# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ



Έστω δύο μάζες $M_1$ και $M_2$ αρχικά σε απόσταση $\vec{r}$.

Για να αλλάξει η απόσταση κατά $d\vec{r}$ θα πρέπει να καταβληθεί έργο

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{GM_1M_2}{r^3}\frac{1}{2}d\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{GM_1M_2}{r^3}\frac{1}{2}d\left(r^2\right)$$

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3}rdr = \frac{GM_1M_2}{r^2}dr$$

Επομένως, για μετατόπιση από $\vec{r}_A$ στο $\vec{r}_B$ χρειάζεται έργο

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} G\frac{M_1M_2}{r^2}dr = -G\frac{M_1M_2}{r_B} + G\frac{M_1M_2}{r_A} = \Delta U \quad (1).$$

Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου:

$$U(r) = -G\frac{M_1M_2}{r} \quad (2).$$

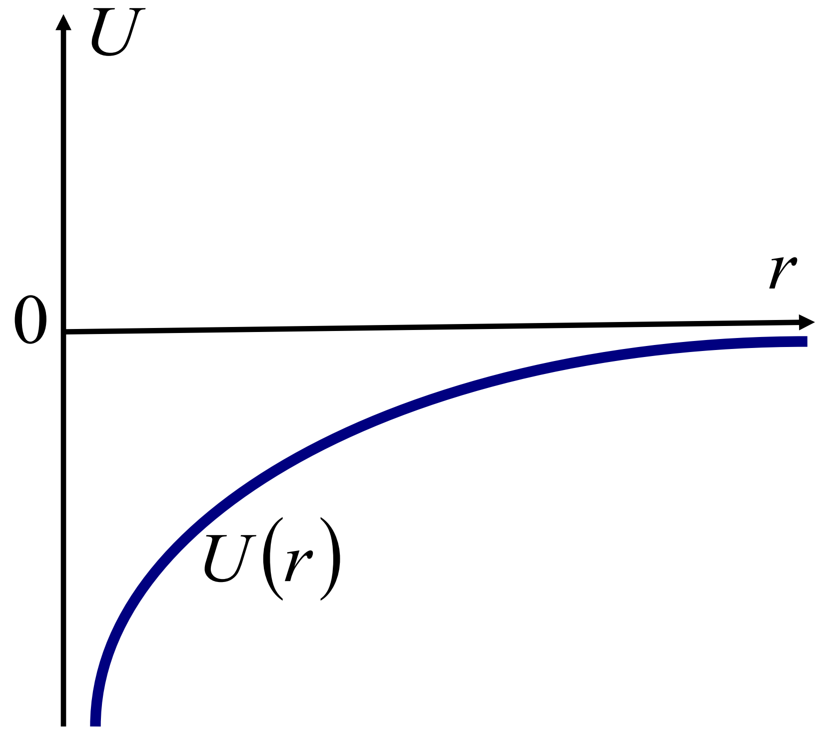
Αρχή διατήρησης της ενέργειας: $\frac{1}{2}M_1v_A^2 - G\frac{M_1M_2}{r_A} = \frac{1}{2}M_1v_B^2 - G\frac{M_1M_2}{r_B}$.

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ



Θέτοντας $\mathrm{U}=0$ για $\mathrm{r}=\infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου :

$$\mathrm{U}(\mathrm{r})=-\mathrm{G}\frac{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}{\mathrm{r}} \quad (2).$$



# ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ



Έστω σώμα που εκτοξεύεται με ταχύτητα $\mathrm{v}_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης $\left(\mathrm{r}=\mathrm{R}_\Gamma\right)$.

Αν το σώμα φτάνει με μηδενική ταχύτητα στο $\infty$,

τότε η αρχή διατήρησης της ενέργειας $E=E_{\kappa\iota\nu}+U$ δίνει:

$$\overbrace{\frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{v}_\Gamma^2}^{E_{\kappa\iota\nu}(r=R_\Gamma)}\overbrace{-\frac{GM_\Gamma \mathrm{M}}{R_\Gamma}}^{U(r=R_\Gamma)}=\overbrace{0}^{E_{\kappa\iota\nu}(r=\infty)}+\overbrace{0}^{U(r=\infty)}\Rightarrow \mathrm{v}_\Gamma=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}R_\Gamma}=\sqrt{2gR_\Gamma},$$

όπου $\mathrm{v}_\Gamma$ είναι η λεγόμενη ταχύτητα διαφυγής.

