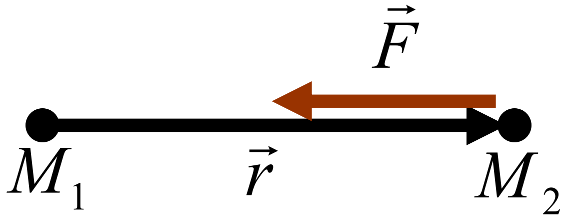
ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μία μάζα M_1 σε μία άλλη μάζα M_2 δίνεται από την σχέση :

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\hat{r},$$



όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο μαζών και $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα μεταξύ των δύο σωμάτων.

$$G = 6{,}67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

Πως καταλήγουμε στην σχέση για την "σταθερή" επιτάχυνση (ανεξάρτητη του ύψους) της βαρύτητας πάνω στην Γη;

Για σώμα μάζας m είναι: $F = G\dfrac{mM_\Gamma}{r^2} = \dfrac{GmM_\Gamma}{R_\Gamma^2}\dfrac{R_\Gamma^2}{r^2} = mg\left(\dfrac{R_\Gamma}{r}\right)^2$, όπου $g = \dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}$,

ενώ R_Γ και M_Γ είναι αντίστοιχα η ακτίνα και η μάζα της Γης.

Σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης είναι $r = R_\Gamma + h$ και

$$\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + h/R_\Gamma}\right)^2 \approx 1 - 2\frac{h}{R_\Gamma} + \ldots$$

αφού για $x = h/R_\Gamma < 1$ έχουμε το ανάπτυγμα Taylor

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{1}{1+2x+x^2} = f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots = 1 - 2x + \ldots$$

$$\left(\text{όντως, είναι } f'(x) = 2\frac{1}{1+x}\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right],\ f'(0) = -2\right)$$

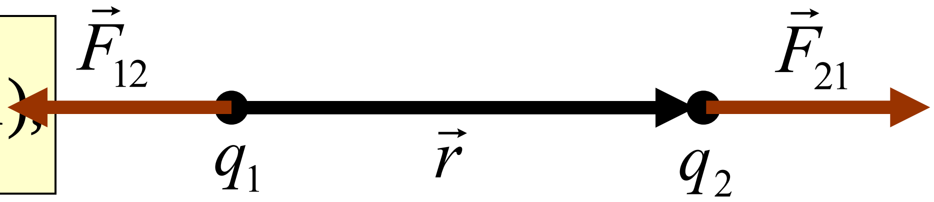
Επομένως, για ύψη h πολύ μικρότερα από $R_\Gamma = 6380$ Km έχουμε $F \approx mg$.

ΔΥΝΑΜΗ COULOMB

Έστω δύο ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2.

Η δύναμη $\vec{F}_{21}$ που ασκεί το φορτίο q_1 στο q_2 δίνεται από την σχέση:

$$\vec{F}_{21} = K_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1),$$



ενώ για την δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται στο φορτίο q_1 από το q_2

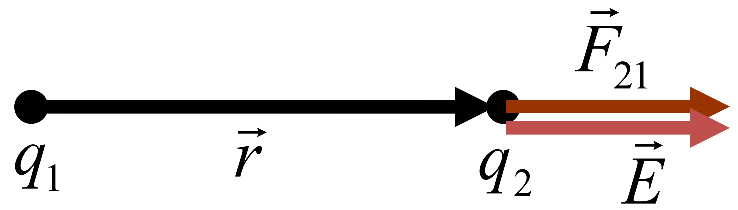
έχουμε $\vec{F}_{12} = -K_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$.

Απωστική δύναμη για ομώνυμα φορτία, ελκτική για ετερώνυμα.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο q_2 είναι $\vec{F}_{21} = K_{\eta\lambda} \dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = q_2 \vec{E}$,

όπου $\vec{E}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q_1 στο σημείο που βρίσκεται το φορτίο q_2.



Το πεδίο είναι θεμελιώδης έννοια της σύγχρονης φυσικής, ιδιαίτερα χρήσιμη για την περιγραφή αλληλεπιδράσεων από πολλά σωματίδια.

