Διανυσματικός λογισμός III

Κατσουλέας Γιώργος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

11 Νοεμβρίου 2020

Περιεχόμενα

Ορισμός

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ορίζουμε ως εξωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ (συμβ. $\vec{a} \times \vec{b}$) το διάνυσμα

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Συμβολικά, γράφουμε

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Εξωτερικό γινόμενο - Παράδειγμα

Αν

$$\vec{a} = (2, -3, 5) \quad \text{και} \quad \vec{b} = (-1, 2, -3)$$

ως προς την ορθοκανονική βάση $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} \subset \mathbb{R}^3$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}, \\ \vec{b} &= -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Εξωτερικό γινόμενο - Ιδιότητες

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
3. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$.
4. $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$ και
   $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$.
5. $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$.

Παρατήρηση: Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι προσεταιριστικό, δηλαδή

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right).$$

Εξωτερικό γινόμενο - Αποδείξεις Ιδιοτήτων (1)

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
2. $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0},$$

$$\vec{a} \times \vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0},$$

$$\vec{0} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0}.$$

3 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\
&= -\vec{b} \times \vec{a}.
\end{aligned}$$

4 $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ και
$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.
\end{aligned}$$

Εξωτερικό γινόμενο - Αποδείξεις Ιδιοτήτων (4)

5 $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right).$

Απόδειξη:

$$\lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}.$$

Μικτό γινόμενο - Διπλό εξωτερικό γινόμενο

Θεώρημα

Για κάθε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ και $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

1. $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$
2. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \in \mathbb{R}^3,$
   $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \in \mathbb{R}^3.$
3. $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

Σημείωση:

- Το γινόμενο $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ καλείται μικτό γινόμενο των $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ και συμβολίζεται με
$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \quad \text{ή} \quad \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right].$$
- Τα γινόμενα $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ και $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ καλούνται διπλά εξωτερικά

1 $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Απόδειξη: Είναι

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right).$$

Έτσι, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και λόγω των ιδιοτήτων της ορίζουσας, έχουμε:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle.$$

Αποδείξεις (2)

2 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

Απόδειξη: Είναι

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Άρα

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} -a_1b_3 + a_3b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & -a_1b_3 + a_3b_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= (a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2)\, \vec{i} -$$
$$- (a_2b_3c_3 - a_3b_2c_3 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)\, \vec{j} +$$
$$+ (a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 + a_1b_3c_1 - a_3b_1c_2)\, \vec{k}.$$

Αποδείξεις (3)

2 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$

Απόδειξη (συνέχεια): Είδαμε

$$\begin{aligned}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} &= (a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2)\,\vec{i} - \\ &- (a_2b_3c_3 - a_3b_2c_3 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)\,\vec{j} + \\ &+ (a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 + a_1b_3c_1 - a_3b_1c_2)\,\vec{k}\,.\end{aligned}$$

Εξάλλου,

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} &= (a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3)\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) - \\ &- (b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3)\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) \\ &= (a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3)\,\vec{i} + \\ &+ (-a_1c_1b_2 - a_3c_3b_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_3c_3)\,\vec{j} + \\ &+ (a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2)\,\vec{k}\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ισότητα.

Αποδείξεις (4)

3 $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 &= \left\| \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \right\|^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.
\end{aligned}$$

Χαρακτηρισμός συγγραμμικών διανυσμάτων

Παρατήρηση

Δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδεν.

Από την ιδιότητα

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \cos^2\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \left(1 - \cos^2\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right) \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \sin^2\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right),
\end{aligned}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right|.$$

Διεύθυνση εξωτερικού γινομένου

Από την αλγεβρική έκφραση του μικτού γινομένου

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

και από την ιδιότητα μηδενισμού της ορίζουσας ενός πίνακα που έχει δύο γραμμές ίσες, έχουμε

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a},$$

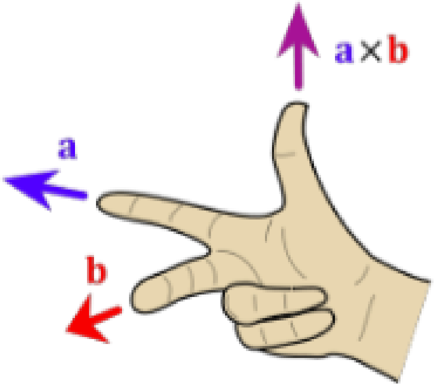
$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}.$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$.