Χρησιμοποιώντας τις τιμές βρίσκουμε μια προσεγγιστική τιμή για την ταχύτητα διαφυγής $\mathrm{v}_\Gamma \approx 11\,\mathrm{km/s}$.

Η ανάλογη ταχύτητα στην περίπτωση του Ήλιου είναι

$$\mathrm{v}_\mathrm{H}=\sqrt{\frac{2GM_H}{R_H}}=\sqrt{\frac{2\times\left(7\times10^{-11}\right)\times\left(2\times10^{30}\right)}{1{,}5\times10^{11}}}\approx 42\,\mathrm{km/s}.$$

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΓΗΣ



Για την δυναμική ενέργεια μάζας Μ σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης ισχύει :

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{R}_\Gamma + \mathrm{h}\right) = -\frac{GM_\Gamma \mathrm{M}}{\mathrm{R}_\Gamma + \mathrm{h}},$$

όπου $\mathrm{M}_\Gamma$ και $\mathrm{R}_\Gamma$ η μάζα και η ακτίνα της Γης, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για την $1/\left(1+\mathrm{x}\right)$ βρίσκουμε

$$\left(\frac{1}{1+\mathrm{x}} \approx 1 - \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 + \ldots\right)$$

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{R}_\Gamma + \mathrm{h}\right) = -\frac{GM_\Gamma \mathrm{M}}{\mathrm{R}_\Gamma}\left(1 - \frac{h}{\mathrm{R}_\Gamma} + \frac{h^2}{\mathrm{R}_\Gamma^2} - \ldots\right) = -MgR_\Gamma\left(1 - \frac{h}{\mathrm{R}_\Gamma} + \frac{h^2}{\mathrm{R}_\Gamma^2} - \ldots\right)$$

όπου $\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{GM}_\Gamma}{\mathrm{R}_\Gamma^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Έχουμε λοιπόν την προσέγγιση $U\left(R_\Gamma + h\right) \approx -MgR_\Gamma + Mgh$,
και αν αγνοήσουμε τον σταθερό πρώτο όρο βρίσκουμε $U\left(R_\Gamma + h\right) = Mgh$.

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ



Με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε για να βρούμε την δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με την βαρυτική έλξη μεταξύ δύο μαζών,

μπορεί να δειχτεί ότι η δυναμική ενέργεια για το σύστημα δύο φορτίων $q_1$ και $q_2$ σε απόσταση r είναι

$$U(r) = k\frac{q_1 q_2}{r} \quad (3).$$

Στην (3) έχουμε υποθέσει ότι η στάθμη αναφοράς $U = 0$ αντιστοιχεί για $r = \infty$.

Για ομώνυμα φορτία η (3) δίνει θετική δυναμική ενέργεια, και άρα τα φορτία θα έχουν τάση να απομακρυνθούν το ένα από το άλλο.

Για ετερώνυμα φορτία η δυναμική ενέργεια (3) είναι αρνητική και ευνοούνται μικρότερες αποστάσεις μεταξύ των φορτίων.

Η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου ορίζει το **δυναμικό**

$$\Phi(r) = \frac{U(r)}{q} = \int_r^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = k\frac{q_1}{r}.$$

Από το δυναμικό μπορεί να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$.

Μονάδα του δυναμικού είναι το Volt (V).

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΤΡΟΧΙΑ



Η διατήρηση της ενέργειας ορίζει μια διαφορική εξίσωση για την ταχύτητα :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2 + \mathrm{U}(\mathrm{x}) \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + \mathrm{U}(\mathrm{x}) \Rightarrow \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left[\mathrm{E} - \mathrm{U}(\mathrm{x})\right]} \quad (1)$$

Η εξίσωση της τροχιάς προκύπτει από ολοκλήρωση της (1)

$$\frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x')\right]}} = dt' \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x')\right]}} = G(x)$$

