Επίπεδο

Κατσουλέας Γεώργιος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

25 Νοεμβρίου 2020

Το επίπεδο

Ένα επίπεδο (π) ορίζεται:

1. Από ένα σημείο του $P_0 \in (\pi)$ και δύο μη μηδενικά, μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} // (\pi)$ παράλληλα προς αυτό.
2. Από ένα σημείο του $P_0 \in (\pi)$ και μία διεύθυνση $\overrightarrow{u} \perp (\pi)$ κάθετη προς αυτό.

Σκοπός είναι να εκφράσουμε

- Τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $P(x, y, z) \in (\pi)$ ή
- Το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$ του τυχαίου σημείου $P \in (\pi)$,

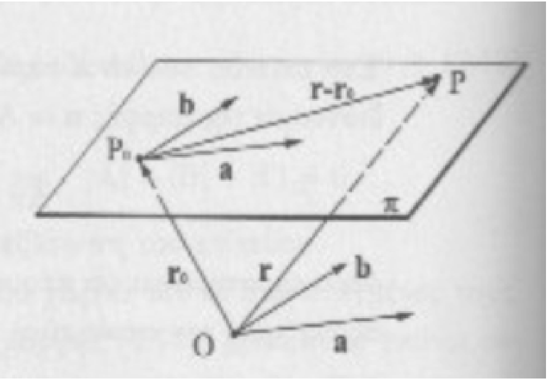
με τη βοήθεια των αντίστοιχων μεγεθών που ορίζουν στις περιπτώσεις (1-2) το επίπεδο (π).

Περιπτώσεις που ανάγονται στς 1–2:

3. Από δύο σημεία του $P_0, P_1 \in (\pi)$ και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a} // (\pi)$ παράλληλο προς αυτό, αλλά όχι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{P_0P_1}$.
4. Από τρία μη συνευθειακά σημεία του $P_0, P_1, P_2 \in (\pi)$.

Περίπτωση 1: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και δύο παράλληλα προς αυτό (μη μηδενικά, μη συγγραμμικά) διανύσματα

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και παράλληλες διευθύνσεις $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.



Περίπτωση 1: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και δύο παράλληλα προς αυτό (μη μηδενικά, μη συγγραμμικά) διανύσματα

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και παράλληλες διευθύνσεις $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

$$P \in (\pi) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ συνεπίπεδα}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ με } \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}.$$

Αν $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0}$, έχουμε

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$,

Διανυσματική εξίσωση: $\left[\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = 0$.

Περίπτωση 1: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και δύο παράλληλα προς αυτό (μη μηδενικά, μη συγγραμμικά) διανύσματα

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και παράλληλες διευθύνσεις $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Αν

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r} = (x, y, z), \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$$

και

$$\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

τότε από την $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$, έχουμε

$$\text{Παραμετρικές εξισώσεις: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \\ y = y_0 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \\ z = z_0 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε στη διανυσματική μορφή $\left[\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = 0$:

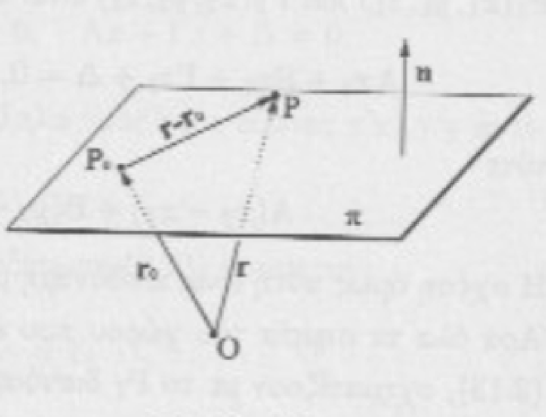
$$\text{Αναλυτική εξίσωση: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Παρατηρήσεις

- Αν δίνονται δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου P_0, $P_1 \in (\pi)$ και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P_0P_1} \neq \lambda \overrightarrow{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{P_0P_1}$.
- Αν δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία P_0, $P_1, P_2 \in (\pi)$, τότε $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ και $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{P_0P_2}$.

Περίπτωση 2: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και διάνυσμα κάθετο προς αυτό

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp (\pi)$.