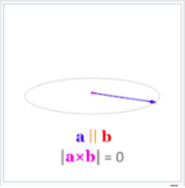
Πόρισμα

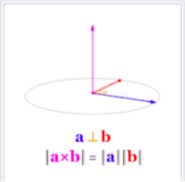
Αν $\vec{a}, \vec{b}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και με κατεύθυνση τέτοια, ώστε το σύνολο $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right\}$ να αποτελεί μία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$.

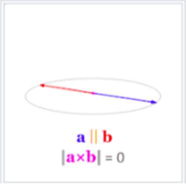
Διεύθυνση εξωτερικού γινομένου

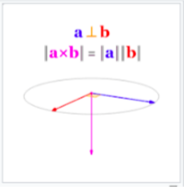


Χαρακτηριστικές εικόνες εξωτερικών γινομένων

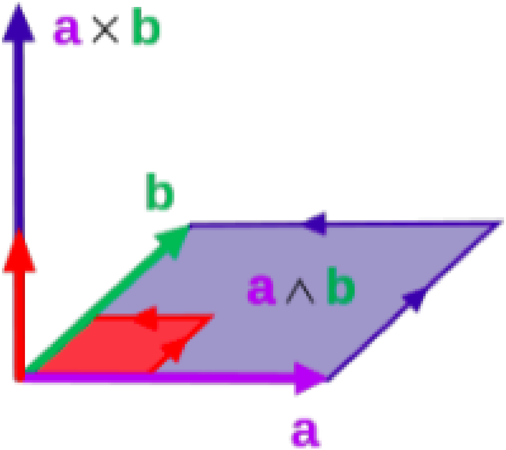








Γεωμετρική ερμηνεία μέτρου $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$



Χαρακτηρισμός συνεπίπεδων διανυσμάτων

Πρόταση

Τρία διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι μηδεν.

Απόδειξη: Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ τρία συνεπίπεδα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.
Προφανώς, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{c}$, ως κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$. Συνεπώς,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$$

Αντίστροφα, αν $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{c}.$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a} \quad \text{και} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}.$$

Άρα, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συνεπίπεδα.

Εξωτερικό γινόμενο: Σύνοψη

Πρόταση

- Δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Αν $\vec{a}, \vec{b}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και με κατεύθυνση τέτοια, ώστε το σύνολο $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right\}$ να αποτελεί μία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$.
- $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right|$.
- Το εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}$, $\vec{b}$ δίνεται από το θετικό αριθμό
$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|.$$

Ιδιότητες διανυσμάτων βάσης

Παρατηρήσεις (Συνέχεια)

- Η βάση $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{k} \\ \vec{j} &= \vec{k} \times \vec{i} \\ \vec{k} &= \vec{i} \times \vec{j}. \end{aligned}$$

- Από την αντισυμμετρικότητα του εξωτερικού γινομένου,

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}. \end{aligned}$$

- Επίσης,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Μικτό γινόμενο: Σύνοψη

Παρατηρήσεις

- Το μικτό γινόμενο είναι αναλλοίωτο ως προς την κυκλική μετάθεση των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, δηλαδή

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right].$$

Ισοδύναμα,

$$\langle \vec{a}, \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \rangle = \langle \vec{b}, (\vec{c} \times \vec{a}) \rangle = \langle \vec{c}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \rangle$$

- Το μικτό γινόμενο είναι αναλλοίωτο ως προς την εναλλαγή εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, δηλαδή

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

- Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$. Κατά συνέπεια, τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \neq 0$.

