ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

1ος νόμος : Σώμα που ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα παραμένει σε αυτή την φυσική κατάσταση αν δεν ασκείται πάνω του καμμία δύναμη.

2ος νόμος : Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι ανάλογος της συνολικής δύναμης που ασκείται πάνω στο σώμα.

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}\right)$, όπου $\vec{P} = M\vec{v}$ είναι η ορμή του σώματος

Μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το Newton (N), $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{Kg} \times 1\mathrm{m/s}^2$

Ο δεύτερος νόμος ορίζει την λεγόμενη **αδρανειακή μάζα** που μπορεί να προσδιοριστεί μέσω μέτρησης χρόνων και αποστάσεων και με την βοήθεια σταθερής δύναμης.

ΤΡΙΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Δύο σώματα που αλληλεπιδρούν άμεσα ασκούν το ένα στο άλλο ίσες και αντίθετες δυνάμεις (**δράση - αντίδραση**) :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Μη τοπικότητα : Δεν ισχύει επακριβώς σε περιπτώσεις πεπερασμένης ταχύτητας μετάδοσης των αλληλεπιδράσεων σε μεγάλες αποστάσεις

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα προβλέπει ότι η **ολική ορμή** δύο αλληλεπιδρώντων σωμάτων παραμένει **σταθερή** :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{σταθερά.}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Για σταθερή μάζα m έχουμε : $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{\vec{F}}{m} \quad (1)$

Εάν γνωρίζουμε την δύναμη ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, τότε η σχέση αυτή ορίζει μια *διαφορική εξίσωση* η λύση της οποίας μας περιγράφει την κίνηση του σώματος (θέση συναρτήσει του χρόνου).

Η λύση της (1) απαιτεί τον προσδιορισμό δύο ολοκληρωμάτων (αυτών της ταχύτητας και της θέσης). Π.χ. αν $\vec{F} = \vec{F}(t)$ τότε

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m} \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}(t')}{m} dt' + \vec{v}_0,$$

και $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}_0.$

καθώς και δύο σταθερών ολοκλήρωσης. Οι σταθερές προσδιορίζονται (συνήθως) από γνωστές τιμές της λύσης σε κάποια χρονική στιγμή t_0 (ή στιγμές). Αν t_0 είναι η αρχική στιγμή, τότε μιλάμε για αρχικές συνθήκες.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Από την $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{F}}{m}$ (1) βρήκαμε τη λύση $\vec{v}(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}(t')}{m}dt'+\vec{v}_0$ (2).

Καταρχήν η (2) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, αφού

$$\vec{v}(t_0)=\underbrace{\int_{t_0}^{t_0}\frac{\vec{F}(t')}{m}dt'}_{0}+\vec{v}_0=\vec{v}_0$$

Επίσης η (2) ικανοποιεί την (1) αφού

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}(t')}{m}dt'+\vec{v}_0\right)}{dt}=\frac{\vec{F}(t)}{m},$$

ή αλλιώς, $\int_{t_0}^{t}\frac{m\frac{d\vec{v}}{dt'}}{m}dt'+\vec{v}_0=\int_{t_0}^{t}\frac{d\vec{v}}{dt'}dt'+\vec{v}_0=\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)+\vec{v}_0=\vec{v}(t)$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η **γενική λύση** της $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{v}(t)$

είναι η $\vec{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')dt'+\vec{r}_0$

ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Έστω ότι σε ένα σώμα μάζας M ασκείται δύναμη $\vec{F} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$.

Έστω ακόμη ότι γνωρίζουμε πως την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Τότε έχουμε : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$, όπου $\vec{v}_0, \vec{r}_0$ είναι σταθερές.

Για τις επιμέρους συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x = v_{0x} t + x_0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} \Rightarrow y = v_{0y} t + y_0$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} \Rightarrow z = v_{0z} t + z_0$$

ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΗ ΔΥΝΑΜΗ

Έστω ότι σε ένα σώμα μάζας m ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$

Έστω ακόμη ότι γνωρίζουμε πως την χρονική στιγμή $t = t_0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Τότε έχουμε :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m} \Rightarrow v_x = v_{0x} + \frac{F_x}{m}(t - t_0)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \Rightarrow v_y = v_{0y} + \frac{F_y}{m}(t - t_0)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m} \Rightarrow v_z = v_{0z} + \frac{F_z}{m}(t - t_0)$$