Περίπτωση 2: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και διάνυσμα κάθετο προς αυτό

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp (\pi)$.
Αν $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0}$, το τυχαίο σημείο $P = (x, y, z) \in (\pi)$ του επιπέδου ικανοποιεί:

$$\begin{aligned}
P \in (\pi) &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n} \\
&\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{n} \rangle - \langle \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0,
\end{aligned}$$

όπου

$$A = \alpha, B = \beta, \Gamma = \gamma, \Delta = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0).$$

Περίπτωση 2: Επίπεδο οριζόμενο από σημείο και διάνυσμα κάθετο προς αυτό

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp (\pi)$.
Αν $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0}$, το τυχαίο σημείο $P = (x, y, z) \in (\pi)$ του επιπέδου ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} P \in (\pi) &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{n} \rangle - \langle \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \end{aligned}$$

όπου

$$A = \alpha, B = \beta, \Gamma = \gamma, \Delta = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0).$$

Παρατήρηση: Οι προηγούμενες περιπτώσεις ανάγονται στην τελευταία, θεωρώντας $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

Θεώρημα

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \quad \text{με} \quad (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0),$$

είναι η καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου με κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (A, B, \Gamma)$.

Διερεύνηση της καρτεσιανής εξίσωσης

Αφού $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$, τότε τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές A, B, Γ είναι διάφορος του 0, άρα:

I. $A \neq 0$, $B = \Gamma = 0$ (Επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων).
Τότε, η εξίσωση γίνεται

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \to x = x_0 \ \text{ με } \ x_0 = -\frac{\Delta}{A},$$

ενώ το κάθετο διάνυσμα στο (π) είναι το $\vec{n} = (A, 0, 0) = A(1, 0, 0)$.
Επομένως, το επίπεδο (π) είναι κάθετο προς τον άξονα $x^{'}x$ στο σημείο του $(x_0, 0, 0)$.

- Όμοια, η εξίσωση $y = y_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς τον $y^{'}y$.
- Όμοια, η εξίσωση $z = z_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς τον $z^{'}z$.

Ειδικές περιπτώσεις:

- $z = 0$: η εξίσωση του επιπέδου xOy.
- $y = 0$: η εξίσωση του επιπέδου xOz.
- $x = 0$: η εξίσωση του επιπέδου yOz.

II. $AB \neq 0 = \Gamma$ (Επίπεδα παράλληλα προς τους άξονες των συντεταγμένων). Τότε, η εξίσωση γίνεται

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \to Ax + By + \Delta = 0,$$

ενώ το κάθετο διάνυσμα στο (π) είναι το $\overrightarrow{n} = (A, B, 0) = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j}$ με $\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{k} \rangle = 0$.

Επομένως, για $\Gamma = 0$, το επίπεδο (π) είναι παράλληλο προς τον άξονα $z'z$.

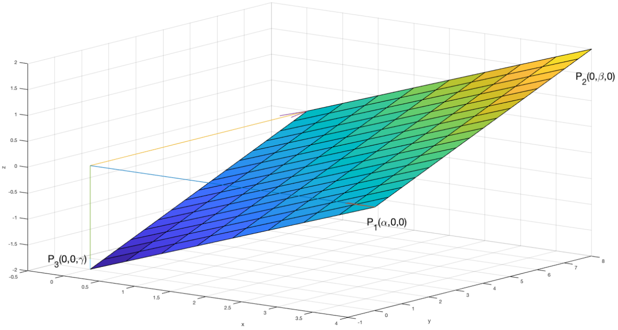
- Αν $A = 0$, τότε (π) παράλληλο προς τον άξονα $x'x$.
- Αν $B = 0$, τότε (π) παράλληλο προς τον άξονα $y'y$.

III. $\Delta = 0$. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ ορίζει επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων

IV. $AB\Gamma\Delta \neq 0$: Το επίπεδο γράφεται:

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1, \quad \text{(κανονική εξίσωση)}$$

όπου $\alpha = -\frac{\Delta}{A}$, $\beta = -\frac{\Delta}{B}$ και $\gamma = -\frac{\Delta}{\Gamma}$.