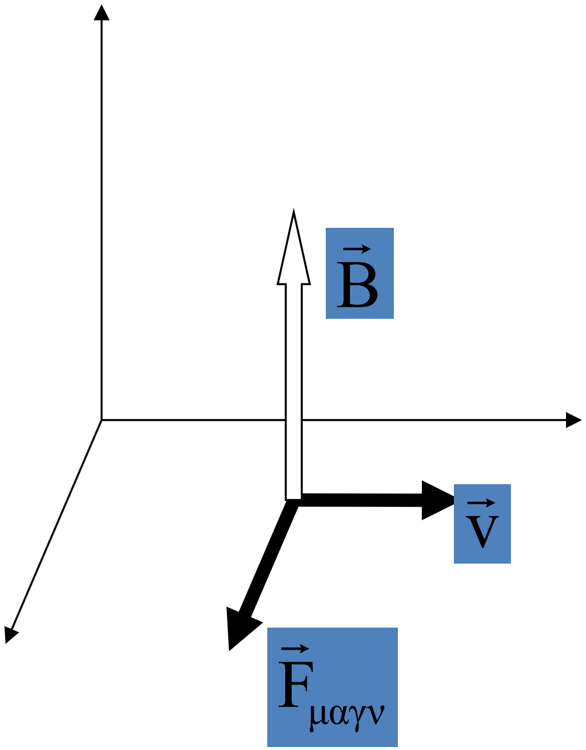
ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ και φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathrm{v}}$. Τότε η δύναμη που ασκείται q στο είναι :

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mu\alpha\gamma\nu} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right).$$

Μονάδα για το $\vec{B}$: $1\,\mathrm{Tesla\,(T)} = \mathrm{N\,sec\,m^{-1}C^{-1}}$.

Οι μαγνητικές δυνάμεις είναι εν γένει πολύ πιο ασθενείς από τις ηλεκτροστατικές.



Αν σε ένα μέρος του χώρου συνυπάρχουν ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathrm{E}}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathrm{B}}$

τότε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathrm{v}}$ δέχεται δύναμη $\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}} + q\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right)$.

Η δύναμη αυτή ονομάζεται δύναμη Lorentz.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση κίνησης για ένα σώμα που κινείται μέσα σε ομογενές πεδίο έντασης $\vec{E}$ (δηλαδή το πεδίο έχει σταθερή ένταση σε όλο το μέρος του χώρου που μας ενδιαφέρει).

$$\text{Είναι}: \vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}(t')}{m}dt' + \vec{v}(t_0).$$

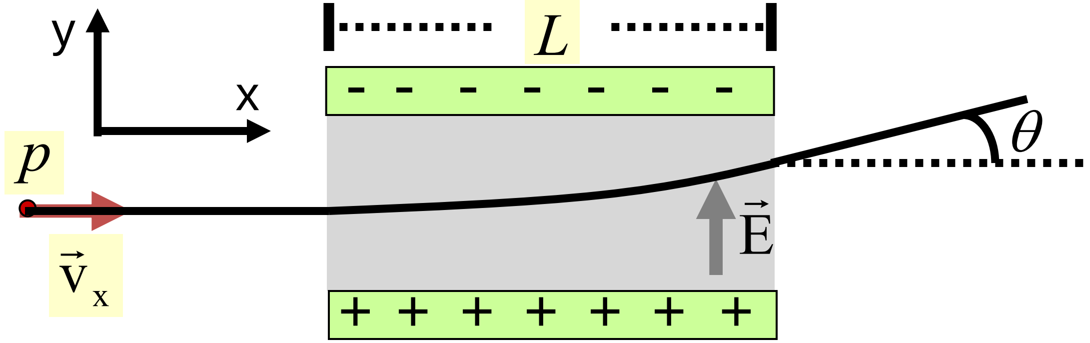
Έστω ότι για $t = t_0 = 0$ το σώμα είναι στην θέση $\vec{r}_0$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0$.

Επειδή το πεδίο είναι σταθερό η εξίσωση κίνησης είναι όμοια με αυτήν σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την εξίσωση για την ταχύτητα $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$.

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φόρα βρίσκουμε την εξίσωση για την θέση: $\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$.

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΥ

Πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα 10^7 m/s παράλληλα προς φορτισμένες μεταλλικές πλάκες μήκους $L = 0{,}01$ m που δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο 3kV/m. Το πρωτόνιο εισέρχεται στον χώρο μεταξύ των πλακών και μετά από χρόνο τ εξέρχεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με την αρχική του κατεύθυνση. Βρείτε την *γωνία εκτροπής* θ.