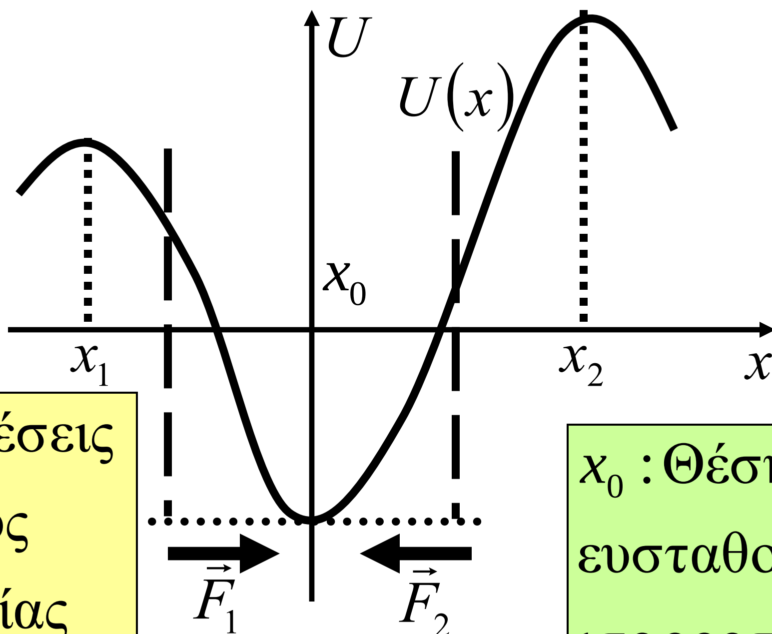
# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΗ

Είναι $F = -\dfrac{dU}{dx}$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να βρούμε χαρακτηριστικά της κίνησης από το γράφημα της *U*(*x*), χωρίς απαραίτητα να επιλύσουμε την σχετική διαφορική εξίσωση.

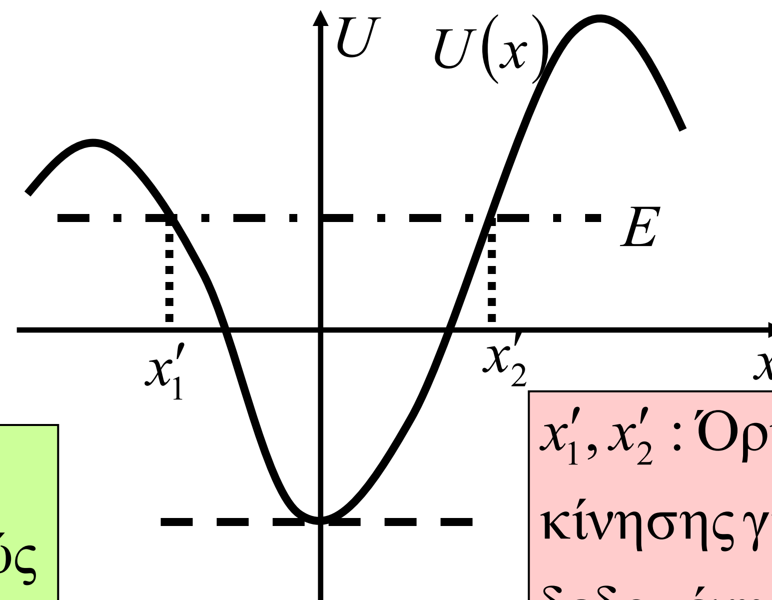
Π.χ, μπορούμε να βρούμε τα σημεία ισορροπίας $F = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dU}{dx} = 0$

Αν το σώμα έχει συγκεκριμένη ενέργεια $E$ τότε δεν μπορεί να βρεθεί σε περιοχή όπου $E < U(x)$, γιατί τότε θα ήταν $mv^2/2 < 0$.




$x_1, x_2$ : Θέσεις ασταθούς ισορροπίας

$x_0$ : Θέση ευσταθούς ισορροπίας

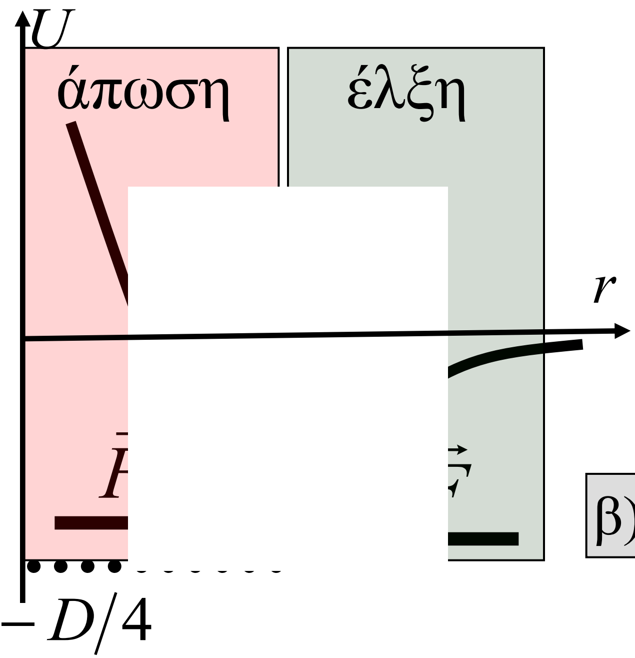



$x_1', x_2'$ : Όρια κίνησης για δεδομένη Ε.