Μικτό γινόμενο: Σύνοψη (2)

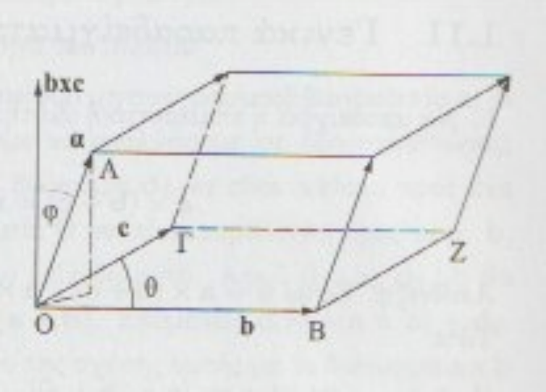
Παρατηρήσεις (Συνέχεια)

- Εάν $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] > 0$, το σύνολο $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ αποτελεί δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$, διαφορετικά αποτελεί αριστερόστροφη βάση.
- Το μέτρο του μικτού γινομένου δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| &= \left|\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle\right| \\ &= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b} \times \vec{c}\right\| \left|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}\right)\right| \\ &= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \|\vec{c}\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}\right)\right| \left|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}\right)\right|\end{aligned}$$

- Ο όγκος παραλληλεπιπέδου με ακμές $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ δίνεται από $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$. (Εμβαδό βάσης: $\left\|\vec{b}\right\| \|\vec{c}\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}\right)\right|$, Ύψος: $\|\vec{a}\| \left|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}\right)\right|$).

Γεωμετρική ερμηνεία μέτρου $\left\|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right\|$



$$\phi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}\right), \qquad \theta = \left(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}\right).$$

Ασκήσεις

1 Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\begin{aligned}\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Λύση: Θέτουμε $\vec{w} = \vec{c} \times \vec{d}$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{a}, \left[\vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right] \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \left[\langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d}\right] \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.\end{aligned}$$

Ασκήσεις (2)

2 Αν $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, τότε:

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2 .$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}\right] &= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a}) \rangle \\
&= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \left[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right] \vec{c} - \left[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{c}\right] \vec{a} \rangle \\
&= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \left[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right] \vec{c} \rangle \\
&= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] \vec{c} \rangle \\
&= \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \\
&= \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2 .
\end{aligned}$$

3 Έστω $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ τρία διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και

$$\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}).$$

Να δειχθεί ότι:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{u} \rangle.$$

Σχόλιο: Από τις

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{u} \rangle,$$

παίρνουμε

$$\langle \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \rangle = 0,$$

δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{u}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$, δηλαδή είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία A, B, Γ.

3 Έστω $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ τρία διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και

$$\vec{u} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{a}\right).$$

Να δειχθεί ότι:

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{u} \rangle.$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{a}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)\rangle - \\
&\quad - \langle \vec{b}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)\rangle \\
&= \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle - \\
&\quad - \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle - \\
&= \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] - \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ομοίως και η $\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{c}, \vec{u} \rangle = 0$..

4 Έστω $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ τρία διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0 \quad \text{και} \quad \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0,$$

να προσδιοριστεί διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε

$$\vec{a} \times \vec{u} = \vec{c} \quad \text{και} \quad \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \lambda$$

Να γίνει η επαλήθευση.

Λύση: Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{c}$ με το $\vec{b}$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{u}) &= \vec{b} \times \vec{c} \Leftrightarrow \\ \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle \vec{a} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{u} &= \vec{b} \times \vec{c} \Leftrightarrow \\ \lambda \vec{a} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{u} &= \vec{b} \times \vec{c} \Leftrightarrow \\ \vec{u} &= \frac{\lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}. \end{aligned}$$

Το διάνυσμα αυτό είναι το ζητούμενο.

4 Πράγματι, $\vec{u} = \frac{\lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$, τέτοιο ώστε: $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{c}$ και $\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \lambda$.