Η κίνηση είναι όμοια αυτής της βολής στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης.

Ο χρόνος τ που χρειάζεται το πρωτόνιο να διασχίσει το μήκος L των πλακών

είναι $v_x = L/\tau \Rightarrow \tau = L/v_x = 0{,}01\text{m}/10^7\,\text{m/s} = 10^{-9}\text{s} = 1\text{ns}.$

Για την ταχύτητα που έχει το πρωτόνιο όταν εξέρχεται από τις πλάκες έχουμε:

$$v_y = eE_y\tau/m = 4{,}8\times10^5\,\text{m/s}.$$

Για την γωνία θ έχουμε: $\tan\theta = v_y/v_x \Rightarrow \theta \approx \tan^{-1} 0{,}05 \approx 0{,}05.$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ: ΤΡΙΒΗ

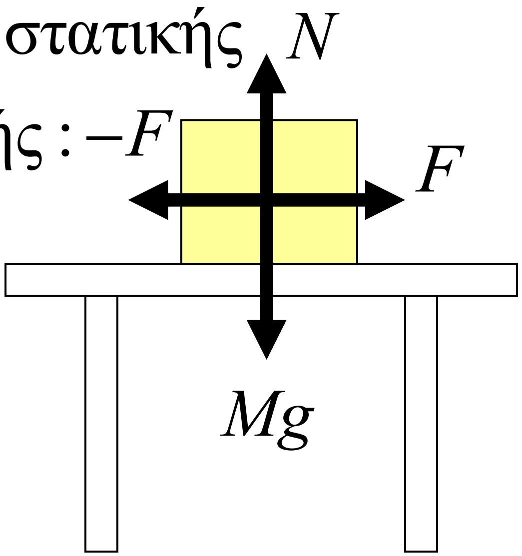
Οι *σύνθετες δυνάμεις* που αναπτύσονται *μεταξύ δύο επιφανειών* παρουσιάζονται μακροσκοπικά ως αυτό που ονομάζουμε *τριβή*.

Η τριβή δρα ως αντίσταση στην έναρξη ή διατήρηση της κίνησης.

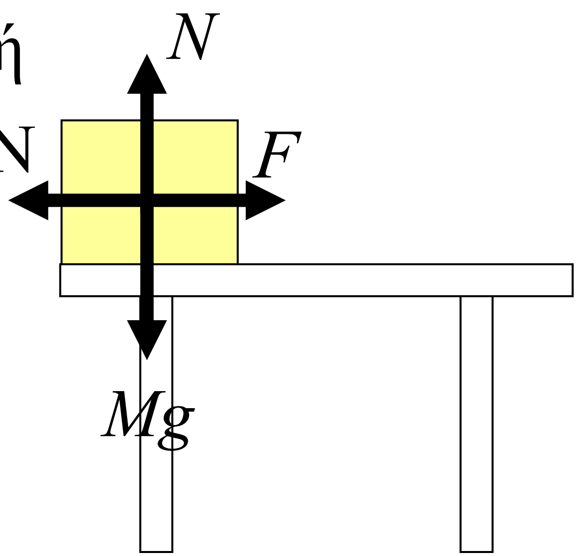
Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για *στατική τριβή* που εμποδίζει την μετακίνηση σώματος που ηρεμεί πάνω σε κάποια επιφάνεια.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε την *δυναμική τριβή*.

Δύναμη στατικής τριβής : $-F$



Δυναμική τριβή : μN



ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΡΙΒΗΣ

Όταν εφαρμόζουμε μια μικρή δύναμη στο σώμα του σχήματος, τότε αναπτύσεται μια ίση και αντίθετη δύναμη τριβής ($F_{\tau\rho}$) που δεν επιτρέπει στο σώμα να κινηθεί.

