Η ευθεία στο χώρο

Κατσουλέας Γιώργος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

18 Νοεμβρίου 2020

Ευθεία στο χώρο

Μία ευθεία (ϵ) στο χώρο ορίζεται μονοσήμαντα:

1. Από ένα σημείο της P_0 και μία διεύθυνση προς την οποία είναι παράλληλη $(\overrightarrow{u})$.
2. Από δύο σημεία της P_0, P_1.

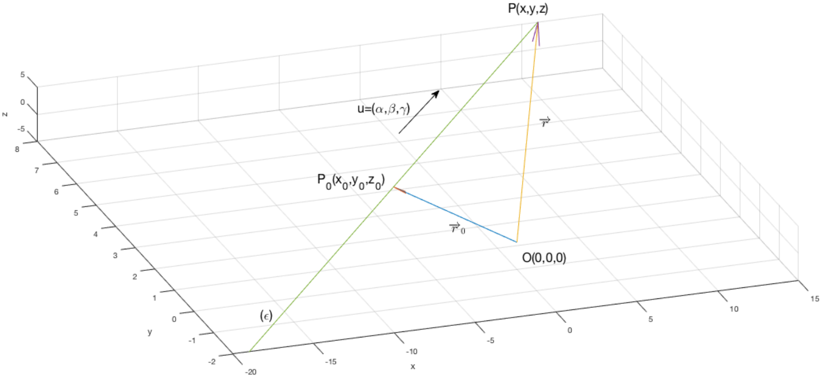
Σκοπός είναι να εκφράσουμε

- Τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $P(x, y, z) \in (\epsilon)$ ή
- Το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$ του τυχαίου σημείου $P \in (\epsilon)$,

με τη βοήθεια των αντίστοιχων μεγεθών που ορίζουν στις περιπτώσεις (1-2) την ευθεία (ϵ).

Περίπτωση 1: Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Δεδομένα: Σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\epsilon)$ και διεύθυνση $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$.



Περίπτωση 1: Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Έστω P τυχαίο σημείο της ευθείας (ϵ) με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} P \in (\epsilon) &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας (ϵ):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

ή Διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ϵ):

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u} = \vec{0}.$$

Φυσική ερμηνεία: Η εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$ περιγράφει την τροχιά κινητού στο χώρο με σταθερή διανυσματική ταχύτητα $\vec{u}$ και χρονική παράμετρο t. Προφανώς, η τροχιά είναι ευθεία και για $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο P_0 με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$.

Περίπτωση 1: Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

Θέτοντας $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z)$, λαμβάνουμε τις Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας (ϵ):

$$P(x,y,z) \in (\epsilon) \Leftrightarrow \underbrace{(x,y,z)}_{\vec{r}} = \underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\vec{r_0}} + t\underbrace{(\alpha,\beta,\gamma)}_{\vec{u}}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta, \\ z = z_0 + t\gamma, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αναλυτικές εξισώσεις ευθείας (ϵ): Απαλείφοντας το t, έχουμε

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \quad \text{αν} \quad \alpha\beta\gamma \neq 0$$

ή

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha\beta \neq 0$$

ή

$$x = x_0 + t\alpha, \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad \beta = \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha \neq 0$$

Περίπτωση 1: Αριθμητική εφαρμογή

Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, -2, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$.

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\begin{aligned}\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{u} &= (1, -2, 0) + t\,(1, -2, 3) \\ &= (1 + t, -2 - 2t, 3t) \\ &= (1 + t)\,\vec{i} - (2 + 2t)\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Παραμετρικές εξισωσεις:

$$x = 1 + t, \quad y = -2 - t, \quad z = 3t. \quad t \in \mathbb{R},$$

απ'όπου με απαλοιφή του t, έχουμε

$$x - 1 = \frac{y + 2}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, -2, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Διανυσματική εξίσωση: Έχουμε

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x-1) & (y+2) & z \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= [3(y+2) + 2z]\,\vec{i} - [3(x-1) - z]\,\vec{j} + [(-2)(x-1) - (y+2)]\,\vec{k}.$$

Οπότε

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y+2) + 2z = 0, \\ 3(x-1) - z = 0, \\ (-2)(x-1) - (y+2) = 0, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Περίπτωση 1: Παρατήρηση για άξονες

Ο άξονας $x^{'}x$ αποτελεί ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0,0,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} = \overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$.

