

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Δίνεται το διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z}$ m. Να βρεθούν: Το μέτρο, r , του \vec{r} και το μοναδιαίο διάνυσμα, \hat{r} , στην κατεύθυνση του \vec{r} .
2. Αν $\vec{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + 5\hat{z}$ m και $\vec{B} = \hat{x} + 4\hat{y} + 2\hat{z}$ m, να βρεθούν τα $\vec{A} + \vec{B}$ και $\vec{A} - \vec{B}$.
3. Τα αποτελέσματα δύο προβλημάτων δίνονται ως: (α) $\vec{r} = \hat{x} + 2\hat{y} - 4\hat{z}$ m και (β) $\vec{F} = \sqrt{3}\hat{y} - \hat{z}$. Ποιο είναι το λάθος που γίνεται στο καθένα;
4. Πάνω σε ένα σωματίδιο ασκούνται οι δυνάμεις: $\vec{F}_1 = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 5\hat{z}$, $\vec{F}_2 = -5\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$, $\vec{F}_3 = \hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}$ και $\vec{F}_4 = 4\hat{x} - 3\hat{y} - 2\hat{z}$, όλες σε N. Να βρεθούν: (α) η συνισταμένη \vec{F} των δυνάμεων και (β) το μέτρο της, F .
5. Συναρτήσει του χρόνου t , και σε μονάδες S.I., το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση: $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{x} + \sin(\pi t)\hat{y} + 5e^{-t/3}\hat{z}$. Να βρεθεί η θέση του σωματιδίου όταν $t = 3$ s.
6. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου είναι $\vec{r}(t) = a\sin(\omega t)\hat{x} + a\cos(\omega t)\hat{y}$, όπου τα a και ω είναι σταθερά και t ο χρόνος. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου στη μορφή $f(x, y, z) = 0$. Τι είδους καμπύλη είναι η τροχιά;
7. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου είναι $\vec{r}(t) = a\sin(\omega t)\hat{x} + a\cos(\omega t)\hat{y} + 5t\hat{z}$. (α) Δείξτε ότι το σωματίδιο κινείται σε σταθερή απόσταση από τον άξονα των z . (β) Τι είδους τροχιά διαγράφει το σωματίδιο;
8. Δύο σωματίδια κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης, σε μονάδες S.I.,
 $\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z}$ και $\vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$
 αντίστοιχα, όπου t είναι ο χρόνος. Αποδείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν και βρείτε πότε και πού θα συμβεί αυτό.
9. Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t , και σε μονάδες S.I., από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (t + 2t^2)\hat{x} + 4t^2\hat{y} + (5 + t)\hat{z}$. Να βρεθούν: (α) η ταχύτητα, \vec{v} , και (β) η επιτάχυνση του σωματιδίου, \vec{a} , συναρτήσει του χρόνου.
10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ m και $\vec{B} = 6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$ m. Να βρεθούν: (α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{B}$ και (β) η γωνία θ μεταξύ των \vec{A} και \vec{B} .
11. Η δύναμη $\vec{F} = 2\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$ N μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της ευθείας από το σημείο A προς στο σημείο B. Το διάνυσμα θέσης του A είναι $\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z}$ m και του B $\vec{r}_2 = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 6\hat{z}$ m. Να βρεθεί το έργο $W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ που παράγει η δύναμη.
12. Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \quad y = a(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \quad z = 0,$$
 όπου t είναι ο χρόνος, και a και ω είναι θετικές σταθερές.
 (α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης \vec{r} , η ταχύτητα \vec{v} και η επιτάχυνση \vec{a} της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

- (β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας, v , και το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{v} .
 (γ) Βρείτε τη γωνία ϕ μεταξύ της ταχύτητας και του άξονα των x .
 (δ) Βρείτε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη προς το σημείο $(0, 0)$, και μία με κατεύθυνση \hat{v} .

13. Η δύναμη $\vec{F} = \hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z}$ N ασκείται στο σημείο $\vec{r} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - \hat{z}$ m. Ποια είναι η ροπή της δύναμης ως προς το σημείο $(0, 0, 0)$, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$;

14. Σημειακή μάζα m κινείται στο επίπεδο xy πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως $x = a \cos(\omega t)$, $y = b \sin(\omega t)$, όπου t είναι ο χρόνος, και a , b και ω είναι θετικές σταθερές.

