, -0, 2, 4)] \leq \mathbb{R}^4$. υπόχωρος με $dim(V) = 3$.

1 Έχουμε

$$V = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)] \text{ και } U = [(1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)] \leq \mathbb{R}^4$$

Να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Λύση: Από το θεώρημα διάστασης, προκύπτει ότι

$$dim(V \cap U) = dim(V) + dim(U) - dim(V + U) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Για να βρούμε μία βάση, επιλύουμε ταυτόχρονα και τα δύο συστήματα. Ο αντίστοιχος πίνακας του συστήματος γράφεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + \Gamma_1 \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - 2\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_2 \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to -\frac{1}{2}\Gamma_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $V \cap U = [(1, -2, 1, 0)] \leq \mathbb{R}^4$. υπόχωρος με $dim(V) = 1$.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = \Big\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + 2\beta + \gamma = 0, 3\beta - \delta + \epsilon = 0\Big\}$$

και

$$U = \Big\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = \epsilon\Big\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Σχετικά με το πρώτο σύνολο V, παρατηρούμε ότι αποτελεί γραμμική θήκη, αφού

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \epsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\beta-\gamma\\ \beta\\ \gamma\\ 3\beta+\epsilon\\ \epsilon\end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\3\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \epsilon\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

και $V = [(-2,1,0,3,0),(-1,0,1,0,0),(0,0,0,1,1)] \leq \mathbb{R}^5$ με $dim(V) = 3$, δεδομένου ότι

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2\\ \Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$ σε κλιμακωτή μορφή.

2 Έστω τα σύνολα

$$V=\left\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)\in\mathbb{R}^5:\alpha+2\beta+\gamma=0, 3\beta-\delta+\epsilon=0\right\}$$

και

$$U=\left\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)\in\mathbb{R}^5:\alpha+\beta+2\gamma-\delta=\epsilon\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V\cap U$.

Σχετικά με το δεύτερο σύνολο U, παρατηρούμε ότι αποτελεί γραμμική θήκη, αφού

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \epsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \alpha+\beta+2\gamma-\delta\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

και $U=[(1,0,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1-1)]\leq\mathbb{R}^5$ με $dim(U)=4$, δεδομένου ότι οι σχετικοί γεννήτορες είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = [(-2,1,0,3,0),(-1,0,1,0,0),(0,0,0,1,1)] \text{ και}$$

$$U = [(1,0,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1-1)] \leq \mathbb{R}^5$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Το άθροισμα $V+U$ ταυτίζεται με τη γραμμική θήκη των διανυσμάτων των βάσεων και των δύο υπόχωρων. Με κλιμακοποίηση έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_6 \to \Gamma_6 + \Gamma_1}{\overset{\Gamma_5 \to \Gamma_5 + 2\Gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_7 \to \Gamma_7 - \Gamma_4}{\overset{\substack{\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_2 \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_3}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\Gamma_7 \to \Gamma_7 + 2\Gamma_6}{\overset{\Gamma_5 \to \Gamma_5 - 3\Gamma_4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $V+U = \mathbb{R}^5$, αφού $dim(V+U) = 5$.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = [(-2,1,0,3,0),(-1,0,1,0,0),(0,0,0,1,1)] \ \text{και}$$

$$U = [(1,0,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1-1)] \leq \mathbb{R}^5$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Λύση: Από το θεώρημα διάστασης, προκύπτει ότι

$$dim(V \cap U) = dim(V) + dim(U) - dim(V+U) = 3+4-5 = 2.$$

Για να βρούμε μία βάση, επιλύουμε ταυτόχρονα και τα δύο συστήματα $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 3\beta - \delta + \epsilon = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma - \delta - \epsilon = 0 \end{cases}$. Ο αντίστοιχος πίνακας έχει γραμμοϊσοδύναμους

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ -\beta + \gamma - \delta - \epsilon = 0, \\ 3\gamma - 4\delta - 2\epsilon = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\delta \\ \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{3}\epsilon \\ \frac{4}{3}\delta + \frac{2}{3}\epsilon \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα $V \cap U \leq \mathbb{R}^5$ υπόχωρος με $dim(V) = 2$.

