Διανυσματικός λογισμός

Γ. Κατσουλέας/ Π. Ψαρράκος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

18 Οκτωβρίου 2020

Διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Ορισμός

Ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ αποτελείται από:

- ένα μη κενό σύνολο V.
- μία εσωτερική πράξη $V \times V \to V$ (πρόσθεση) που απεικονίζει το διατεταγμένο ζεύγος
$$(v_1, v_2) \xrightarrow{+} v_1 + v_2$$
- μία εξωτερική πράξη $\mathbb{F} \times V \to V$ (βαθμωτός πολλαπλασιασμός) που απεικονίζει το διατεταγμένο ζεύγος
$$(\lambda, v) \xrightarrow{\cdot} \lambda \cdot v$$

έτσι ώστε να ισχύουν:

Διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ (συνέχεια)

Ορισμός

1. $a + b = b + a, \ \forall a, b \in V$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in V$.
3. $\exists \mathbb{O} \in V$ με την ιδιότητα
$$a + \mathbb{O} = \mathbb{O} + a = a, \forall a \in V$$
4. $\forall a \in V \ \exists (-a) \in V$ με την ιδιότητα
$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbb{O}, \forall a \in V$$
5. $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, a, b \in V$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, a \in V$.
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, a \in V$.
8. $1 \cdot a = a, \ \forall a \in V$.

Όταν $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, λέμε ότι έχουμε έναν πραγματικό δ.χ.

Παρατηρήσεις στον Ορισμό του Διανυσματικού χώρου

1. Το $\mathbb{O} \in V$ είναι μοναδικό με την με την ιδιότητα $a + \mathbb{O} = \mathbb{O} + a = a$
   Πράγματι, αν $\mathbb{O}^{'} \in V$ και

   $$\mathbb{O}^{'} + a = a + \mathbb{O}^{'} = a, \ \forall a \in V, \tag{1}$$

   τότε $\mathbb{O}^{'} = \mathbb{O}^{'} + \mathbb{O} \overset{(1)}{=} \mathbb{O}$.
2. Το $(-a) \in V$ είναι μοναδικό με την με την ιδιότητα
   $a + (-a) = (-a) + a = \mathbb{O}$.
   Πράγματι, αν $y \in V$ και

   $$a + y = y + a = \mathbb{O}, \ \forall a \in V,$$

   τότε
   $(-a) = (-a) + \mathbb{O} = (-a) + (a + y) = (-a + a) + y = \mathbb{O} + y = y$.

Διανυσματικός λογισμός (βασικές έννοιες)

Ορισμός

Καλούμε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B. Ένα διάνυσμα καθορίζεται πλήρως από τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο του ως εξής:

- Διεύθυνση (ή φορέας) του $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.
- Φορά του $\overrightarrow{AB}$ είναι ο προσανατολισμός του, δηλαδή η μία από τις δύο αντικείμενες ημιευθείες που ορίζει το σημείο A πάνω στην ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.
- Μέτρο του $\overrightarrow{AB}$ ($\left|\overrightarrow{AB}\right|$) είναι το μήκος του αντίστοιχου τμήματος AB.

Διανυσματικός λογισμός (βασικές έννοιες)

Ορισμός

- Ένα διάνυσμα μέτρου 1 καλείται μοναδιαίο.
- Μηδενικό είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.
- Κατεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$ καλείται η διεύθυνση και η φορά ενός διανύσματος μαζί.
- Δύο διανύσματα καλούται παράλληλα (ή συγγραμμικά) ($\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b}$) όταν βρίσκονται πάνω στο ίδιο ή σε παράλληλους φορείς. Είναι ομόρροπα ($\overrightarrow{a} \nearrow\nearrow \overrightarrow{b}$) όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και αντίρροπα ($\overrightarrow{a} \swarrow\nearrow \overrightarrow{b}$) όταν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
- Δύο διανύσματα καλούται ίσα ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$) όταν βρίσκονται πάνω στο ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, έχουν ίδια φορά και ίσα μέτρα.
- Δύο διανύσματα καλούται αντίθετα ($\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{a}$) όταν βρίσκονται πάνω στο ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, με αντίθετη φορά και ίσα μέτρα.