Για τις συνιστώσες της θέσης βρίσκουμε :

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{F_x}{2m}(t - t_0)^2$$

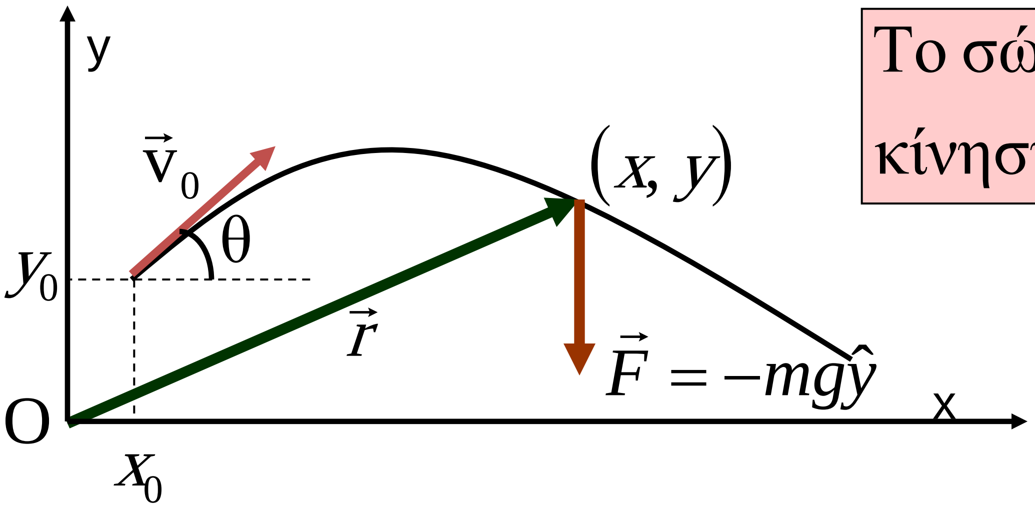
$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{F_y}{2m}(t - t_0)^2$$

$$z = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \frac{F_z}{2m}(t - t_0)^2$$

ΒΟΛΕΣ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = -g\hat{y} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} = -g\hat{y}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ και } \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$



Το σώμα εκτελεί *ευθύγραμμη ομαλή* κίνηση κατά τον *άξονα των x*:

$$x = x_0 + (v_0\cos\theta)t$$

Κατά τον άξονα των *y* το σώμα εκτελεί *ομαλά επιταχυνόμενη* κίνηση

$$y = y_0 + (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

$$x = x_0 + (\mathrm{v}_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{\mathrm{v}_0 \cos\theta} \longrightarrow y = y_0 + (\mathrm{v}_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ας ορίσουμε $\tilde{y} = y - y_0$ και $\tilde{x} = x - x_0$. Τότε

$$\tilde{y} = \tilde{x} \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{g} \tilde{x}^2}{v_0^2 \cos^2\theta} = a\tilde{x} + b\tilde{x}^2$$

όπου $a \equiv \tan\theta \quad (1), b \equiv -\dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{g}}{v_0^2 \cos^2\theta} \quad (2).$

Είναι λοιπόν $\tilde{y} = b\left(\dfrac{a}{b}\tilde{x} + \tilde{x}^2\right) = b\left[2\dfrac{a}{2b}\tilde{x} + \tilde{x}^2 + \left(\dfrac{a}{2b}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2b}\right)^2\right]$

Δηλαδή $\tilde{y} = b\left(\tilde{x} + \dfrac{a}{2b}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4b} \Rightarrow \tilde{y} + \dfrac{a^2}{4b} = b\left(\tilde{x} + \dfrac{a}{2b}\right)^2$