3 Να δείξτε ότι τα ζεύγη $\{(1,2,3),(2,-1,1)\}$ και $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ αποτελούν βάσεις του ίδιου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$.

Λύση: Θέτουμε

$$\mathbb{S} = [(1,2,3),(2,-1,1)] \text{ και } \mathbb{T} = [(1,0,1),(0,1,1)] .$$

Παρατηρούμε ότι καθένα από τα δύο σύνολα $\mathbb{S},\mathbb{T}$ αποτελούνται από γρ. ανεξ. διανύσματα. Επομένως, $dim(\mathbb{S}) = dim(\mathbb{T}) = 2$ και για να αποδείξουμε ότι ταυτίζονται, α.ν.δ.ο.

$$dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = 2.$$

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3}{\overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = 2 \Rightarrow \mathbb{S} = \mathbb{T}.$$

4 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$ και $(1, \gamma, \gamma^2)$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση: Τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα αν και μόνον αν ο πίνακας που τα έχει ως γραμμές έχει μηδενική ορίζουσα. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \\ \gamma-\alpha & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \beta+\alpha \\ 1 & \gamma+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

Συνεπώς, τα διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν οι α, β, γ είναι διακεκριμμένοι αριθμοί. Διαφορετικά, τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα αν και μόνον αν τουλάχιστον δύο από τους α, β, γ είναι μεταξύ τους ίσοι.

Γενικές Ασκήσεις

5 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 4y - 2z + 3w = \alpha, \\ 6x - 9y - 5z + 8w = \beta, \\ 2x - 7y - 3z + 9w = \gamma, \\ 4x - 2y - 2z - w = \delta, \\ -6x + 3y + 3z + 4w = \epsilon \end{cases} \tag{6}$$

να είναι συμβιβαστό. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \text{Το σύστημα (7) είναι συμβιβαστό} \right\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε μια βάση του.

Λύση: Ο επαυξημένος του συστήματος γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 6 & -9 & -5 & 8 & \beta \\ 2 & -7 & -3 & 9 & \gamma \\ 4 & -2 & -2 & -1 & \delta \\ -6 & 3 & 3 & 4 & \epsilon \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + 3\Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & -3 & -1 & 6 & \gamma - \alpha \\ 0 & 6 & 2 & -7 & \delta - 2\alpha \\ 0 & -9 & -3 & 13 & \epsilon + 3\alpha \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + 3\Gamma_2}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + \gamma - 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -5 & \delta - 2\beta + 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 3\beta + \epsilon - 6\alpha \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_3 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - 2\Gamma_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + \gamma - 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta - \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ικανοποιούν τις $\begin{cases} \delta - \beta + \gamma = 0, \\ \beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha = 0 \end{cases}$

5 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 4y - 2z + 3w = \alpha, \\ 6x - 9y - 5z + 8w = \beta, \\ 2x - 7y - 3z + 9w = \gamma, \\ 4x - 2y - 2z - w = \delta, \\ -6x + 3y + 3z + 4w = \epsilon \end{cases} \tag{7}$$

να είναι συμβιβαστό. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \text{Το σύστημα (7) είναι συμβιβαστό} \right\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε μια βάση του.

Λύση: Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ικανοποιούν τις $\begin{cases} \delta - \beta + \gamma = 0, \\ \beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha = 0 \end{cases}$. Άρα,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \beta - \gamma \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή

$$V = [(1, 0, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1, 2)]$$

με γεννήτορες σε κλιμακωτή μορφή.

6 Να αποδειχθεί ότι η μικρότερη δυνατή γωνία του διανύσματος $(1,3,-1,3)$ με τη γραμμική θήκη

$$V = [(1,-1,1,1),(5,1,-3,3)]$$

είναι $\frac{\pi}{4}$.