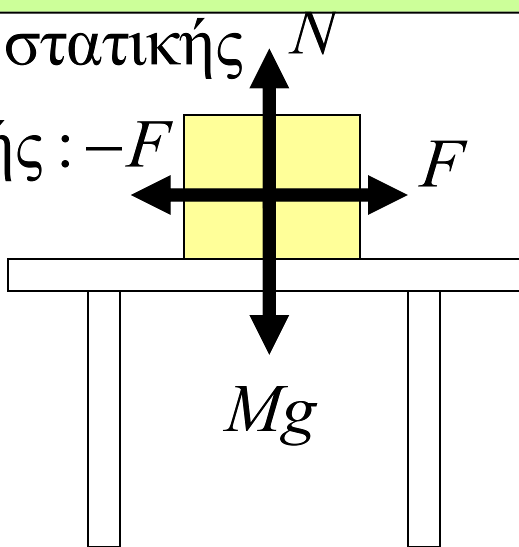
Καθώς μεγαλώνει η εφαρμοζόμενη δύναμη, μεγαλώνει και η $F_{\tau\rho}$.

μέχρι μια μέγιστη τιμή $F_{\max} = \mu_{\sigma\tau}\mathrm{N}$,
όπου $\mu_{\sigma\tau}$ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής.

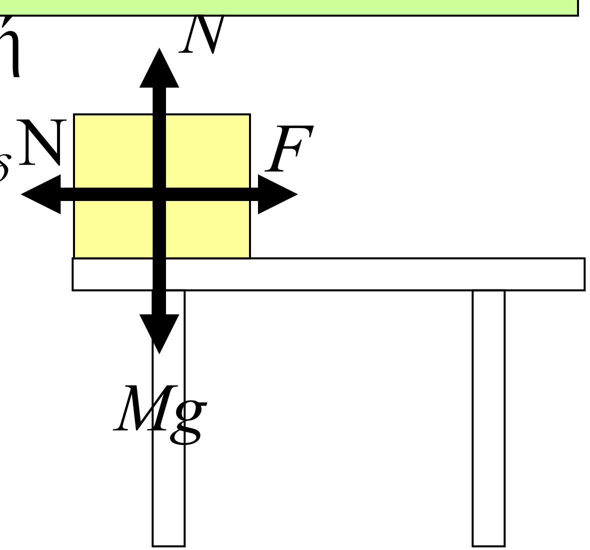
Για $F > F_{\max}$ το σώμα αρχίζει να κινείται.

Κατόπιν $F_{\tau\rho} = F_{\delta} = \mu_{\delta}\mathrm{N}$, όπου μ_{δ} ο συντελεστής δυναμικής τριβής.

Δύναμη στατικής τριβής: $-F$



Δυναμική τριβή: $\mu_{\delta}\mathrm{N}$



ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΡΙΒΗΣ

Έστω σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ τέτοιας ώστε το σώμα μόλις να αρχίζει να ολισθαίνει.

Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι υπάρχει *ισορροπία* μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα :

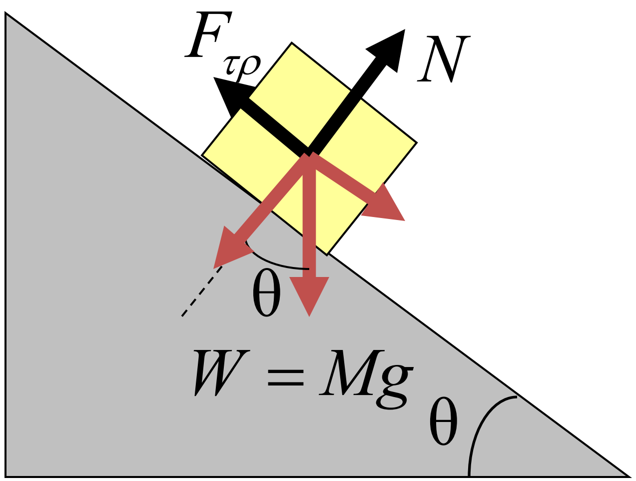
$$\vec{W} + \vec{N} + \vec{F}_{\tau\rho} = 0$$

Αναλύοντας τις δυνάμεις κατά τις διευθύνσεις των $\vec{N}$ και $\vec{F}_{\tau\rho}$

βρίσκουμε $N = Mg\cos\theta$ και $F_{\tau\rho} = Mg\sin\theta$.

Είναι όμως $F_{\tau\rho} = \mu_{\sigma\tau} N$.

Άρα : $\mu_{\sigma\tau} N = Mg\sin\theta \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = \tan\theta$.