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{u} = (0,0,0) + t\,(1,0,0) = (t,0,0) = t\,\overrightarrow{i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Παραμετρικές εξισωσεις:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αντίστοιχα, για τον άξονα $y^{'}y$, έχουμε

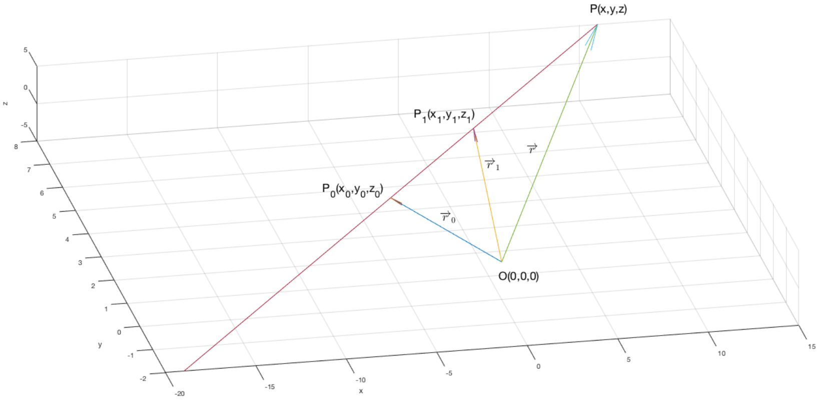
$$x = 0, \quad y = t, \quad z = 0. \quad t \in \mathbb{R}$$

και για τον άξονα $z^{'}z$,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t. \quad t \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2: Ευθεία από δύο σημεία

Δεδομένα: Σημεία $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in (\epsilon)$.



Περίπτωση 2: Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Έστω P τυχαίο σημείο της ευθείας (ϵ) με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$. Τότε, θεωρώντας ως παράλληλο διάνυσμα της ευθείας $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Μάλιστα, έχουμε

$$\begin{aligned} P \in (\epsilon) &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0} \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0\right) = t\left(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_0\right), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας (ϵ):

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\left(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_0\right), t \in \mathbb{R}$$

ή Διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ϵ):

$$\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0\right) \times \left(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_0\right) = \overrightarrow{0}.$$

Περίπτωση 2: Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

Θέτοντας $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = (x, y, z)$, λαμβάνουμε τις Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας (ϵ):

$$P(x, y, z) \in (\epsilon) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0), \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0), \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αναλυτικές εξισώσεις ευθείας (ϵ): Απαλοίφοντας το t, έχουμε

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad \text{αν} \quad (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0$$

ή

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad \gamma = 0 \quad \text{και} \quad (x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \neq 0$$

ή

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad y_1 - y_0 = z_1 - z_0 = 0.$$

Περίπτωση 2: Αριθμητική εφαρμογή

Να εξεταστεί αν το σημείο $P(2,3,5)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P_0(1,3,2)$ και $P_1(2,1,0)$.

Διανυσματική εξίσωση ευθείας (ϵ) που ορίζεται από $P_0, P_1 \in (\epsilon)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\,\overrightarrow{u} &= (1,3,2) + t\,(2-1, 1-3, 0-2)\\ &= (1+t, 3-2t, 2-2t)\\ &= (1+t)\,\overrightarrow{i} + (3-2t)\,\overrightarrow{j} + (2-2t)\,\overrightarrow{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Παραμετρικές εξισωσεις:

$$x = 1+t, \;\; y = 3-2t, \;\; z = 2-2t. \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $t = 1$ που δίνει η πρώτη εξίσωση δεν επαληθεύει τις άλλες δύο εξισώσεις. Άρα το σημείο $P(2,3,5) \notin (\epsilon)$.

Δίδονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2), από τις οποίες η (ϵ_1) διέρχεται από τα σημεία $A(0,1,0)$ και $B(1,2,1)$, ενώ η (ϵ_2) διέρχεται από το $\Gamma(1,0,1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{j}$. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες αυτές τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ϵ_1) βρίσκονται:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) = 0 + t(1-0) = t, \\ y = y_A + t(y_B - y_A) = 1 + t(2-1) = 1 + t, \\ z = z_A + t(z_B - z_A) = 0 + t(1-0) = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αντίστοιχα, για την (ϵ_2) βρίσκονται ($\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$):

$$\begin{cases} x = x_\Gamma + \lambda u_1 = 1 + \lambda 0 = 1, \\ y = y_\Gamma + \lambda u_2 = 0 + \lambda 1 = \lambda, \\ z = z_\Gamma + \lambda u_3 = 1 + \lambda 0 = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Προκειμένου κάποιο σημείο να βρίσκεται και στις δύο αυτές ευθείες, θα πρέπει να υπάρχουν t, λ:

$$t = 1, \quad \lambda = 1 + t, \quad 1 = t,$$

δηλαδή $(t, \lambda) = (1, 2)$, ώστε $P(1,2,1) \in (\epsilon_1) \cap (\epsilon_2)$.

Παρατηρήσεις

i. Μία ευθεία μπορεί επίσης να περιγραφεί και ως τομή δύο επιπέδων:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0.$$

ii. Δύο ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ με εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x_1 + t\alpha_1, \\ y = y_1 + t\beta_1, \\ z = z_1 + t\gamma_1, \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} x = x_2 + t\alpha_2, \\ y = y_2 + t\beta_2, \\ z = z_2 + t\gamma_2, \end{cases}$$

σχηματίζουν γωνία πο προσδιορίζεται από

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \frac{\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle}{\|\overrightarrow{u_1}\| \, \|\overrightarrow{u_1}\|},$$

όπου $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ και $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$.
Σημειώνουμε ότι οι ευθείες δεν είναι απαραίτητο να τέμνονται.

1 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1): \vec{r} = \vec{r_1} + t\,\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(\epsilon_2): \vec{r} = \vec{r_2} + s\,\vec{b}, \quad s \in \mathbb{R},$$

όπου $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι

i. $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow \left[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0.$

ii. $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ ασύμβατες $\Leftrightarrow \left[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{a}, \vec{b}\right] \neq 0.$

Απόδειξη:

i.

$$\begin{aligned} (\epsilon_1), (\epsilon_2) \quad \text{συνεπίπεδες} \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b} \quad \text{συνεπίπεδα} \\ &\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0 \end{aligned}$$

1 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t\,\overrightarrow{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(\epsilon_2) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} + s\,\overrightarrow{b}, \quad s \in \mathbb{R},$$

όπου $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Να αποδείξετε ότι

i. $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = 0.$

ii. $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ ασύμβατες $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \neq 0.$

Απόδειξη:

ii.

$$\begin{aligned}
(\epsilon_1), (\epsilon_2) \quad \text{ασύμβατες} \quad &\Leftrightarrow (\epsilon_1), (\epsilon_2) \quad \text{μη συνεπίπεδες} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \quad \text{μη συνεπίπεδα} \\
&\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \neq 0
\end{aligned}$$

2 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1): \vec{r}_1 = \vec{r_A} + t\,\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(\epsilon_2): \vec{r}_2 = \vec{r_B} + s\,\vec{b}, \quad s \in \mathbb{R},$$