Ορισμός

Γωνία μεταξύ δύο (μη μηδενικών) διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ καλείται η κυρτή γωνία τους.

$$0 \leq \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \leq \pi.$$

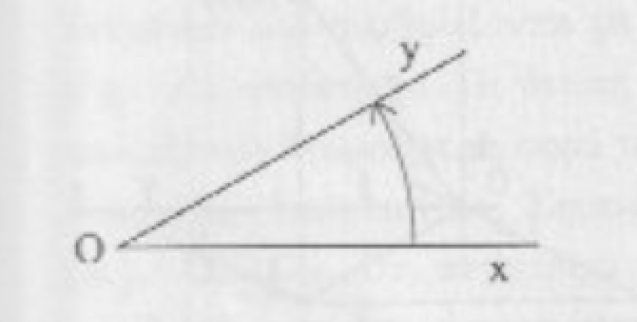
Τυπικά, με αρχή τυχόν σημείο O του χώρου γράφουμε ημιευθείες Ox και Oy, τ.ω. $Ox \nearrow\nearrow \vec{a}$ και $Oy \nearrow\nearrow \vec{b}$. Ως γωνία των $\vec{a}$, $\vec{b}$ ορίζεται η κυρτή γωνία των ημιευθειών Ox και Oy, δηλαδή $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) := x\hat{O}y$.

$$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \left(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}\right)$$

$$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ ομόρροπα.}$$

$$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ αντίρροπα.}$$

Γωνία διανυσμάτων



Πράξεις με διανύσματα

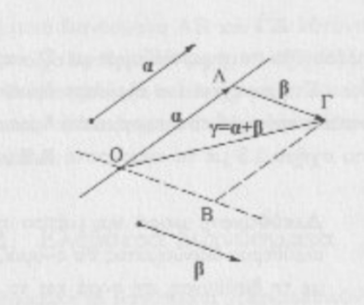
- Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου θα το συμβολίζουμε με Δ^3.
- Το σύνολο Δ^3 είναι εφοδιασμένο με τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ με τις ακόλουθες πράξεις.

Πρόσθεση διανυσμάτων

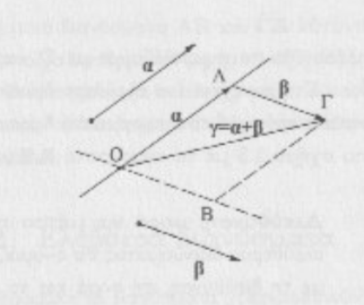
Ορισμός

Έστω δύο διανύσματα $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Αν $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{b}$ έχει αρχή το πέρας του $\overrightarrow{a}$, συμβολίζοντας $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{AC}$, τότε άθροισμα των $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (συμβ. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$) καλείται το διάνυσμα

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OC}.$$



Πρόσθεση διανυσμάτων



Ισοδύναμα, όταν $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ διανύσματα με κοινή αρχή, ως άθροισμά τους ορίζεται το διάνυσμα

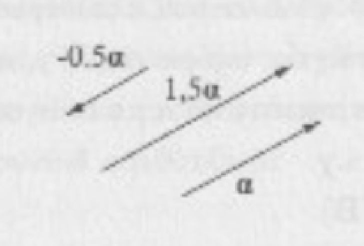
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OC},$$

όπου $\overrightarrow{OC}$ το διάνυσμα της διαγωνίου OC του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Ορισμός

Ως βαθμωτό γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με κάποιο διάνυσμα $\vec{a}$ καλείται ένα διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ που έχει:

- τη διεύθυνση του $\vec{a}$.
- φορά $\lambda \cdot \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{a}$, όταν $\lambda > 0$.
- φορά $\lambda \cdot \vec{a} \swarrow\nearrow \vec{a}$, όταν $\lambda < 0$.
- μέτρο $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



Βαθμωτό γινόμενο

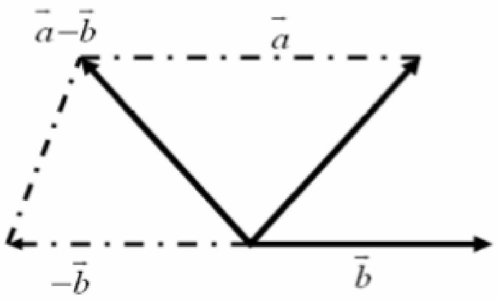
- Αν $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ δύο συγγραμμικά διανύσματα με $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{b}$.
- Αντίστροφα, από τον ορισμό του βαθμωτού πολλ/σμού και από την ισότητα $\overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$), έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.
- $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ και $\lambda \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
- $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda = 0$.

Διαφορά διανυσμάτων

Ορισμός

Ως **διαφορά** $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ ορίζουμε το άθροισμα

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right).$$



Άξονας

Ορισμός

Έστω O σταθερό σημείο και M τυχαίο σημείο. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καλείται διάνυσμα θέσης του σημείου M.

Ορισμός

Έστω ευθεία $x^{'}x$. Επιλέγουμε αυθαίρετα σημείο O ως αρχή και σημείο I, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ να είναι μοναδιαίο. Τότε η ευθεία $x^{'}x$ καλείται άξονας.