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΙΑΤΟΜΙΚΟ ΜΟΡΙΟ



Η δυναμική ενέργεια διατομικού μορίου είναι $U(r) = D\left(-b/r + b^2/r^2\right)$ όπου $r$ η απόσταση μεταξύ των ατόμων, $D$ και $b$ θετικές σταθερές. Το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$. α) Σχεδιάστε τη $U(r)$. β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε που είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική.




α) Για μικρά $r$ η $U(r)$ απειρίζεται ως $Db^2/r^2$, ενώ για $r \to \infty$ η $U(r)$ μηδενίζεται ως $-Db/r$.

Είναι ακόμη $U(r_0) = 0$ για $r_0 = b$.

Στο ελάχιστο είναι $dU/dr = 0 \Rightarrow r = 2b$, με $U(2b) = -D/4$.

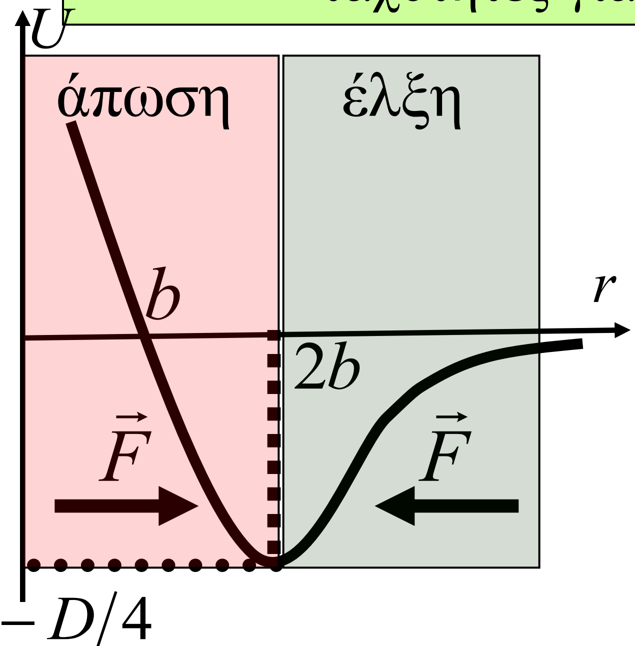
β) Για την δύναμη είναι $F = -dU/dr = -D\left(b/r^2 - 2b^2/r^3\right)$.

Άρα $F = 0 \Leftrightarrow -D\left(b/r^2 - 2b^2/r^3\right) = 0 \Rightarrow r = 2b$.

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΙΑΤΟΜΙΚΟ ΜΟΡΙΟ



γ) Το ελεύθερο άτομο αφήνεται από τη θέση $r = 3b/2$ να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψτε την κίνηση που θα επακολουθήσει. δ) Αν τα δύο άτομα απομακρυνθούν σε απόσταση $x$ το ένα από το άλλο και αφεθούν ελεύθερα με μηδενικές ταχύτητες για ποιες τιμές του $x$ θα διασπαστεί το μόριο;




γ) Το σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας $r = 2b$ με μέγιστη ταχύτητα $v_{max}$ σε αυτό το σημείο.

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$U(3b/2) = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + U(2b) \Rightarrow v_{max} = \frac{\sqrt{2D}}{6m}.$$

$\delta$) Για $x \leq b$ είναι $E \geq 0$ και το μόριο διασπάται.

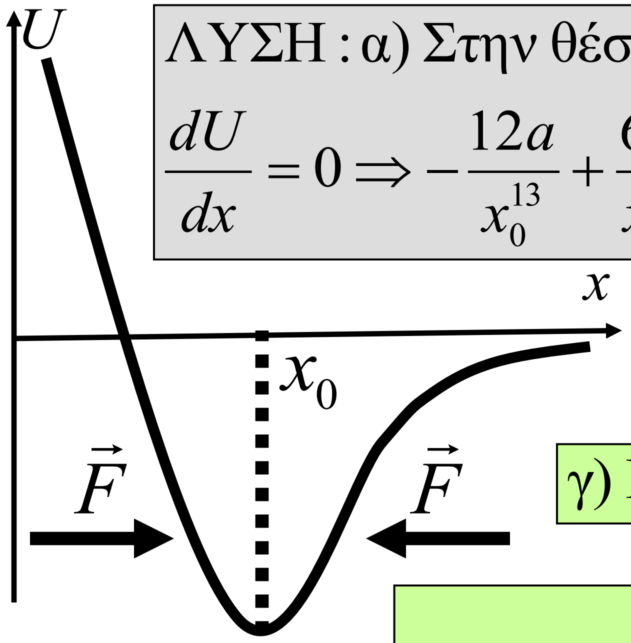
Για $E = 0$ $(x = b)$ το ελεύθερο άτομο θα φτάσει στο $\infty$ με μηδενική ταχύτητα