Λύση: Τα διανύσματα της γραμμικής θήκης V είναι της μορφής

$$y = \lambda(1,-1,1,1) + \mu(5,1,-3,3) = (\lambda+5\mu, -\lambda+\mu, \lambda-3\mu, \lambda+3\mu).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\cos(x,y) &= \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{\langle (1,3,-1,3),(\lambda+5\mu,-\lambda+\mu,\lambda-3\mu,\lambda+3\mu)\rangle}{\|(1,3,-1,3)\|\,\|(\lambda+5\mu,-\lambda+\mu,\lambda-3\mu,\lambda+3\mu)\|}\\ &= \frac{20\mu}{\sqrt{20}\sqrt{4\lambda^2+44\mu^2+8\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{5}\mu}{\sqrt{\lambda^2+11\mu+2\lambda\mu}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+11+2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)^2+10}}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\cos(x,y)$ λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της όταν $\lambda = -\mu$ και τότε η τιμή είναι

$$\max\{\cos(x,y)\} = \sqrt{5/10} = \sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4).$$

7 Να δειχθεί ότι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

και

$$B = [(1, -3, 2), (0, 5, -3), (1, -8, 5)]$$

ικανοποιούν τον εγκλεισμό $A \subset B$.
Στη συνέχεια, να προσδιοριστούν διανύσματα $u, v, w, \in \mathbb{R}^3$, ώστε $\{u\}$ βάση του A, $\{u, v\}$ βάση του B και $\{u, v\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Ποια η διάσταση του $A + B$;

Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Κάθε γραμμή του πίνακα ορίζει και ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μπορούμε να γράφουμε

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma_1^T \\ \Gamma_2^T \\ \vdots \\ \Gamma_m^T \end{bmatrix}, \text{ με } \Gamma_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, \dots, m).$$

Κάθε στήλη του πίνακα ορίζει και ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$, δηλαδή μπορούμε να γράφουμε

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix}, \text{ με } \Sigma_i \in \mathbb{R}^m (i = 1, \dots, n).$$

Χώροι γραμμών και στηλών ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Η διαμέριση του πίνακα ως προς τις στήλες του είναι

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \end{bmatrix}, \text{ με } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Η διαμέριση του πίνακα ως προς τις γραμμές του είναι

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma_1^T \\ \Gamma_2^T \end{bmatrix}, \text{ με } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ορισμός

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

1. Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα των στηλών του $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ καλείται χώρος των στηλών του (*column space*) και γράφουμε $C(A) = \{b : b = Ac, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}^n\} \leq \mathbb{R}^m$. Πράγματι,

$$b = Ac = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 + \cdots + c_n\Sigma_n.$$

2. Ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax = 0_m$ καλείται πυρήνας (*nullspace/kernel*) του A και γράφουμε $Ker(A)$ ή $N(A) \leq \mathbb{R}^n$.
3. Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα διανύσματα των γραμμών του $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ καλείται χώρος των γραμμών του (*row space*) και γράφουμε $Row(A) = C(A^T) \leq \mathbb{R}^n$.
4. Ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος $A^Tx = 0_n$ καλείται αριστερός πυρήνας (*left nullspace*) του A και γράφουμε $N(A^T) \leq \mathbb{R}^m$.

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων και βαθμός πίνακα

Ορισμός

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. Η διάσταση του υπόχωρου $C(A)$ καλείται βαθμός στηλών (*column rank*) του πίνακα A.
2. Η διάσταση του υπόχωρου $C(A^T)$ καλείται βαθμός γραμμών (*row rank*) του πίνακα A.