1-1 αντιστοιχία μεταξύ σημείων άξονα και $\mathbb{R}$:

$$\forall M \in x^{'}x \ \ \exists! x \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{i}.$$

Πράγματι, αν υπήρχε $x^{'}(\neq x) \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{OM} = x^{'} \cdot \overrightarrow{i}$, θα είχαμε

$$\left(x - x^{'}\right)\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x = x^{'}.$$

Ορισμός

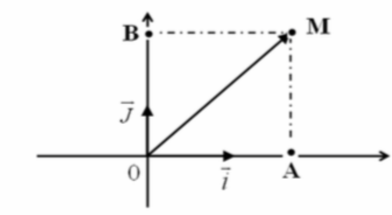
Ορθοκανονικό (ή καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο (συμβ. Oxy ή (O, i, j)) είναι ένα ζεύγος αξόνων $x'x$, $y'y$ τ.ω.

- Κοινή αρχή O,
- Κάθετοι μεταξύ τους,
- Αντίστοιχα μοναδιαία i και j.

1-1 αντιστοιχία μεταξύ σημείων επιπέδου και $\mathbb{R}^2$:

Αν Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε $\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}.$$



Πράγματι, αν υπήρχε $(x', y') \in \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{OM} = x' \cdot \overrightarrow{i} + y' \cdot \overrightarrow{j}$, θα είχαμε

$$\left(x - x'\right) \overrightarrow{i} = \left(y' - y\right) \overrightarrow{j},$$

δηλ. $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ συγγραμμικά.

Οι χώροι Δ^2 και $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικοί χώροι

- Ορίζουμε Δ^2 το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου.
- Έστω $\overrightarrow{AB}$ τυχόν διάνυσμα με $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$. Τότε

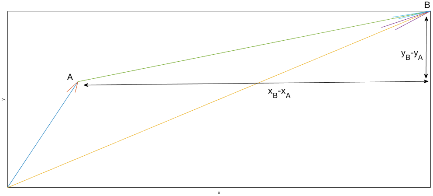
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= (x_B \cdot i + y_B \cdot j) - (x_A \cdot i + y_A \cdot j)\\ &= (x_B - x_A) \cdot i + (y_B - y_A) \cdot j.\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\overrightarrow{AB} = \left(\underbrace{x_B - x_A}_{\text{τετμημένη}}, \underbrace{y_B - y_A}_{\text{τεταγμένη}} \right),$$

ώστε

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Οι χώροι Δ^2 και $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικοί χώροι

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιαζόμενο με τις πράξεις

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ \lambda \cdot (x, y) &= (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).\end{aligned}$$

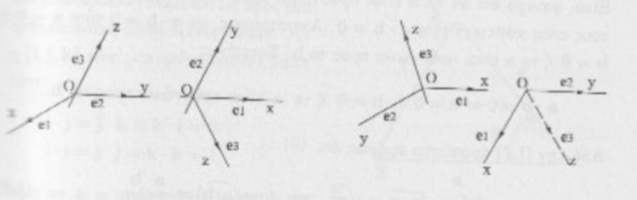
μπορεί να θεωρηθεί δ.χ.

Οι χώροι Δ^3 και $\mathbb{R}^3$ ως διανυσματικοί χώροι

Ορισμός

Ορθοκανονικό (ή καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων στο χώρο (συμβ. $Oxyz$ ή (O, i, j, k)) αποτελείται από

- Κοινή αρχή O,
- Μοναδιαία ισομήκη διανύσματα i, j και k.
- Ανά δύο κάθετα,
- Η (i, j, k) ορίζει δεξιόστροφο σύστημα.



1-1 αντιστοιχία μεταξύ σημείων χώρου και $\mathbb{R}^3$: Αν Μ τυχαίο σημείο του χώρου, τότε $\exists!(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$.

Οι χώροι Δ^3 και $\mathbb{R}^3$ ως διανυσματικοί χώροι

- Έστω $\overrightarrow{AB} \in \Delta^3$ τυχόν διάνυσμα με $A(x_A, y_A, z_A)$ και $B(x_B, y_B, z_B)$. Τότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= (x_B \cdot \overrightarrow{i} + y_B \cdot \overrightarrow{j} + z_B \cdot \overrightarrow{k}) - (x_A \cdot \overrightarrow{i} + y_A \cdot \overrightarrow{j} + z_A \cdot \overrightarrow{k}) \\ &= (x_B - x_A) \cdot \overrightarrow{i} + (y_B - y_A) \cdot \overrightarrow{j}. + (z_B - z_A) \cdot \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

  Δηλαδή $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, ώστε

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

  εφοδιάζόμενο με τις πράξεις

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \lambda \cdot (x, y, z) &= (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z).\end{aligned}$$

  μπορεί να θεωρηθεί δ.χ.