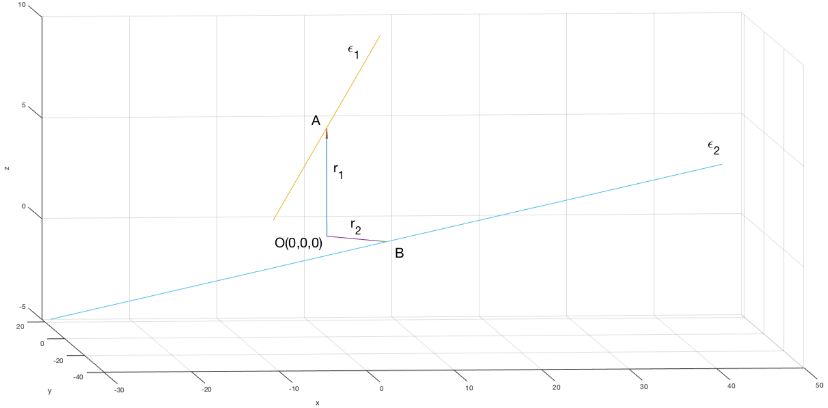
όπου $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, είναι ασύμβατες, να αποδείξετε ότι η απόστασή τους, δλδ. το μήκος του κοινού καθέτου τμήματος είναι:

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\left|\left[\vec{r_A} - \vec{r_B}, \vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|}.$$

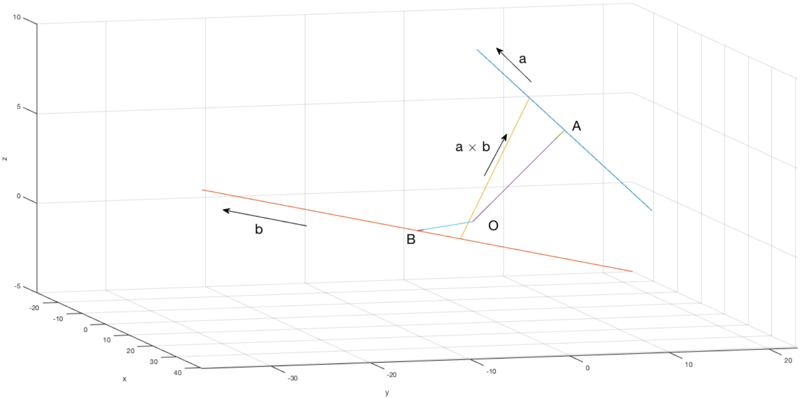
Παρατηρούμε ότι η ευθεία που συνδέει τα πλησιέστερα σημεία των δύο ευθειών (ϵ_1), (ϵ_2) έχει διεύθυνση που ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{n} \equiv \vec{a} \times \vec{b}$.
Η ελάχιστη απόσταση των δύο ευθείων $d(\epsilon_1, \epsilon_2)$ δίνεται από το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{BA} = \vec{r_A} - \vec{r_B}$ στη διεύθυνση της κοινής καθέτου $\vec{n} \equiv \vec{a} \times \vec{b}$:

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\left|\langle \vec{n}, \vec{r_A} - \vec{r_B} \rangle\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}.$$

Ασύμβατες ευθείες



Κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών



Πρόταση

Έστω $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}\overrightarrow{b}$$

Σχετικά με το μέτρο της προβολής, παρατηρούμε

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}\frac{\overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|},$$

όπου $\frac{\overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}$ το αντίστοιχο κανονικοποιημένο διάνυσμα (μέτρου 1).
Συνεπώς,

$$\left\|Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}\right\| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle\right|}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}.$$

Απόσταση ασύμβατων ευθειών: Εφαρμογή

- Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) που ορίζονται από τα σημεία $\overrightarrow{r_A} = (2, 6, -9)$ και $\overrightarrow{r_B} = (-1, -2, 3)$ και τα διανύσματα κατεύθυνσης $\overrightarrow{a} = (3, 4, -3)$ και $\overrightarrow{b} = (2, -6, 1)$, αντιστοίχως. Να βρεθεί η απόσταση των δύο ευθειών.