Αντικαθιστώντας από τις (1), (2) βρίσκουμε την *εξίσωση της τροχιάς*

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\, t$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta}$$

$$\underbrace{y - \left(y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}\right)}_{y_1} = \underbrace{\frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2\theta}}_{A<0} \left[x - \underbrace{\left(x_0 + \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}\right)}_{x_1} \right]^2$$

$$y - y_1 = A (x - x_1)^2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

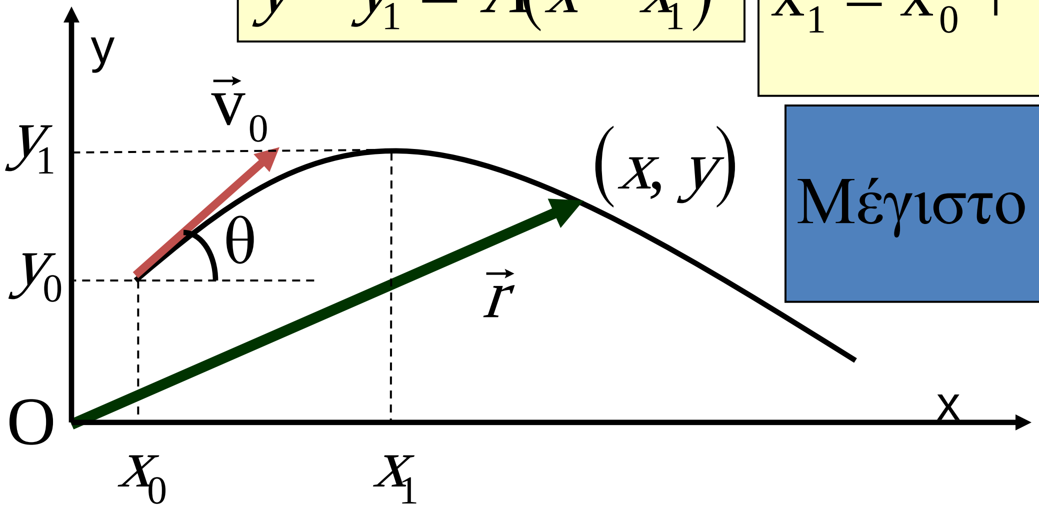
Εξίσωση παραβολής που έχει ως κορυφή το σημείο (x_1, y_1)

ΒΟΛΕΣ: ΜΕΓΙΣΤΟ ΥΨΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ

$$y - y_1 = A(x - x_1)^2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$



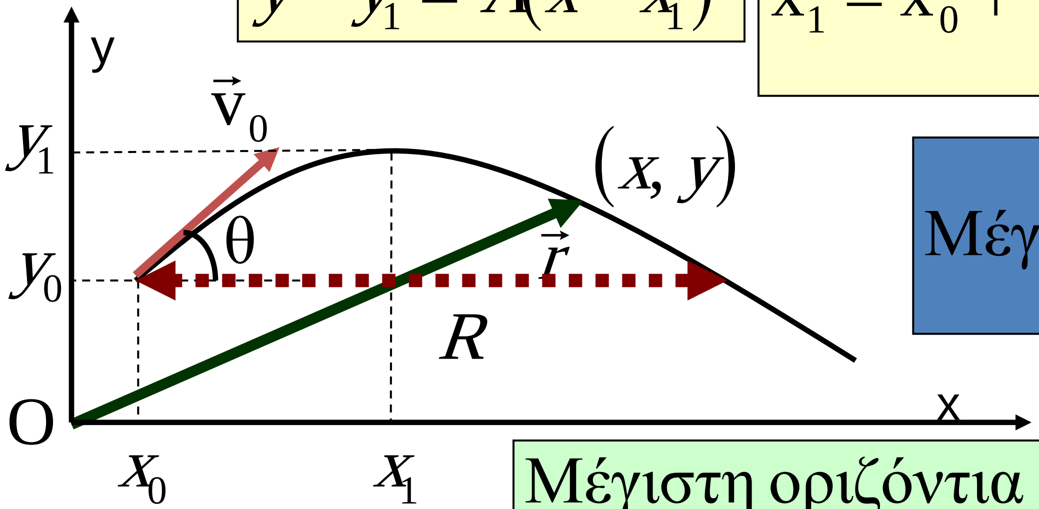
$$\text{Μέγιστο ύψος}: h_{max} = y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}.$$

ΒΟΛΕΣ: ΜΕΓΙΣΤΟ ΥΨΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ

$$y - y_1 = A(x - x_1)^2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$



$$\text{Μέγιστο ύψος}: h_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Μέγιστη οριζόντια απόσταση (*βεληνεκές*):

