Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα και στην αναλυτική γεωμετρία

Γιώργος Κατσουλέας

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

18 Οκτωβρίου 2020

Το θεμελιώδες πρόβλημα της γραμμικής άλγεβρας

1. Σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους.
    1. Για ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, θέλουμε να γνωρίζουμε πότε
        - Υπάρχει λύση.
        - Υπάρχει μοναδική λύση.
    2. Όταν κάποιο συστήμα έχει μία ή περισσότερες λύσεις, πώς μπορούμε να τις βρούμε;
2. Η προσέγγιση του προβλήματος κοιτώντας μία εξίσωση κάθε φορά (μέσω των γραμμών του συστήματος).
3. Η προσέγγιση του προβλήματος κοιτώντας μία μεταβλητή κάθε φορά (μέσω των στηλών του συστήματος)

Γραμμικές εξισώσεις

1. Μία γραμμική εξίσωση είναι μία εξίσωση που μπορεί να γραφεί στη μορφή
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$
2. Οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ καλούνται συντελεστές.
3. Παραδείγματα:
   - $2x + y - 8z = 10$ με συντελεστές $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -8$.
   - $-x_1 + \pi x_3 - \sqrt{2}x_4 = 0.07$ με συντελεστές $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = \pi, a_4 = -\sqrt{2}$.
   - $2x - y + 6 = 13 - 4x$ με συντελεστές $a_1 = 6, a_2 = -1$.
4. Μη γραμμική εξίσωση: $\sqrt{x} + \frac{1}{y} = wz - 10$.

Ένα απλό παράδειγμα 2×2

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

Πίνακας του συστήματος (coefficient matrix):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα αγνώστων και σταθερών όρων:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Σύστημα σε μορφή πινάκων:

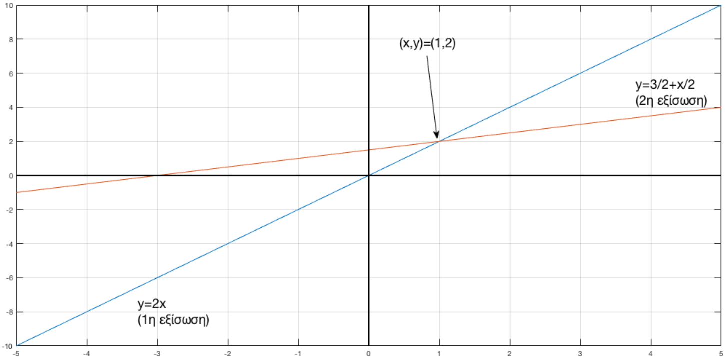
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ένα απλό παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των γραμμών

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

- Η 1η εξίσωση περιγράφει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (1,2).
- Η 2η εξίσωση περιγράφει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (-3,0) και (-1,1).

Ένα απλό παράδειγμα: Η θεώρηση μέσω των γραμμών



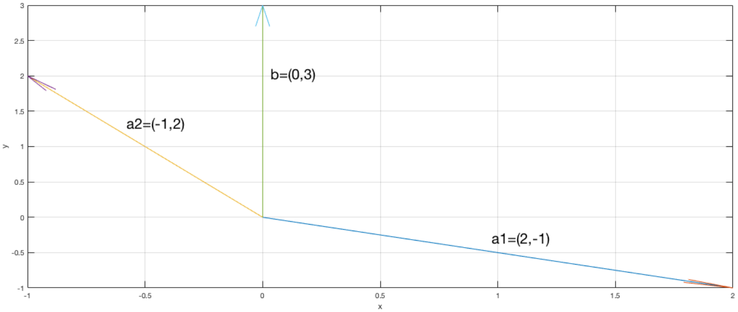
Ένα απλό 2×2 παράδειγμα: Η θεώρηση μέσω των στηλών

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

Σύστημα σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων:

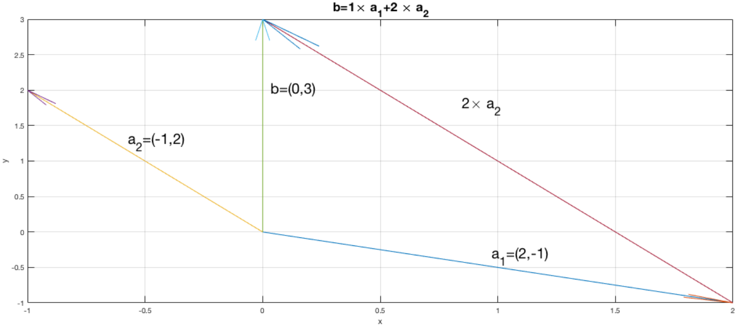
$$\underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Γραμμικός συνδυασμός (linear combination) των στηλών του } A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ένα απλό παράδειγμα 2×2: Η θεώρηση μέσω των στηλών



Κάθε σημείο $A(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί στο διατεταγμένο ζεύγος καρτεσιανών συντεταγμένων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχίζεται στο σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων Δ^2 του επιπέδου, θεωρώντας το αντίστοιχο διάσυμα θέσης $\overrightarrow{OA}$.