- $$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{u} &= \vec{a} \times \frac{\lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left[\vec{a} \times \left(\lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left[\lambda \left(\vec{a} \times \vec{a}\right) - \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left[0 - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}\right] \\ &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} = \vec{c} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{b}, \frac{\lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \rangle = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \langle \vec{b}, \lambda \vec{a} - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left[\lambda \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle\right] = \lambda. \end{aligned}$$

Ασκήσεις (5)

5 Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, τότε

- $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

Λύση:

- $$\begin{aligned}\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] &= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, -\vec{a} - \vec{b}\rangle \\ &= -\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}\rangle - \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}\rangle = 0.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \\ &= (\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \left(-\vec{b}\right) \times \vec{b} = 0.\end{aligned}$$

6 Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i. $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right] = [\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + \left[\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right]$.

ii. $\left[\vec{u}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{v}\right] = \left[\vec{u}, \vec{b}, \vec{v}\right] + [\vec{u}, \vec{c}, \vec{v}]$.

ii. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}+\vec{a}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}]$.

iv. $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

Λύση:

i.

$$\begin{aligned}
\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right] * &= \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{a}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle \\
&= [\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + \left[\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right].
\end{aligned}$$

6 Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i. $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \left[\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}\right] + \left[\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}\right]$.

ii. $\left[\vec{u}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{v}\right] = \left[\vec{u}, \vec{b}, \vec{v}\right] + \left[\vec{u}, \vec{c}, \vec{v}\right]$.

ii. $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}+\vec{a}\right] = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}\right] + \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}\right]$.

iv. $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

Λύση:

iv.

$$\begin{aligned}
\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] &= \left[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] + \left[\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] \\
&= \left(\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right]\right) + \\
&\quad + \left(\left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right]\right) \\
&= \left(\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + (\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}\right]\right) \\
&\quad + \left(\left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right]\right) \\
&= 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right].
\end{aligned}$$

7 Αν $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα και $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το διάνυσμα που αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{b} + 4\vec{a} = 2\vec{u}.$$

Λύση: Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το $\vec{a}$, έχουμε:

$$2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{b}, \vec{a} \rangle \rightarrow$$
$$2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4\left\|\vec{a}\right\|^2 + \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \rightarrow$$
$$2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4 + \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}\right).$$

Άρα

$$2\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = 4 + \frac{\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{3}{2}\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = 4 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \frac{4 \cdot 2}{3}.$$

Επομένως,

$$\vec{u} = 2\vec{a} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{b}}{2} = 2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}.$$

Η έννοια της ορίζουσας πίνακα

Η ορίζουσα (determinant) ενός πίνακα είναι μία απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό πίνακα $A \in M_n$ έναν πραγματικό αριθμό που θα συμβολίζουμε

$$|A| \quad \text{ή} \quad det(A).$$

Η περίπτωση 2×2: είναι γνωστό ότι η ορίζουσα ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_2$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Παραδείγματα: Η ορίζουσα του πίνακα

- $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ είναι $|A| = 3(-2) - (-2)1 = -6 + 2 = -4.$
- $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι $|I_2| = 1 - 0 = 1.$
- $\mathbb{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι $|\mathbb{O}_2| = 0.$

Ορίζουσα πίνακα 3×3

Η ορίζουσα πίνακα 3×3 ορίζεται με τη βοήθεια οριζουσας πίνακα 2×2 ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Παράδειγμα: Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6) + 1(-3) + 5(-1) = -20.$$

Η παράσταση (1) με την οποία ορίζεται η ορίζουσα καλείται ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.

Ελλάσονες ορίζουσες πίνακα 3×3

Με εκτέλεση των πράξεων στο ανάπτυγμα αυτό, έχουμε

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Η τελευταία παράσταση καλείται ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.
Ομοίως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι σιχύει και

$$|A| = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

που λέγεται ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.
Η ορίζουσα που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} καλείται ελλάσων ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με M_{ij}.

Η έννοια του αλγεβρικού συμπληρώματος

Το γινόμενο $(-1)^{i+j}M_{ij}$ καλείται αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με A_{ij}.
Δηλαδή

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, τα αναπτύγματα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία των τριών γραμμών γράφονται αντιστοίχως

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

Με εκτέλεση των πράξεων έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \end{aligned}$$

δηλαδή τα αναπτύγματα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της 1ης, 2ης και 3ης στήλης, αντιστοίχως.

Παρατήρηση

Στην πράξη, το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μίας ορίζουσας 3×3 είναι ως προς τη γραμμή ή στήλη που παρουσιάζει τα περισσότερα μηδενικά.