Υλικά	$\mu_{\sigma\tau}$
Γυαλί σε γυαλί	$0{,}9 - 1{,}0$
Πάγος σε πάγο	$0{,}05 - 0{,}15$
Λάστιχο σε στερεό	$1 - 4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΡΙΒΗ

Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα για να σταματήσει πάνω σε επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ αφού διανύσει απόσταση D;

Η εξίσωση κίνησης είναι: $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu Mg \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu g$

$$\frac{dx}{dt} = -\mu g t + v_0 \ (1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t + x_0 \ (2).$$

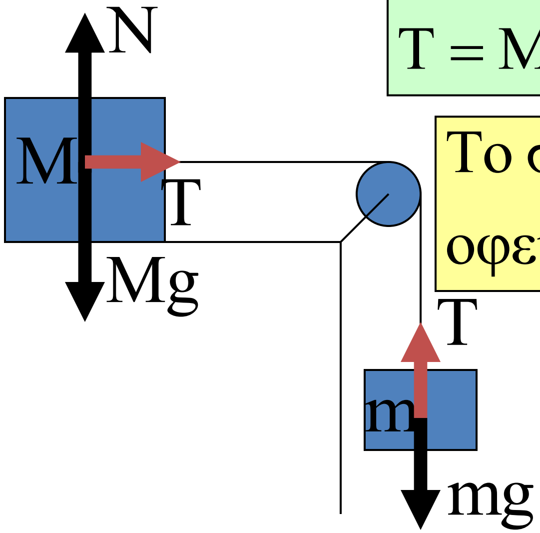
Από την (1) βρίσκουμε τον χρόνο τ που χρειάζεται για να μηδενιστεί η ταχύτητα: $\dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow -\mu g\tau + v_0 = 0 \Rightarrow \tau = \dfrac{v_0}{\mu g}$ (3).

Χρησιμοποιώντας το τ στην (2) και για $x - x_0 = D$ βρίσκουμε

$$D = -\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{\mu g}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2D\mu g}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΤΡΟΧΑΛΙΑ

Έστω κύβος μάζας M πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ο κύβος έλκεται από ένα σκοινί δεμένο σε ένα βάρος μάζας m το οποίο εξαρτιέται από μια τροχαλία. Υποθέτουμε ότι η τροχαλία δεν έχει μάζα, ούτε προκαλεί τριβές, παρά μόνο αλλάζει την διεύθυνση της τάσης του σκοινιού. Βρείτε την επιτάχυνση του συστήματος και την τάση του σκοινιού.



ΛΥΣΗ : Το σώμα M επιταχύνεται λόγω της τάσης T, άρα $T = Ma$, όπου a είναι η επιτάχυνση.

Το σώμα m επιταχύνεται και αυτό με επιτάχυνση a που οφείλεται στον συνδυασμό του βάρους και της τάσης :

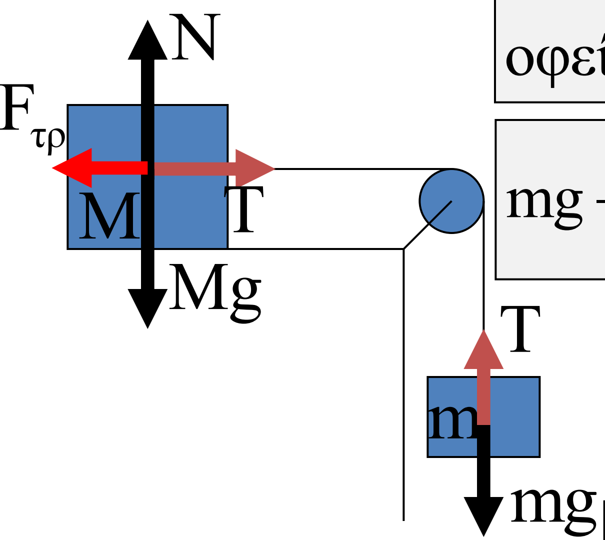
$$mg - T = ma \Rightarrow mg - Ma = ma \Rightarrow a = \frac{m}{m+M}g.$$

Οπότε για την τάση βρίσκουμε $T = \dfrac{mM}{m+M}g$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΤΡΟΧΑΛΙΑ – ΤΡΙΒΗ

Έστω ότι ο κύβος του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκεται πάνω σε επιφάνεια με συντελεστή δυναμικής τριβής μ_δ. Βρείτε την επιτάχυνση του συστήματος.