Εύκολη σχεδίαση, αφού τα σημεία τομής με τους άξονες βρίσκονται:

Αριθμητική εφαρμογή

1 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από:

i. Το σημείο $P_0(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x+y-4z-8=0$.

ii. Το σημείο $P_0(1,-3,2)$ και είναι παράλληλο προς τις ευθείες:

$$(\epsilon_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \quad \text{και} \quad (\epsilon_1): -x+1 = y-3 = z.$$

Αριθμητική εφαρμογή

1 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από:

i. Το σημείο $P_0(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x+y-4z-8=0$.

ii. Το σημείο $P_0(1,-3,2)$ και είναι παράλληλο προς τις ευθείες:

$$(\epsilon_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \quad \text{και} \quad (\epsilon_1): -x+1 = y-3 = z.$$

i. Δίνεται $(\pi^{'}) : 2x+y-4z-8=0$ με $(\pi^{'}) \perp \overrightarrow{n} = (2,1,-4)$.

$$\left.\begin{array}{l} (\pi)//(\pi^{'}) \\ (\pi^{'}) \perp \overrightarrow{n} = (2,1,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow (\pi) \perp \overrightarrow{n} = (2,1,-4)$$

Διανυσματική εξίσωση (π):

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle (x,y,z) - (1,-2,3), (2,1,-4) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1) + (y+2) - 4(z-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y - 4z + 12 = 0. \end{aligned}$$

Αριθμητική εφαρμογή

1 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από:

i. Το σημείο $P_0(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x+y-4z-8=0$.

ii. Το σημείο $P_0(1,-3,2)$ και είναι παράλληλο προς τις ευθείες:

$$(\epsilon_1): \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2} \quad \text{και} \quad (\epsilon_1): -x+1=y-3=z.$$

ii. Παρατηρούμε ότι $\left.\begin{array}{l}(\epsilon_1)//\vec{a_1}(2,3,2)\\(\epsilon_2)//\vec{a_2}(-1,1,1)\end{array}\right\}.$

Όμως, $\vec{a_1},\vec{a_2}//(\pi)$, άρα

$$(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)-4(y+3)+5(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-4y+5z-23=0.$$

Αριθμητική εφαρμογή (2)

2 Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από τα σημεία $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, -1/5)$, $\Gamma(2, 0, -1)$.

Αριθμητική εφαρμογή (2)

2 Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από τα σημεία $A(1,1,0)$, $B(0,0,-1/5)$, $\Gamma(2,0,-1)$.

Το επίπεδο (π) περνά από το σημείο $A(1,1,0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 0-1, -1/5-0) = (-1,-1,-1/5), \quad \text{και}$$
$$\overrightarrow{A\Gamma} = (2-1, 0-1, -1-0) = (1,-1,-1).$$

Το τυχαίο σημείο $P=(x,y,z) \in (\pi)$ του επιπέδου ικανοποιεί:

$$\left[\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ -1 & -1 & -1/5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1/5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -1/5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-0)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 5z + 1 = 0.$$

Αριθμητική εφαρμογή (3)

3 Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας

$$(\epsilon): x - 1 = y = z - 3$$

με το επίπεδο

$$(\pi): x + 2y + z = 16.$$

Αριθμητική εφαρμογή (3)

3 Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας

$$(\epsilon) : x - 1 = y = z - 3$$

με το επίπεδο

$$(\pi) : x + 2y + z = 16.$$

Λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} & x - 1 = y, \\ & y = z - 3, \\ & x + 2y + z = 16 \end{aligned}\right\} \to P(4, 3, 6) \in (\epsilon) \cap (\pi).$$

Αριθμητική εφαρμογή (4)

4 Να δειχθεί ότι η ευθεία

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-3}{-6}$$

βρίσκεται στο επίπεδο

$$2x - 3y + 5z + 1 = 0.$$

Αριθμητική εφαρμογή (4)

4 Να δειχθεί ότι η ευθεία

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-3}{-6}$$

βρίσκεται στο επίπεδο

$$2x-3y+5z+1=0.$$

Θέτουμε κάθε λόγο στην εξίσωση της ευθείας ίσο με t. Έτσι, προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+9t, \\ y &= 6-4t \\ z &= 3-6t, t\in\mathbb{R}. \end{aligned}\right\}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση του επιπέδου, έχουμε

$$2(1+9t)-3(6-4t)+5(3-6t)+1=0,$$

η οποία αληθεύει, για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Έστω

$$(\pi_1) : A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0, \quad (\overrightarrow{n_1} \perp (A_1, B_1, \Gamma_1))$$
$$(\pi_2) : A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0, \quad (\overrightarrow{n_2} \perp (A_2, B_2, \Gamma_2))$$