- (α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς πάνω στην οποία κινείται η μάζα.
 (β) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης \vec{r} , η ταχύτητα \vec{v} και η επιτάχυνση \vec{a} της μάζας συναρτήσει του χρόνου.
 (γ) Να βρεθεί η δύναμη \vec{F} που ασκείται πάνω στη μάζα, συναρτήσει του χρόνου. Δείξτε ότι η δύναμη είναι κεντρική [δηλαδή της μορφής $\vec{F} = f(r) \hat{r}$] και βρείτε τη ροπή της ως προς την αρχή των αξόνων, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.
 (δ) Να βρεθεί η ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$ της μάζας. Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας ως προς την αρχή των αξόνων, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, είναι σταθερή.

15. Να βρεθεί το διάνυσμα \vec{S} που παριστάνει την επιφάνεια του παραλληλογράμμου του οποίου δύο πλευρές είναι τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} - 6\hat{y} - 3\hat{z}$ m και $\vec{B} = 4\hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$ m.

16. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ m, $\vec{B} = 6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$ m και $\vec{C} = 10\hat{x} + \hat{y}$ m είναι συνεπίπεδα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

2. $\vec{A} + \vec{B} = 4\hat{x} + 2\hat{y} + 7\hat{z}$ m και $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{x} - 6\hat{y} + 3\hat{z}$ m. 11. $W = 9$ J 13. $\vec{N} = 10\hat{x} + 3\hat{y} + 11\hat{z}$ m · N.
 4. $\vec{F} = 2\hat{x} - \hat{y}$ N, $F = \sqrt{5}$ N. 6. $x^2 + y^2 = a^2$, κύκλος (O, a) στο επίπεδο xy . 10. (α) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4$ m², (β) $\theta = \arccos 0,1905 = 79^\circ$. 5. $\vec{r}(3) = 27\hat{x} - \hat{y} + 5e^{-1}\hat{z}$ m. 7. (α) Η απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα των z είναι $\sqrt{x^2 + y^2} = a = \text{σταθ.}$ (β) Διαγράφει σπειροειδή τροχιά ακτίνας a με άξονα τον άξονα των z . 12. (α) $\vec{r} = a(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t)\hat{x} + a(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)\hat{y}$, $\vec{v} = a\omega^2 t(\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y})$, $\vec{a} = a\omega^2[(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)\hat{x} + (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)\hat{y}]$, (β) $v = a\omega^2 t$, $\hat{v} = \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}$, (γ) $\phi = \omega t$, (δ) $\vec{F} = m\omega^2 \vec{r} + 2m\alpha\omega^2 \hat{v}$ 1. $r = 7,07$ m, $\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{50}}(3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z})$.
 3. (α) στα δεξιά, ένα διάνυσμα προστίθεται σε ένα βαθμωτό μέγεθος. (β) δεν δίνονται οι μονάδες. 8. Για $t = 2$ s τα σωματίδια συμπίπτουν στη θέση $\vec{r} = \vec{r}_1(2) = \vec{r}_2(2) = 14\hat{x} + 20\hat{y} + 9\hat{z}$ m.
 16. Επειδή είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = 0$, τα διανύσματα είναι συνεπίπεδα. 9. $\vec{v} = (1 + 4t)\hat{x} + 8t\hat{y} + \hat{z}$ m/s, $\vec{a} = 4\hat{x} + 8\hat{y}$ m/s². 15. $\vec{S} = 15\hat{x} - 10\hat{y} + 30\hat{z}$ m². 14. (α) Έλλειψη $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, (β) $\vec{r} = a \cos \omega t \hat{x} + b \sin \omega t \hat{y}$, $\vec{v} = -\omega a \sin \omega t \hat{x} + \omega b \cos \omega t \hat{y}$, $\vec{a} = -\omega^2 a \cos \omega t \hat{x} - \omega^2 b \sin \omega t \hat{y} = -\omega^2 \vec{r}$, (γ) $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$, $\vec{N} = 0$, (δ) $\vec{p} = \omega m(-a \sin \omega t \hat{x} + b \cos \omega t \hat{y})$, $\vec{L} = \omega m a b \hat{z}$.