Προφανώς, οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες ($\overrightarrow{a} \neq \lambda \overrightarrow{b}$) και δεν τέμνονται.
Η κοινή κάθετος των δύο ασύμβατων ευθειών έχει τη διεύθυνση

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (-20, -11, -26).$$

Στην περίπτωση αυτή, $\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B} = (3, 8, -12)$

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right] \right|}{\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|} = \frac{|\langle (-20, -11, -26), (3, 8, -12) \rangle|}{3\sqrt{133}} = 4.74.$$

Απόσταση ασύμβατων ευθειών: Αναλυτική μορφή

- Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) από τις σχέσεις:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1},$$
$$\frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}.$$

Η ελάχιστη απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$d(\epsilon_1,\epsilon_2)=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\left[(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_2\gamma_1)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_2\alpha_1)^2\right]^{1/2}}.$$

Εφαρμογή

3 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y-9}{-2} = z - 5$$
$$(\epsilon_2) : \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z.$$

i. Να δειχθεί ότι οι ευθείες είναι ασύμβατες (δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται).
ii. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση.
iii. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής κάθετης.

Απόδειξη:

i. Για τις δεδομένες ευθείες, έχουμε $\overrightarrow{a} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (7, -6, 1)$ και

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{r_1} &= (1,9,5) \\ \overrightarrow{r_2} &= (6,-7,0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = (-5, 16, 5).$$

$$(\epsilon_1), (\epsilon_2) \quad \text{ασύμβατες} \quad \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} -5 & 16 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 116 \neq 0.$$

3 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y - 9}{-2} = z - 5$$
$$(\epsilon_2) : \frac{x - 6}{7} = \frac{y + 7}{-6} = z.$$

ii.-iii. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση και η εξίσωση της κοινής κάθετης.

Απόδειξη:

ii.-iii. Τα τυχαία σημεία $A \in (\epsilon_1)$, $B \in (\epsilon_2)$ ικανοποιούν:

$$A = (1 + t, 9 - 2t, 5 + t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{και} \quad B = (6 + 7s, -7 - 6s, s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\overrightarrow{AB} = (5 - t + 7s, 16 + 2t - 6s, -5 - t + s)$ και $\overrightarrow{AB} \perp (\epsilon_1), (\epsilon_1)$ ανν

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{a} \rangle = 0, \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{b} \rangle = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 10s - 16 = 0, \\ 10t - 43s - 63 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ s = -1. \end{cases}$$

Άρα τα ίχνη της κοινής κάθετης είναι $A(3, 5, 7)$ και $B(-1, -1, -1)$.

3 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y-9}{-2} = z - 5$$
$$(\epsilon_2) : \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z.$$

ii.-iii. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση και η εξίσωση της κοινής κάθετης.

Απόδειξη:

ii.-iii. Τα ίχνη της κοινής κάθετης είναι $A(3,5,7)$ και $B(-1,-1,-1)$, ώστε

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-5)^2 + (-1-7)^2} = 2\sqrt{29}.$$

και η εξίσωση της ευθείας του κοινού καθέτου τήματος βρίσκεται από την

$$(\vec{r} - \vec{r_A}) \times \vec{u} = \vec{0},$$

όπου $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4,-6,-8)$ και $\vec{r_A} = (3,5,7)$. Συνεπώς,

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8}.$$

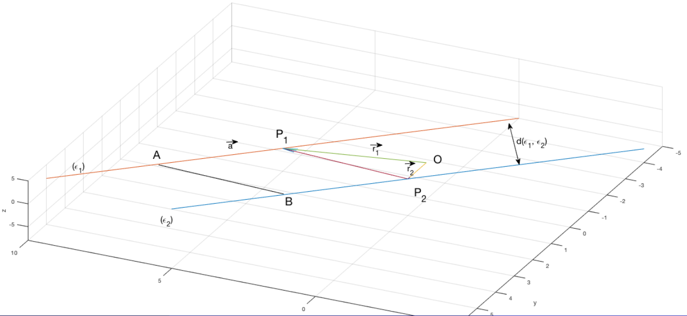
Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών

4 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

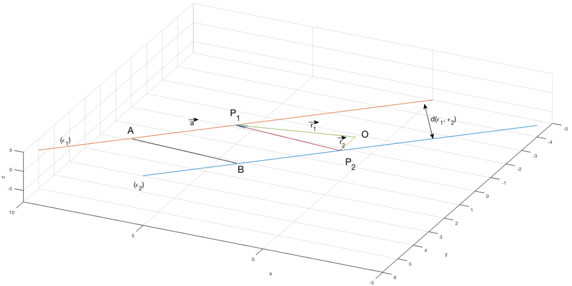
$$(\epsilon_1): \vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$
$$(\epsilon_2): \vec{r} = \vec{r_2} + s\vec{a}, s \in \mathbb{R}.$$

Η απόστασή τους $d(\epsilon_1, \epsilon_2)$ δίνεται από τη σχέση

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\|(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}.$$



Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών



Έστω $Oxyz$ ορθοκανονικό σύστημα και $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{OP_2} = \vec{r_2}$.
Θεωρούμε σημεία $A \in (\epsilon_1)$ και $B \in (\epsilon_2)$, τέτοια ώστε $\overrightarrow{P_1A} = \overrightarrow{P_2B} = \vec{a}$.
Για το εμβαδόν $E_{P_1P_2BA}$ του παραλληλογράμμου P_1P_2BA:

$$\left.\begin{aligned} E_{P_1P_2BA} &= \left\| \overrightarrow{P_1 2P_2} \times \vec{a} \right\| = \left\| (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{a} \right\|, \\ E_{P_1P_2BA} &= \left\| \vec{a} \right\| d(\epsilon_1, \epsilon_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\left\| (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{a} \right\|}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

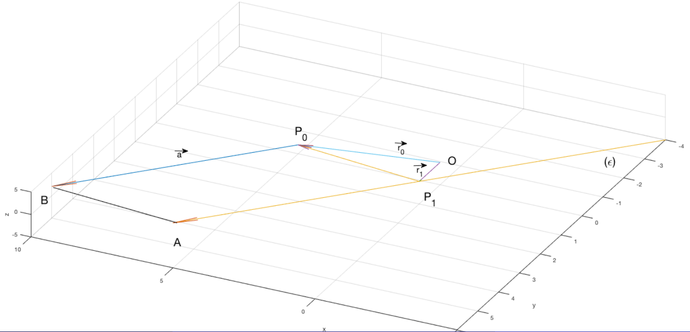
Απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου

5 Δίνεται η ευθεία:

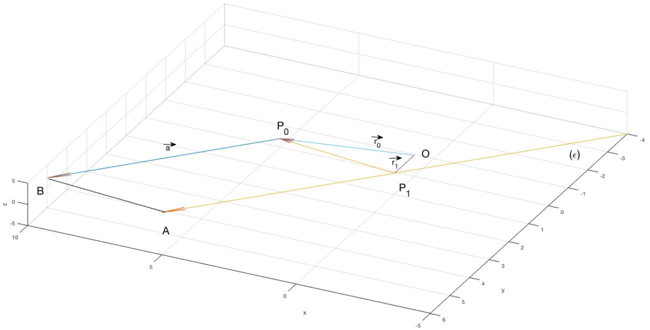
$$(\epsilon) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t\,\overrightarrow{a}, t \in \mathbb{R}$$

και το σημείο P_0 με $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0}$. Η απόσταση $d(P_0, \epsilon)$ του σημείου από την ευθεία δίνεται από τη σχέση

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\|(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a}\|}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$



Απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου



Έστω P_1 σημείο της ευθείας (ϵ) με $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r_1}$.
Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο P_0P_1AB που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{a} = \overrightarrow{P_1A}$ και $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{r_0} - \vec{r_1}$.
Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E_{P_0P_1AB} &= \left\|(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \times \vec{a}\right\|, \\ E_{P_0P_1AB} &= \left\|\vec{a}\right\| d(P_0, \epsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(P_0, \epsilon) = \frac{\left\|(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \times \vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

Απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου: Εφαρμογή

- Στο $\mathbb{R}^3$ δίνονται το σημείο $A = (1, -4, 5)$ και η ευθεία:

$$(\epsilon) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{3}$$

Ζητείται η απόσταση $d(A, \epsilon)$ του σημείου από την ευθεία.