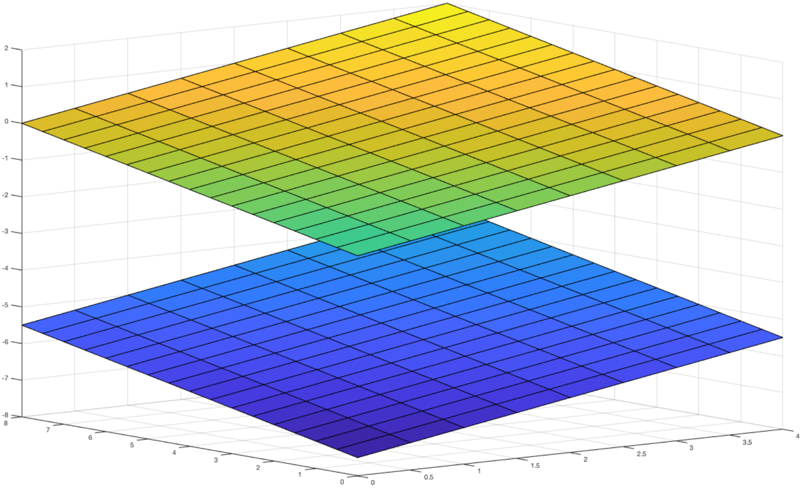
Τότε:

- $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda \in \mathbb{R}$.

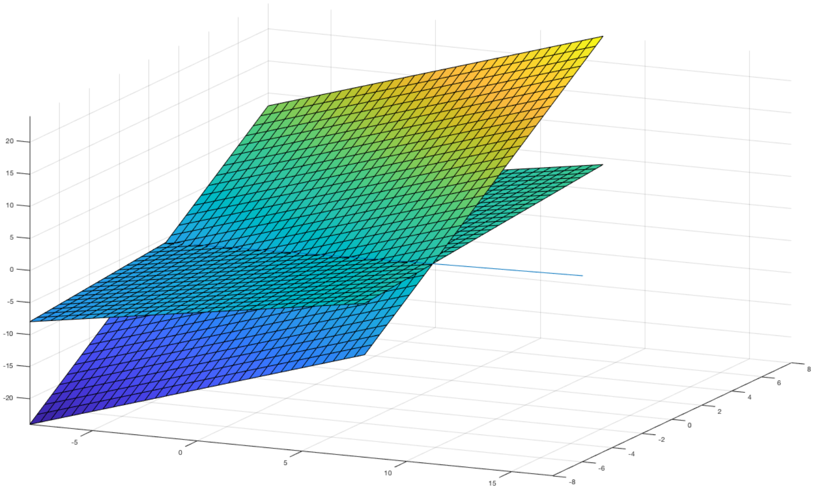
  Άρα:
  - Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \in \mathbb{R}$, τα επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$ συμπίπτουν.
  - Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, τα επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$ παράλληλα.
- $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ μη συγγραμμικά, τότε δύο τουλάχιστον από τους λόγους $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ διαφορετικοί μεταξύ τους.

  Τότε τα επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$ τέμνονται κατά μία ευθεία γραμμή.

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων: παράλληλα επίπεδα



Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων: τεμνόμενα επίπεδα



Εφαρμογή (5)

5 Να βρεθούν οι αναλυτικές και οι παραμετρικές εξισώσεις της τομής των επιπέδων:

$$(\pi_1): 6x + y - z + 2 = 0,$$
$$(\pi_1): 2x - y + 3z - 14 = 0.$$

Εφαρμογή (5)

5 Να βρεθούν οι αναλυτικές και οι παραμετρικές εξισώσεις της τομής των επιπέδων:

$$(\pi_1): 6x + y - z + 2 = 0,$$
$$(\pi_1): 2x - y + 3z - 14 = 0.$$

Έχουμε $(\pi_1)//\overrightarrow{n_1}(6, 1-1)$, $(\pi_2)//\overrightarrow{n_2}(2, -1, 3)$. με $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ μη συγγραμμικά $(\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{0})$, άρα

$$\left.\begin{aligned} 6x + y - z + 2 &= 0 \\ 2x - y + 3z - 14 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 8x &= -2z + 12 \\ 4y &= 10z - 44 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x - 12}{-2} = \frac{4y + 44}{10} = z \Leftrightarrow \frac{x - 3/2}{-1/4} = \frac{y + 11}{10/4} = z$$