Συμβολίζοντας $r_C(A)$ ($r_R(A)$) το βαθμό στηλών (γραμμών) ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, προφανώς, ισχύει

$$r_C(A), r_R(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων και βαθμός πίνακα: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A βρίσκεται

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Αν a_i και r_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ οι στήλες των A και R αντιστοίχως, προφανώς οι στήλες $r_{i_1} = r_1$ και $r_{i_2} = r_3$ αντιστοιχούν στα ηγετικά στοιχεία (μονάδες), ενώ οι υπόλοιπες εκφράζονται ως γρ. συνδυασμοί αυτών:

$$r_2 = 2r_1 \quad \text{και} \quad r_4 = 4r_1 + (-1)r_3.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίδιες σχέσεις χαρακτηρίζουν και τις στήλες του A, δηλαδή:

$$a_2 = 2a_1 \quad \text{και} \quad a_4 = 4a_1 + (-1)a_3.$$

Για την αναγωγή του A στη μορφή R χρησιμοποιήθηκαν οι στοιχειώδεις πίνακες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων και βαθμός πίνακα: Παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A βρίσκεται $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\underbrace{E_5E_4E_3E_2E_1}_{E}A = R \Leftrightarrow EA = R \Leftrightarrow A = E^{-1}R \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = E^{-1}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}.$$

Η τελευταία συνεπάγεται ότι

$$a_2 = E^{-1}r_2 = E^{-1}2r_1 = 2E^{-1}r_1 = 2a_1$$

και ότι

$$a_4 = E^{-1}r_4 = E^{-1}(4r_1 + (-1)r_3) = 4E^{-1}r_1 + (-1)E^{-1}r_3 = 4a_1 + (-1)a_3.$$

Δηλαδή, οι σχέσεις μεταξύ των στηλών του A είναι ίδες με εκείνες μεταξύ των στηλών του R. Ειδικότερα, το πλήθος των γρ. ανεξάρτητων στηλών του A ταυτίζεται με εκείνο των γρ. ανεξάρτητων στηλών του R.
Μάλιστα, έχουμε $r_c(R) = r_R(R) = 2$ (το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών/ηγετικών στοιχείων), ώστε δείξαμε ότι στο παράδειγμα έχουμε $r_C(A) = r_C(R) = r_R(R)$.

Θεώρημα

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ισχύει ότι οι βαθμοί των στηλών και γραμμών

$$r_C(A) = r_R(A)$$

ταυτίζονται και μάλιστα ισούνται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του A.

Απόδειξη:

- $Row(A) = Row(R)$
- Οι στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του R με ηγετικά στοιχεία είναι γρ. ανεξάρτητες.
- Οι στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του R με ηγετικά στοιχεία αποτελούν βάση του $C(A)$.

Τότε, θα έχουμε

$$r_R(A) = r_R(R) = r_C(R) = r_C(A),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Θεώρημα

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ισχύει ότι οι βαθμοί των στηλών και γραμμών

$$r_C(A) = r_R(A)$$

ταυτίζονται και μάλιστα ισούνται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του A.

Απόδειξη:

- $Row(A) = Row(R)$, επειδή οι γραμμοπράξεις είναι αντιστρέψιμες. Συνεπώς, οι μη μηδενικές γραμμές του R παράγουν το χώρο $Row(A)$ και επιπλέον είναι γρ. ανεξάρτητες. Δηλαδή, αποτελούν βάση για το χώρο $Row(A)$ και μάλιστα

$$r_R(A) = \dim(Row(A)) = \#\text{μη μηδενικών γραμμών } R = \#\text{ηγετικών στοιχείων } R.$$

Θεώρημα

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύει ότι οι βαθμοί των στηλών και γραμμών

$$r_C(A) = r_R(A)$$

ταυτίζονται και μάλιστα ισούνται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ του A.