Για $E > 0$ $(x < b)$ το ελεύθερο άτομο θα φτάσει στο $\infty$ με ταχύτητα $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΟ LENNARD-JONES



Η δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο ατόμων σε ένα διατομικό μόριο μπορεί να εκφραστεί κατά προσέγγιση ως $U(x) = a/x^{12} - b/x^{6}$, όπου $a$ και $b$ είναι θετικές σταθερές και $x$ η απόσταση μεταξύ των ατόμων. α) Για ποιες τιμές του $x$ η $U(x)$ γίνεται ελάχιστη; β) Βρείτε την μεταξύ των ατόμων δύναμη. γ) Η ενέργεια ΔΕ που χρειάζεται για να σπάσει το μόριο σε δύο ξεχωριστά άτομα ονομάζεται ενέργεια διάσπασης. Πόση είναι η ενέργεια διάσπασης;




ΛΥΣΗ : α) Στην θέση ισορροπίας $x_0$ έχουμε

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{12a}{x_0^{13}} + \frac{6b}{x_0^{7}} = 0 \Rightarrow x_0 = (2a/b)^{1/6}.$$

β) Για την δύναμη έχουμε

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}.$$

Είναι $F(x) > 0$ για $x < x_0$, $F(x) < 0$ για $x > x_0$.

γ) Η ενέργεια ΔΕ είναι η διαφορά δυναμικής ενέργειας

μεταξύ $x = x_0$ και $x = \infty$, $\Delta E = -U(x_0) = \dfrac{b}{2a/b} - \dfrac{a}{4a^2/b^2} = \dfrac{b^2}{4a}$.

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΣΤΑΘΜΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

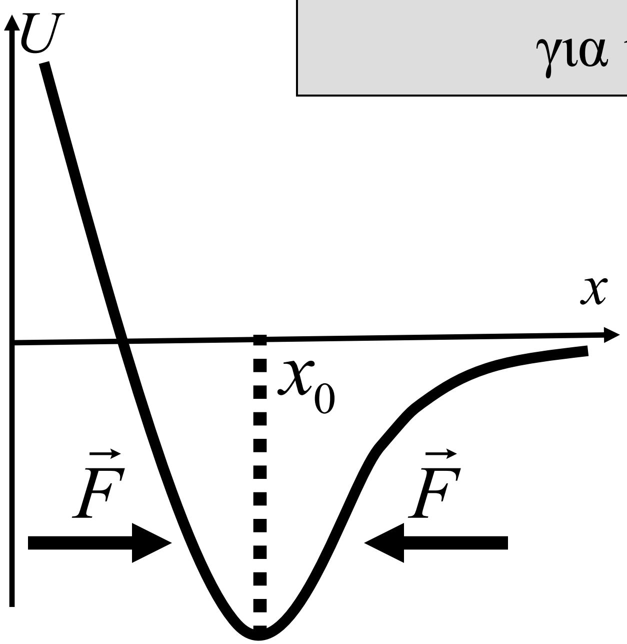


Επειδή είναι $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$ και $\vec{\nabla} C = 0$ αν $C$ είναι μία σταθερά

μπορούμε να επιλέξουμε εμείς την στάθμη αναφοράς για την δυναμική ενέργεια,

αφού οι συναρτήσεις $U(\vec{r})$ και $U(\vec{r}) + C$ δίνουν τις ίδιες δυνάμεις $\vec{F}(\vec{r})$.

Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε εμείς ότι $U(\vec{r}_0) = 0$ για κάποιο $\vec{r}_0$ που μας βολεύει.