ΛΥΣΗ: Είναι τώρα $T - F_{\tau\rho} = Ma$, όπου $F_{\tau\rho} = \mu_\delta Mg$ η δύναμη τριβής.



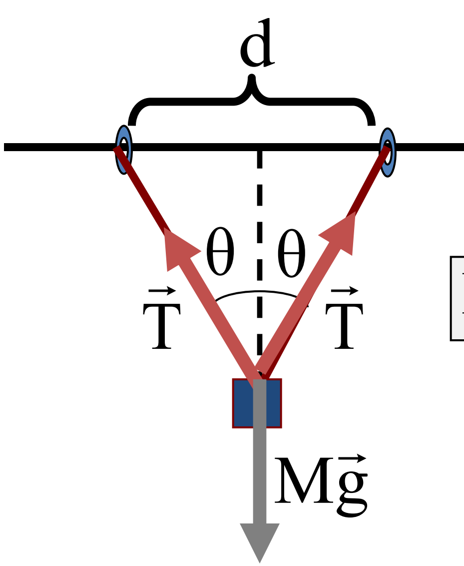
Το σώμα m επιταχύνεται και αυτό με επιτάχυνση a που οφείλεται στον συνδυασμό του βάρους και της τάσης:

$$mg - T = ma \Rightarrow mg - Ma - \mu_\delta Mg = ma \Rightarrow a = \frac{m - \mu_\delta M}{m + M} g.$$

Επομένως, για να επιταχυνθεί η μάζα m προς τα κάτω πρέπει $m > \mu_\delta M$

Αν οι μάζες είναι αρχικά σε ηρεμία, για να ξεκινήσει κίνηση θα πρέπει $m > \mu_\sigma M$, όπου μ_σ ο συντελεστής στατικής τριβής.

Σώμα μάζας M κρέμεται από το μέσο σχοινιού μήκους $\mathrm{L} = 1\,\mathrm{m}$ που είναι δεμένο στα δύο του άκρα σε δαχτυλίδια. Αν τα δαχτυλίδια είναι περασμένα σε οριζόντια δοκό με συντελεστή στατικής τριβής $\mu = 0{,}35$, ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση των δαχτυλιδιών ούτως ώστε το σώμα να ισορροπεί;



ΛΥΣΗ : Καταρχήν αναλύουμε τις δυνάμεις σε κατάσταση ισορροπίας πάνω στο σώμα και σε ένα από τα δαχτυλίδια.

Είναι $2T\cos\theta = \mathrm{M}g$.

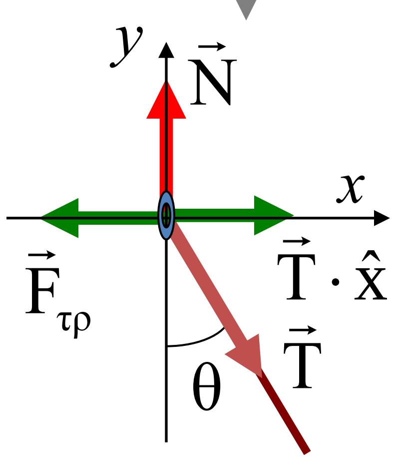
Είναι ακόμη $T\sin\theta = F_{\tau\rho} \Rightarrow$

$$F_{\tau\rho} = Mg\,\frac{\tan\theta}{2}.$$

Το μέγιστο θ (άρα και μέγιστο $\mathrm{d} = \mathrm{L}\sin\theta$) προκύπτει όταν η στατική τριβή γίνεται μέγιστη και ίση με μN.

Είναι τότε : $\mathrm{T}\cos\theta = \mathrm{N}$ και $\mathrm{T}\sin\theta = \mu\mathrm{N}$.

Άρα $\tan\theta = \mu = 0{,}35 \Rightarrow \theta = 19{,}6^{\mathrm{o}}$.



Από το σχήμα βρίσκουμε $\mathrm{d} = 2\dfrac{\mathrm{L}}{2}\sin\theta = 2\dfrac{1\mathrm{m}}{2}\sin\theta = 0{,}33\mathrm{m}$