Απόδειξη:

- Οι στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του R με ηγετικά στοιχεία είναι γρ. ανεξάρτητες. Πράγματι, $R = EA$, όπου E αντιστρέψιμος (γινόμενο στοιχ. πινάκων) και συμβολίζοντας τις αντίστοιχες στήλες

$$\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow r_i = Ea_i \Leftrightarrow a_i = E^{-1} r_i (i = 1, \ldots, n).$$

Όμως οι στήλες $r_{i_1}, \ldots, r_{i_r}$ του R (έστω r ηγ. στοιχεία) που αντιστοιχούν σε ηγετικά στοιχεία είναι τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\{e_1, \ldots, e_r\} \subset \mathbb{R}^m$. Οι αντίστοιχες στήλες $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ του A δίνονται από

$$a_{i_k} = E^{-1} r_{i_k} = E^{-1} e_k \quad (k = 1, \ldots, r)$$

και είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{i_1} + \lambda_2 a_{i_2} + \cdots + \lambda_r a_{i_r} = 0 &\Leftrightarrow \\ \lambda_1 E^{-1} e_1 + \lambda_2 E^{-1} e_2 + \cdots + \lambda_r E^{-1} e_r = 0 &\Leftrightarrow \\ E^{-1} (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r) = 0 &\overset{N(E^{-1})=\{0\}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0. \end{aligned}$$

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων και βαθμός πίνακα

Θεώρημα

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύει ότι οι βαθμοί των στηλών και γραμμών

$$r_C(A) = r_R(A)$$

και μάλιστα ισούνται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ του A.

Απόδειξη:

- Οι στήλες $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ του A που αντιστοιχούν σε στήλες του R με ηγετικά στοιχεία αποτελούν βάση του $C(A)$. Οι στήλες του R που δεν αντιστοιχούν σε ηγετικά στοιχεία είναι γρ. εξαρτημένες από τις $r_{i_1}, \ldots, r_{i_r}$. Από τις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow r_i = Ea_i \Leftrightarrow a_i = E^{-1} r_i (i = 1, \ldots, n).$$

διαπιστώνουμε ότι οι αντίστοιχες στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες απο τις $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Άρα, μία βάση για το χώρο των στήλων του A βρίσκεται $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$.
Δείξαμε συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} r_c(A) = dim(C(A)) = r &= \#\text{ηγετικών στοιχείων } R \\ &= \#\text{μη μηδενικών γραμμών } R = \dim(Row(A)) = r_R(A). \end{aligned}$$

Βαθμός πίνακα (σύνοψη)

Η κοινή τιμή $r_C(A) = r_R(A) = r$ καλείται βαθμός (rank) του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($rank(A) = r$).
Επίσης, σημειώνοντας ότι η διάσταση του πυρήνα αναφέρεται συχνά ως μηδενικότητα (nullity):

$$\begin{aligned}[\#\text{ηγετικών στηλών } R] + [\#\text{ελεύθερων μεταβλητών}] &= [\#\text{στηλών } R]\\ r_C(R) + \dim N(A) &= n\\ rank(A) + null(A) &= n.\end{aligned}$$

Ομοίως, $rank(A) + null(A^T) = m$.

- $\dim C(A) = r$. Μία βάση βρίσκεται από τις στήλες του A στις θέσεις που αντιστοιχούν στις στήλες της κλιμακωτής μορφής R που περιλαμβάνουν ηγετικά στοιχεία (μονάδες).
  Προσοχή: $\dim C(A) = \dim C(R)$ αλλά $C(A) \neq C(R)$.
- $\dim C(A^T) = r$. Μία βάση βρίσκεται από τις μη μηδενικές γραμμές (r πρώτες γραμμές) της αντίστοιχης κλιμακωτής μορφής R.
- $null(A) = n - r$. Μία βάση βρίσκεται από ειδικές λύσεις, χρησιμοποιώντας στοιχεία από τις στήλες της κλιμακωτής μορφής R που αντιστοιχούν σε ελεύθερες μεταβλητές.
- $null(A^T) = m - r$. Μία βάση βρίσκεται από τις (τελευταίες $m - r$) γραμμές του στοιχειώδους πίνακα που οδήγησαν στις $m - r$ μηδενικές γραμμές του R.