Ένα απλό παράδειγμα 2×2: Έκφραση b ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A



$$\underbrace{1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}_{\text{Γραμμικός συνδυασμός (linear combination) των στηλών του } A} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

Ένα απλό παράδειγμα 2×2: Ερώτημα

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Τι μπορούμε να πούμε για το σύνολο

$$\left\{ x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}?$$

Με άλλα λόγια,

- Ποιο είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A;
- Ποια είναι τα 'εφικτά' διανύσματα b στη δεξιά πλευρά του συστήματος;

Ένα απλό παράδειγμα 3×3

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4. \end{aligned}$$

Πίνακας του συστήματος (coefficient matrix):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα αγνώστων και σταθερών όρων:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Σύστημα σε μορφή πινάκων:

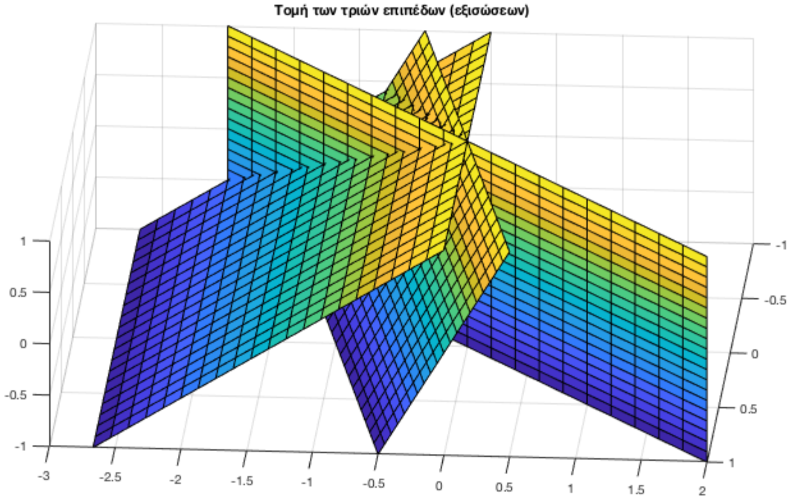
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των γραμμών

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4. \end{aligned}$$

- Η 2η εξίσωση περιγράφει επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία (1,0,0), (0,0,1) και (0,-1/2,0).
- Ομοίως οι υπόλοιπες...

Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Η προσέγγιση μέσω των γραμμών



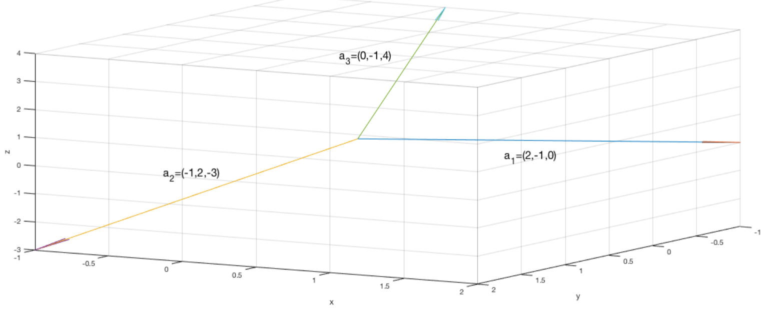
Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των στηλών

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4. \end{aligned}$$

Σύστημα σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων:

$$\underbrace{x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του } A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Η θεώρηση μέσω των στηλών



Κάθε σημείο $A(x, y, z)$ του εποπτικού χώρου αντιστοιχεί στη διατεταγμένη τριάδα καρτεσιανών συντεταγμένων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, η οποία με τη σειρά της αντιστοιχίζεται στο σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων Δ^3 του χώρου, θεωρώντας το αντίστοιχο διάσυμα θέσης $\overrightarrow{OA}$.

Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Μία παραλλαγή

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= -3. \end{aligned}$$

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\to (x, y, z) = (1, 1, 0)$$

Ένα απλό παράδειγμα 3×3: Ερώτημα

Ερώτημα: Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

για οποιοδήποτε $\mathbf{b}$;
Με άλλα λόγια, μπορούμε να δούμε αν οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$\left\{ x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}?$$

των στηλών του A γεμίζουν τον τρισδιάστατο χώρο;
Για τον παραπάνω πίνακα, η απάντηση είναι ΝΑΙ.
Διαφορετικά, τι μπορεί να πάει στραβά; Οι στήλες του A να είναι συνεπίπεδα διανύσματα.

Παράρτημα: Πολλαπλασιασμός πινάκα με διάνυσμα

$$A\mathbf{x} = ?$$

Πρώτος τρόπος:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = ?$$

Πρώτος τρόπος:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Δεύτερος τρόπος:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Συμπέρασμα: Ο πολλαλασιασμός $A\mathbf{x}$ πίνακα με διάνυσμα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.

Ασκησούλα...

Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

και να εξεταστεί από την πλευρά των γραμμών και των στηλών του πίνακα συντελεστών του.