

Γ. Διατήρηση της ενέργειας

Γ.1 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $F_x(t) = F_0(1 + t^2/\tau^2)$, όπου τα F_0 και τ είναι σταθερά και t ο χρόνος. Υπολογίστε την ώθηση που ασκεί η δύναμη στο σώμα στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t=0$ και $t=\tau$.

Απ.: $\Omega = \frac{4}{3}F_0\tau$

Γ.2 Πόσο έργο παράγει η δύναμη $F_x(x) = F_0(1 + x/a - x^2/a^2)$ όταν το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται από το σημείο $x=0$ στο σημείο $x=a$;

Απ.: $W = \frac{7}{6}F_0a$

Γ.3 Ένα αυτοκίνητο έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα της οποίας το μέτρο δίνεται, συναρτήσει του χρόνου, από τη σχέση $v = \alpha + \beta t$. Να βρεθεί η κινητική του ενέργεια συναρτήσει του χρόνου. Αν το αυτοκίνητο κινείται χωρίς απώλειες λόγω τριβών, με ποιο ρυθμό παρέχει ενέργεια η μηχανή του (ισχύς);

Απ.: Ισχύς $P = m\beta(\alpha + \beta t)$

Γ.4 Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο συναρτήσει της επιμήκυνσής του, x , δίνεται από τη σχέση $F(x) = -kx + px^2 - qx^3$. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο όταν το μήκος του μεταβληθεί, από τη φυσική του τιμή, κατά a ;

Απ.: $U(a) = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{3}pa^3 + \frac{1}{4}qa^4$

Γ.5 Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι: (α) $U = \alpha xy^2 z^3$, (β) $U = -\frac{\kappa}{r}$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, και α και κ είναι θετικές σταθερές. Σε κάθε περίπτωση βρείτε τη δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

Γ.6 Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = (3x - 2y)\hat{x} + (y + 2z)\hat{y} - x^2\hat{z}$ (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) όταν το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται από το σημείο $(0, 0, 0)$ στο σημείο $(1, 1, 1)$ κατά μήκος της καμπύλης C , όταν C είναι: (α) η καμπύλη $x=t, y=t^2, z=t^3$, και (β) η καμπύλη $x=z^2, z=y^2$. (γ) Είναι διατηρητική η δύναμη;

Απ.: (α) $\frac{23}{15} \text{ J}$, (β) $\frac{13}{15} \text{ J}$, (γ) όχι

Γ.7 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + 2xz)\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + (2yz + x^2)\hat{z}$. Θεωρώντας ότι είναι $U(0, 0, 0) = 0$, δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι $U(x, y, z) = -(xy^2 + yz^2 + zx^2)$.

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε ξεχωριστά τις σχέσεις: $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x, \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y, \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$.

Γ.8 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{F}(\vec{r})$ όπως δίνεται παρακάτω, όπου κ και a είναι θετικές σταθερές, r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων O και \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το σημείο O προς το σημείο \vec{r} . Σε καθεμία από τις περιπτώσεις, βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, $U(\vec{r})$. Θεωρήστε ότι $U = 0$ όταν $r = \infty$.

(α) $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{2\kappa}{r^3}\hat{r}$. Απ.: $U(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{r^2}$. (β) $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{2\kappa}{a^2}r e^{-r^2/a^2}\hat{r}$. Απ.: $U(\vec{r}) = \kappa e^{-r^2/a^2}$.

Γ.9 Σώμα μάζας m έχει δυναμική ενέργεια $U(r) = A\left(-\frac{3r_0^2}{r^2} + \frac{2r_0^3}{r^3}\right)$, όπου A και r_0 είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση του σώματος από ακίνητο σημείο O . (Σημείωση: το r είναι πάντοτε θετικό).

(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα. Απ.: $F_r = -6A\left(\frac{r_0^2}{r^3} - \frac{r_0^3}{r^4}\right)$

(β) Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σώμα; Απ.: $r = r_0$

(γ) Αν το σώμα αφαιρεθεί ελεύθερο με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν σε άπειρη απόσταση από το O , να βρεθεί η ταχύτητά του στη θέση $r = r_0$ και η απόσταση στην οποία η ταχύτητά του θα ξαναγίνει μηδενική. Απ.: $v(r_0) = \pm\sqrt{2A/m}, r = \frac{2}{3}r_0$