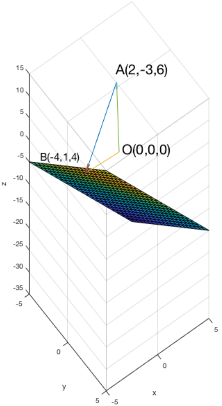
$$\Leftrightarrow \frac{x - 3/2}{1} = \frac{y + 11}{-10} = \frac{z - 0}{-4}. \qquad (\text{Αναλυτικές})$$

Η ευθεία-τομή των $(\pi_1), (\pi_2)$ περνά από το $A(\frac{3}{2}, -11, 0)$ και είναι $//\overrightarrow{a} = (1, -10, -4)$.

$$\text{Παραμετρικές: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t, \\ y = -11 - 10t, \\ z = -4t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Εφαρμογή (6): Προβολή σημείου σε επίπεδο

6 Να βρεθεί η ορθή προβολή του $A(2,-3,6)$ στο επίπεδο $(\pi): -3x+2y-z-10=0$.



Εφαρμογή (6): Προβολή σημείου σε επίπεδο

6 Να βρεθεί η ορθή προβολή του $A(2,-3,6)$ στο επίπεδο $(\pi): -3x+2y-z-10=0$.

Έστω $B(x_B, y_B, z_B)$ η ορθή προβολή του A στο (π).
Η ευθεία (ϵ) που ορίζεται από τα A, B έχει παράλληλο διάνυσμα το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (-3, 2-1)$ του επιπέδου (π).
Άρα η ευθεία (ϵ):

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A} + t\overrightarrow{n}, \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,-3,6) + t(-3,2,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-3t, \\ y = -3+2t, \\ z = 6-t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Για τον προσδιορισμό του B, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του επιπέδου, δηλαδή:

$$-3(2-3t_B)+2(-3+2t_B)-(6-t_B)-10=0 \Leftrightarrow -6+9t_B-6+4t_B-6+t_B-10=0$$
$$\Leftrightarrow 14t_B-28=0 \Leftrightarrow t_B=2.$$

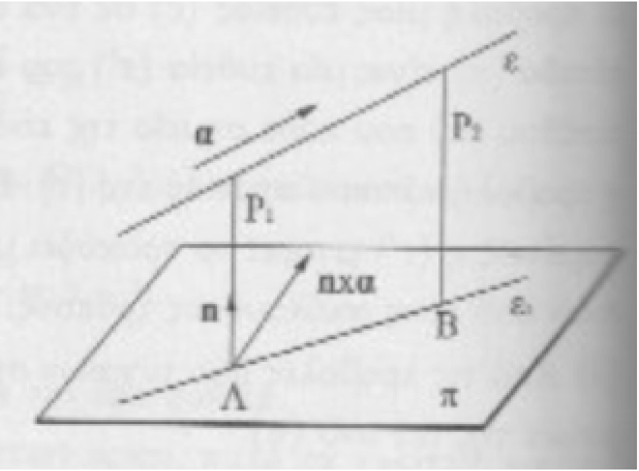
Συνεπώς, το σημείο B βρίσκεται $(x_B, y_B, z_B) = (-4, 1, 4)$.

Εφαρμογή (7): Προβολή σημείου σε επίπεδο

7 Δίνεται το σημείο $P(1,0,3)$ και το επίπεδο $(\pi): x+y+z=13$.

i. Να βρεθεί η προβολή $P_0(x_0,y_0,z_0)$ του σημείου P στο επίπεδο (π).
ii. Να βρεθεί το συμμετρικό $P^{`}(x^{`},y^{`},z^{`})$ του ημείου P ως προς το επίπεδο (π).

8 Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $(\epsilon) : x - 1 = \frac{y}{2} = z - 3$ πάνω στο επίπεδο $(\pi) : x - 2y + 3z - 3 = 0$.



8 Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $(\epsilon): x-1=\frac{y}{2}=z-3$ πάνω στο επίπεδο $(\pi): x-2y+3z-3=0$.

Έστω $(\epsilon^{'})$ η ζητούμενη ευθεία και $(\pi^{'})$ το προβάλλον επίπεδο (δηλ. το επίπεδο που ορίζεται από τις (ϵ) και $(\epsilon^{'})$) $\Rightarrow (\epsilon^{'})=(\pi)\cap(\pi^{'})$.