Βάση $null(A^T)$

Σχετικά με τη βάση του υπόχωρου $null(A^T)$, σημειώνουμε ότι

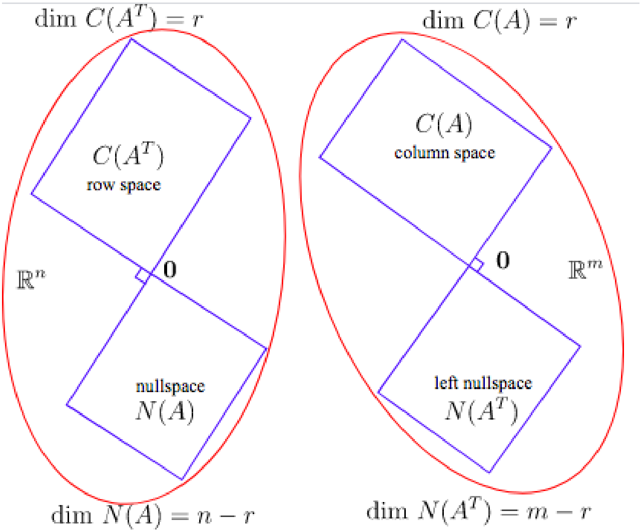
$$y \in N(A^T) \Leftrightarrow A^T y = 0 \Leftrightarrow y^T (A^T)^T = 0^T \Leftrightarrow y^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, στη διαδικασία αναγωγής του A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R, έχουμε

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{m\times n} & I_m \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} R_{m\times n} & E_{m\times m} \end{array}\right].$$

Μία βάση για τον υπόχωρο $null(A^T)$ βρίσκεται από τις τελευταίες γραμμές του στοιχειώδους πίνακα που οδήγησαν στις μηδενικές γραμμές του R.

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων και βαθμός πίνακα



Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων: Παράδειγμα βάσεων $C(A), N(A), C(A^T)$

Παράδειγμα (συνέχεια): Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ με ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Προφανώς $r = rank(A) = 2$ και

$$C(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \quad C(A^T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right], N(A) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

όπου οι ειδικές λύσεις του συστήματος $R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ προσδιορίζονται για τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών $(x_2, x_4) = (1, 0)$ και $(x_2, x_4) = (0, 1)$ αντιστοίχως.

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων: Παράδειγμα βάσεων $N(A^T)$

Παράδειγμα (συνέχεια): Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ με ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Για την αναγωγή του A στη μορφή R χρησιμοποιήθηκαν οι στοιχειώδεις πίνακες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\underbrace{E_5E_4E_3E_2E_1}_{E} A = R$, όπου

$$E = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ώστε

$$N(A^T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Καθετότητες θεμελιωδών υπόχωρων

Αν οι στήλες των πινάκων

$$N \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)} \ \text{ αποτελούν βάση για τον υπόχωρο } \ N(A),$$
$$S \in \mathbb{R}^{n\times r} \ \text{ αποτελούν βάση για τον υπόχωρο } \ C(A^T),$$

έχουμε

$$N^T S = 0_{(n-r)\times r}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια): Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ είδαμε ότι

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ και } \ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

ώστε

$$N^T S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Καθετότητες θεμελιωδών υπόχωρων (2)

Αν οι στήλες των πινάκων

$$M \in \mathbb{R}^{m\times(m-r)} \text{ αποτελούν βάση για τον υπόχωρο } N(A^T),$$
$$R \in \mathbb{R}^{m\times r} \text{ αποτελούν βάση για τον υπόχωρο } C(A),$$

έχουμε

$$M^T R = 0_{(m-r)\times r}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια): Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ είδαμε ότι

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ώστε

$$M^T R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Διαστάσεις θεμελιωδών υπόχωρων: Άσκηση

Εφαρμογή: Να βρεθούν βάσεις και διαστάσεις για τους 4 βασικούς υπόχωρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$