Έχουμε $\begin{cases} (\epsilon) // \vec{a} = (2, 1, 3), \\ P_0(1, -3, 4) \in (\epsilon). \end{cases}$

Προφανώς, $\vec{r_A} - \vec{r_0} = (0, -1, 1)$ και

$$(\vec{r_A} - \vec{r_0}) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, 2, 2).$$

Συνεπώς $\begin{cases} \|(\vec{r_0} \times \vec{r_1}) \times \vec{a}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24}, \\ \|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \end{cases}$ άρα

$$d(A, \epsilon) = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}}{2 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

6 Δίνεται η ευθεία:

$$(\epsilon): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

και το σημείο $A(2,5,6) \notin (\epsilon)$

i. Ζητείται η προβολή του A στον (ϵ).
ii. Να βρεθεί $A^{'}$ συμμετρικό του A ως προς την (ϵ).

i. Έστω $H(x_0, y_0, z_0) \in (\epsilon)$ το ζητούμενο σημείο, ώστε $\overrightarrow{AH} \perp (\epsilon)$:

$$\left.\begin{array}{l} H(x_0,y_0,z_0) \in (\epsilon), \\ \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{a} \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x_0-1}{1} = \frac{y_0-2}{2} = \frac{z_0-3}{3}, \\ \langle (x_0-2, y_0-5, z_0-6), (1,2,3) \rangle = 0. \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = 1+t, \\ y_0 = 2+2t, \\ z_0 = 3+3t, \\ x_0+2y_0+3z_0 = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{15}{7}, \\ y_0 = \frac{30}{7}, \\ z_0 = \frac{45}{7}, \\ t = \frac{8}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow H\left(\frac{15}{7}, \frac{30}{7}, \frac{45}{7}\right).$$

6 Δίνεται η ευθεία:

$$(\epsilon) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

και το σημείο $A(2,5,6) \notin (\epsilon)$

i. Ζητείται η προβολή του A στον (ϵ).

ii. Να βρεθεί $A^{'}$ συμμετρικό του A ως προς την (ϵ).

ii. Το $H\left(\frac{15}{7}, \frac{30}{7}, \frac{45}{7}\right) \in (\epsilon)$ είναι το μέσον του $\overrightarrow{AA^{'}} \perp (\epsilon)$.
Άρα, αν $A^{'}(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ το συμμετρικό, τότε:

$$H\left(\frac{x^{'}+x_A}{2}, \frac{y^{'}+y_A}{2}, \frac{z^{'}+z_A}{2}\right)$$

με

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{x^{'}+x_A}{2} &= x_0, \\ \tfrac{y^{'}+y_A}{2} &= y_0, \\ \tfrac{z^{'}+z_A}{2} &= z_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{'} &= \tfrac{30}{7} - 2 = \tfrac{16}{7}, \\ y^{'} &= \tfrac{60}{7} - 5 = \tfrac{25}{7}, \\ z^{'} &= \tfrac{90}{7} - 6 = \tfrac{48}{7} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{'}\left(\frac{16}{7}, \frac{25}{7}, \frac{48}{7}\right)$$

7 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{3-z}{4},$$
$$(\epsilon_2) : \frac{1-x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{-z+2}{8}, \quad \alpha\beta \neq 0.$$

Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων α, β, έτσι ώστε οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) να είναι ασύμβατες.

$$(\epsilon_1) : // \overrightarrow{u} = (3, 2, -4) \text{ και διέρχεται από } \quad A(2, 1, 3),$$
$$(\epsilon_2) : // \overrightarrow{v} = (-\alpha, \beta, -8) \text{ και διέρχεται από } \quad B(1, 0, 2)$$

Θέτουμε $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB}$ με $\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = (1, 1, 1)$.
Για να είναι ασύμβατες, πρέπει $\left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = \langle (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \neq 0$:

$$(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (-6, 7 - 1)$$

Άρα $\langle (-6, 7, -1), (-\alpha, \beta, -8) \rangle \neq 0 \Rightarrow 6\alpha + 7\beta \neq -8$ και $\alpha\beta \neq 0$.