Έχουμε $\begin{cases}(\epsilon)\perp\overrightarrow{a}=(1,2,1),\\(\pi)\perp\overrightarrow{n}=(1,-2,3)\end{cases}$.

Τότε

$$(\pi^{'})\perp\overrightarrow{u},\ \text{όπου}\ \begin{cases}\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{a},(\overrightarrow{a}//(\epsilon)\subset(\pi^{'})),\\\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{n},(\overrightarrow{n}//(\pi^{'}))\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{n}$$

Άρα

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&2&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=8\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}=(8,-2,-4).$$

και $\overrightarrow{r_0}=\overrightarrow{OP_0}=(1,0,3)$ (η (ϵ) διέρχεται από το P_0). Τότε, η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$\langle\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0},\overrightarrow{u}\rangle=0\Leftrightarrow\langle(x-1,y,z-3),(8,-2,-4)\rangle=0$$
$$\Leftrightarrow 4x-y+2z+2=0.$$

Εφαρμογή (8): Προβολή ευθείας σε επίπεδο

8 Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $(\epsilon): x - 1 = \frac{y}{2} = z - 3$ πάνω στο επίπεδο $(\pi): x - 2y + 3z - 3 = 0$.

Αν $(\epsilon^{'})$ η ζητούμενη ευθεία και $(\pi^{'})$ το προβάλλον επίπεδο (δηλ. το επίπεδο που ορίζεται από τις (ϵ) και $(\epsilon^{'})$) $\Rightarrow (\epsilon^{'}) = (\pi) \cap (\pi^{'})$.
Έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll}(\pi): & x - 2y + 3z - 3 = 0, \\ (\pi^{'}): & 4x - y + 2z + 2 = 0.\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = z - 1, \\ y = 2z - 2.\end{array}\right\} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{y+2}{2} = z.$$

8 Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $(\epsilon): x-1=\frac{y}{2}=z-3$ πάνω στο επίπεδο $(\pi): x-2y+3z-3=0$.

Αν $(\epsilon^{'})$ η ζητούμενη ευθεία και $(\pi^{'})$ το προβάλλον επίπεδο (δηλ. το επίπεδο που ορίζεται από τις (ϵ) και $(\epsilon^{'})$) $\Rightarrow (\epsilon^{'})=(\pi)\cap(\pi^{'})$.
Έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll}(\pi): & x-2y+3z-3=0,\\ (\pi^{'}): & 4x-y+2z+2=0.\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=z-1,\\ y=2z-2.\end{array}\right\} \Leftrightarrow x+1=\frac{y+2}{2}=z.$$

Εναλλακτικά: Από τις προβολές δύυο τυχαίων σημείων της (ϵ) στο (π).

9 Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $(\epsilon) : \frac{x-1}{2} = y - 2 = z$ πάνω στο επίπεδο $(\pi) : 2x - y + z - 1 = 0$.

Εφαρμογή (10): Επίπεδο οριζόμενο από δύο παράλληλες ευθείες

10 Δίνονται οι ευθείες

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5},$$
$$(\epsilon_2) : x - 2y + z + 1 = 0, 2x + y - z - 2 = 0.$$

Να δειχθεί ότι είναι παράλληλες και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζουν.

Εφαρμογή (10): Επίπεδο οριζόμενο από δύο παράλληλες ευθείες

10 Δίνονται οι ευθείες

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5},$$
$$(\epsilon_2) : x - 2y + z + 1 = 0, 2x + y - z - 2 = 0.$$

Να δειχθεί ότι είναι παράλληλες και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζουν.

Για την (ϵ_2), από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

διαπιστώνουμε ότι $(\epsilon_2) // \vec{u} = (1, 3, 5)$, όπως και η (ϵ_1).
Έστω $A(1, 0, 2) \in (\epsilon_1)$ και $B(0, -1. -3) \in (\epsilon_2)$.
Το ζητούμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{AB} = (-1. -1. -5)$ και $\vec{u} = (1, 3, 5)$, ενώ $A(1, 0, 2) \in (\epsilon_1) \subset (\pi)$. Άρα, το τυχαίο σημείο $M(x, y, z)$ του επιπέδου (π) ικανοποιεί:

$$\langle \vec{AM}, \vec{u} \times \vec{AB} \rangle = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - z - 3 = 0.$$

11 Δίνονται

$$(\pi):x+y+z=1,$$
$$(\epsilon):\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-1.$$

i. Να βρεθεί το σημείο τομής A του (π) με την (ϵ).
i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο (π), είναι κάθετη στην (ϵ) και διέρχεται από το A.