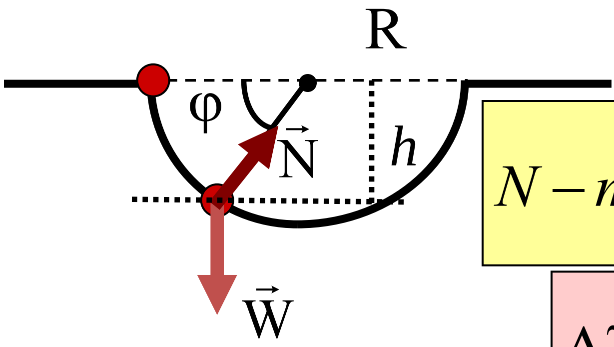



Για παράδειγμα, μας βολεύει να θέσουμε $U(\infty) = 0$ για το δυναμικό μεταξύ δύο ατόμων γιατί έτσι μπορούμε να θυμόμαστε για ποιες ενέργειες $(E > 0)$ το μόριο διασπάται.

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ



Μικρή σφαίρας μάζας $m$ ξεκινάει να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε ημικυλινδρική κοιλότητα ακτίνας $R$. Να βρείτε την δύναμη που ασκεί το κυλινδρικό τοίχωμα ως συνάρτηση της γωνίας φ (έστω ότι για $\varphi = 0$ είναι $\omega_0 = 0$).




ΛΥΣΗ: Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$N - mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \;(1)$$

και $mg\cos\varphi = m\dfrac{dv}{dt}$ (2).

Αλλά $v = \omega R$ και άρα $\dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\dfrac{d\omega}{d\varphi}\dfrac{d\phi}{dt} = \omega R\dfrac{d\omega}{d\varphi}$.

Από την (2) τότε βρίσκουμε $g\cos\varphi d\varphi = \omega R d\omega \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} R\omega' d\omega' = \int_0^{\varphi} g\cos\varphi' d\varphi' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^2/2 = (g\sin\varphi)/R \;(3)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 2g\sin\varphi/R \Rightarrow \omega = \sqrt{2g\sin\varphi/R} \;(4).$$

Αντικατάσταση της (4) στην (1) δίνει $N = mg\sin\varphi + mR\dfrac{2g}{R}\sin\varphi = 3mg\sin\varphi$

Η (3) μπορεί να προκύψει και από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} + \underbrace{U^{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}}_{0} = \underbrace{E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}}_{0} + U^{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow mv^2/2 = mgh \Rightarrow R^2\omega^2 = 2gR\sin\varphi \Rightarrow (3).$$

# ΙΣΧΥΣ



Η ισχύς $P$ είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου :

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(\vec{F} \cdot \vec{r}\right)}{dt}$$

και για σταθερή δύναμη $P \equiv \dfrac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}.$

Αν γνωρίζουμε την ισχύ ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t).$$

Μονάδα της ισχύος στο SI είναι το Watt (1 W = 1 J/s).

Μονάδα της ισχύος είναι επίσης ο "ίππος" 1 hp = 746 W.

Με βάση την ισχύ μπορούμε να ορίσουμε μονάδα ενέργειας την κιλοβατώρα $1\,\mathrm{kWh} = \left(10^3\,\mathrm{W}\right)\left(3600\,\mathrm{s}\right) = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}.$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΜΑΖΑ



Πυροσβεστικό αεροπλάνο κινείται χωρίς τριβές με ταχύτητα $\upsilon$ πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας. Τη στιγμή $t_0 = 0$ ο πιλότος ανοίγει τις άδειες δεξαμενές και νερό αρχίζει να εισρέει σε αυτές με ρυθμό $\lambda$. Βρείτε την ισχύ του κινητήρα του αεροπλάνου αν αυτό συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα $\upsilon$.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t$ το αεροπλάνο έχει συνολική μάζα $M$

και ότι τη χρονική στιγμή $t + dt$ έχει εισρεύσει επιπλέον νερό μάζας $dm = \lambda dt$.

Ο κινητήρας είναι υπεύθυνος για την δράση μιας προωθητικής δύναμης $F_\kappa$, είτε λόγω εκτόξευσης καυσίμων, είτε εκτόξευσης αέρα.

Τότε έχουμε από τον ορισμό της ώθησης για την δύναμη $F_\kappa$ του κινητήρα

$$(M + dm)(\upsilon + d\upsilon) - M\upsilon = F_\kappa dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon dm + M d\upsilon = F_\kappa dt \Rightarrow \upsilon \lambda dt + M d\upsilon = F_\kappa dt.$$

Έαν $d\upsilon = 0$ τότε $F_\kappa = \upsilon\lambda$

και η ισχύς του κινητήρα είναι $P = F_\kappa \upsilon = \lambda \upsilon^2$.