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, τότε

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-3-4) = 1.$$

Γενικά για $n \times n$;

Βασικές Ιδιότητες:

1. $det(I_n) = 1$.
2. Μετάθεση δύο γραμμών πίνακα $\rightarrow$ αλλαγή προσήμου ορίζουσας.
   Συνέπεια: Πίνακες μετάθεσης έχουν γνωστή ορίζουσα.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \left(I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad \left(I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Η ορίζουσα συμπεριφέρεται ως γραμμική συνάρτηση κάθε γραμμής του πίνακα ξεχωριστά.

3α $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

3β $\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$.

Προσοχή: $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$.

Συνέπειες ιδιοτήτων ορίζουσας

4 Πίνακας με δύο ίδιες γραμμές → $det(A) = 0$.
Απόδειξη: Εναλλάσσουμε τις γραμμές αυτές → Ίδιος πίνακας.

5 Γραμμοπράξη $\Gamma_k \to \Gamma_k - \ell\Gamma_i$ → Δε μεταβάλλει την ορίζουσα του πίνακα.
Απόδειξη:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-\ell a & d-\ell b \end{vmatrix} \overset{(3b)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -\ell a & -\ell b \end{vmatrix} \overset{(3a)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \ell \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Συνέπεια: $det(A) = det(U)$, όπου U η κλιμακωτή μορφή του A.

6 Μηδενική γραμμή → $det(A) = 0$.
Απόδειξη:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t\cdot 0 & t\cdot 0 \\ c & d \end{vmatrix} \overset{(3a)}{=} t \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

7 $U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ & d_2 & * & \cdots & * \\ & & d_3 & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \rightarrow det(U) = \prod_{i=1}^{n} d_i = d_1 d_2 \cdots d_n$ (δηλαδή, το γινόμενο των pivots).

Απόδειξη: Γραμμοπράξεις (Ιδιότητα 5) → Αρκεί να δειχθεί για διαγώνιο πίνακα

$$det(D) = \begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} d_1 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} d_1 d_2 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} d_1 d_2 \cdots d_n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Αν κάποιο διαγώνιο στοιχείο είναι μηδενικό → Ιδιότητα 4.

8 $det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ μη αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: A μη αντιστρέψιμος $\rightarrow$ Γραμμοπράξεις (Ιδιότητα 5) $\rightarrow$ Μηδενική γραμμή (Ιδιότητα 4).

A αντιστρεψιμος $\rightarrow$ Γραμμοπράξεις (Ιδιότητα 5) $\rightarrow U$ (Ιδιότητα 4) $\rightarrow D$ (Ιδιότητα 7) $det(A) = \pm d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$.

Περίπτωση 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix} = a\left(d - \frac{c}{a}b\right) = ad - bc.$$

Αν $a = 0 \rightarrow$ Μετάθεση γραμμών

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{a}{c}d \end{vmatrix} = -c\left(b - \frac{a}{c}d\right) = ad - bc.$$

Αν επιπλέον $c = 0 \rightarrow$ Μηδενική γραμμή $\rightarrow det(A) = 0$.

9 $det(AB) = det(A)det(B)$.

Συνέπειες/Σχόλια:

- $det\left(A^{-1}\right) = ?$
  Προφανώς,
  $$A^{-1}A = I_n \Rightarrow det\left(A^{-1}A\right) = det(I_n) \Rightarrow det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det\,(A)}.$$
- Ήδη γνωστό για διαγώνιους πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- $det\left(A^2\right) = \left[det\,(A)\right]^2$
- $det\,(2A) = ?$
  $det\,(2A) = 2^n det(A)$.

Συνέπειες ιδιοτήτων ορίζουσας (5)

10 $det\left(A^T\right) = det(A)$.

Περίπτωση 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Συνέπεια: Οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν και για στήλες.

Σκιαγράφηση Απόδειξης:

$$\begin{aligned} \left|A^T\right| &= |A| \Leftrightarrow \\ \left|U^T L^T\right| &= |LU| \Leftrightarrow \\ \left|U^T\right| \left|L^T\right| &= |L||U| \overset{|L|=\left|L^T\right|=1}{\Leftrightarrow} \\ \left|U^T\right| &= |U|. \end{aligned}$$