11 Δίνονται

$$(\pi) : x + y + z = 1,$$
$$(\epsilon) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z - 1.$$

i. Να βρεθεί το σημείο τομής A του (π) με την (ϵ).
i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο (π), είναι κάθετη στην (ϵ) και διέρχεται από το A.

i.

$$(\epsilon) : \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t + 1, \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\pi) : x + y + z = 1.$$

Η τομή των (ϵ), (π) δίνει $6t + 3 = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow A(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

11 Δίνονται

$$(\pi) : x + y + z = 1,$$
$$(\epsilon) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z - 1.$$

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο (π), είναι κάθετη στην (ϵ) και διέρχεται από το A.

ii. Αν (δ) η ζητούμενη ευθεία, έχουμε $(\delta) : \frac{x-x_0}{\kappa} = \frac{y-y_0}{\lambda} = \frac{z-z_0}{\mu}$, όπου $\begin{cases} (\kappa,\lambda,\mu)//(\delta), \\ (x_0,y_0,z_0)//(\delta) \end{cases}$. Θεωρούμε $(x_0,y_0,z_0) = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

$$\text{Αφού } \left.\begin{matrix} (\delta) \in (\pi), \\ (\delta) \perp (\epsilon) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (\delta) \perp (1,1,1), \\ (\delta) \perp (2,3,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (\kappa,\lambda,\mu) \perp (1,1,1), \\ (\kappa,\lambda,\mu) \perp (2,3,1) \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Θεωρούμε } (\kappa,\lambda,\mu) = (1,1,1) \times (2,3,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2,1,1).$$

Τελικά, $(\delta) : \frac{x-1/3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2/3}{1}$.

12 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το $A(0,1,-1)$ και περιέχει την ευθεία

$$(\epsilon): \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = z+2.$$

12 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το $A(0,1,-1)$ και περιέχει την ευθεία

$$(\epsilon) : \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = z+2.$$

Προφανώς $A \notin (\epsilon)$.

Επιλέγουμε $B(-1,3-2), \Gamma(-7,7,0) \in (\epsilon)$, ώστε $\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (-1,2-1)//(\pi), \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{A\Gamma} = (-7,6,1)//(\pi) \end{cases}.$

Άρα, το τυχαίο σημείο του ζητούμενου επιπέδου έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{r}$ που ικανοποιεί

$$\langle \overrightarrow{r} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \rangle = \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x + 8(y-1) + 8(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Εφαρμογές

13 Δίνονται

$$A_1(-1,-1,0),\ \ A_2(1,0,1),\ \ \text{και}$$
$$\overrightarrow{w_1}=(0,0,1),\ \ \overrightarrow{w_2}=(0,1,0).$$

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ_i) που περιέχει το A_i και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{w_i}$, για $i=1,2$.
ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επίπεδο (π_1) που περιέχει την (ϵ_1) και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{w_1}\times\overrightarrow{w_2}$. Να βρεθεί η εξίσωση του (π_1).
iii. Να ελεγχθεί αν το επίπεδο (π_1) έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ϵ_2).

13 Δίνονται

$$A_1(-1,-1,0),\ \ A_2(1,0,1),\ \ \text{και}$$
$$\overrightarrow{w_1} = (0,0,1),\ \ \overrightarrow{w_2} = (0,1,0).$$

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ_i) που περιέχει το A_i και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{w_i}$, για $i = 1, 2$.
ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επίπεδο (π_1) που περιέχει την (ϵ_1) και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{w_1} \times \overrightarrow{w_2}$. Να βρεθεί η εξίσωση του (π_1).
iii. Να ελεγχθεί αν το επίπεδο (π_1) έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ϵ_2).

i. Προφανώς

$$(\epsilon_1) : \begin{cases} x = -1 + 0t = -1, \\ y = 1 + 0t = 1, \\ z = 0 + 1t = t, \end{cases} \quad \text{και} \quad (\epsilon_2) : \begin{cases} x = 1 + 0t = 1, \\ y = 0 + 1t = t, \\ z = 1 + 0t = 1, \end{cases} .$$

13 Δίνονται $A_1(-1,-1,0)$, $A_2(1,0,1)$ και $\overrightarrow{w_1}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{w_2}=(0,1,0)$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ_i) που περιέχει το A_i και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{w_i}$, για $i=1,2$.

ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επίπεδο (π_1) που περιέχει την (ϵ_1) και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{w_1}\times\overrightarrow{w_2}$. Να βρεθεί η εξίσωση του (π_1).

iii. Να ελεγχθεί αν το επίπεδο (π_1) έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ϵ_2).

ii. Είναι $\left.\begin{array}{l}(\epsilon_1)//\overrightarrow{w_1},\\ \overrightarrow{w_1}\perp\overrightarrow{w_1}\times\overrightarrow{w_2}\end{array}\right\} \Rightarrow (\epsilon_1)\perp\overrightarrow{w_1}\times\overrightarrow{w_2} \Rightarrow \exists(\pi_1)$ με $(\epsilon_1)\subset(\pi_1)$ και $(\pi_1)\perp\overrightarrow{w_1}$.

Έχουμε $\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,0)\perp(\pi_1)$.

Συνεπώς, $(\pi_1):\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\Rightarrow -x+\delta=0$. Αλλά

$$(\epsilon_1)\subset(\pi_1) \quad\Rightarrow\quad A_1(-1,-1,0)\in(\pi_1) \quad\Rightarrow\quad \delta=-1.$$

Τελικά,

$$(\pi_1): x+1=0.$$

13 Δίνονται $A_1(-1,-1,0)$, $A_2(1,0,1)$ και $\overrightarrow{w_1}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{w_2}=(0,1,0)$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ_i) που περιέχει το A_i και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{w_i}$, για $i=1,2$.

ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επίπεδο (π_1) που περιέχει την (ϵ_1) και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{w_1}\times\overrightarrow{w_2}$. Να βρεθεί η εξίσωση του (π_1).

iii. Να ελεγχθεί αν το επίπεδο (π_1) έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ϵ_2).

iii. Είναι $\left.\begin{array}{l}(\pi_1): x+1=0,\\ (\epsilon_2): \begin{cases} x=1,\\ y=t,\\ z=1,\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists$ κοινή λύση του συστήματος.

Άρα $(\pi_1)\cap(\epsilon_2)=\emptyset$.

Η απόσταση του σημείου

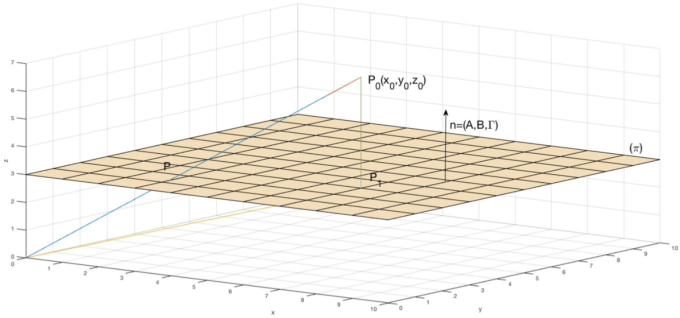
$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

από το επίπεδο

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

δίνεται από τον τύπο

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$



Εφαρμογές: Απόσταση σημείου από επίπεδο (2)

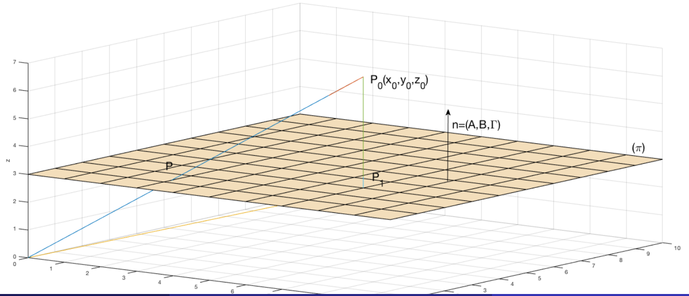
Έστω τυχαίο σημείο του επιπέδου

$$P(x, y, z) \in (\pi).$$

Η απόσταση $d(P_0, \pi)$ είναι ίση με

$$d(P_0,\pi) = \left|Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{P_0P}\right| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\rangle\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0-(Ax+By+\Gamma z)|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$



Εφαρμογή: Η απόσταση του σημείου $A_1(-1,-1,0)$ από το επίπεδο

$$6x - 3y - 2z - 6 = 0$$

βρίσκεται

$$d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} = \frac{|6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{15}{7}.$$