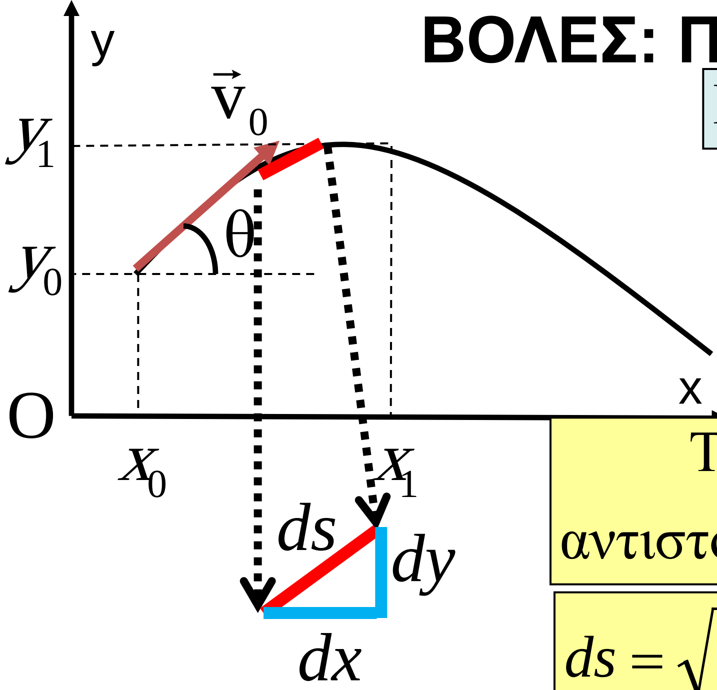
$$R = 2(x_1 - x_0) = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Μέγιστο βεληνεκές:

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\frac{v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0$$

Άρα R_{max} προκύπτει για $\theta = 45^o$

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ



Ποιο είναι το μήκος της παραβολικής τροχιάς;

Γενικότερα, ποιο είναι το μήκος μιας καμπύλης που περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$ αν το x μεταβάλλεται μεταξύ του a και b;

Το διαφορικό ds του μήκους της καμπύλης αντιστοιχεί σε μετατοπίσεις dx και dy και βρίσκουμε:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = dx\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Το ολικό μήκος s_{ab} της καμπύλης για $x \in [a,b]$ είναι: $s_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$

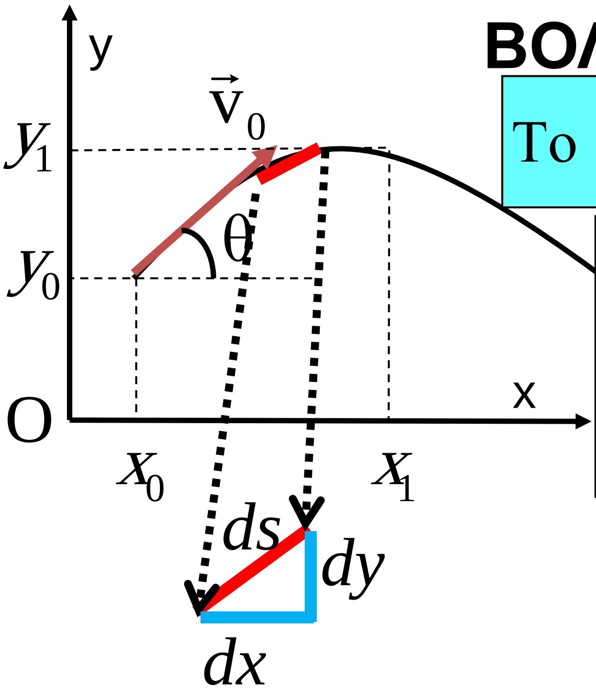
Παράδειγμα: Η εξίσωση $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1,1]$ περιγράφει ημικύκλιο

με κέντρο το σημείο $(0,0)$, ακτίνα 1 και μήκος:

$$s = \int_{-1}^{1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{-1}^{1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{y} \overset{x=\cos\theta, y=\sin\theta}{=} -\int_{\pi}^{0} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = \pi, \text{ σωστά!}$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ



Το μήκος s_{ab} της καμπύλης είναι : $s_{ab}=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$

Π.χ., έστω ότι βάλλουμε σώμα οριζόντια από ύψος y_0 $(x_0=0)$ με ταχύτητα $\upsilon_0=\sqrt{gy_0}$ και ζητούμε το μήκος της τροχιάς έως ότου το σώμα χτυπήσει το έδαφος.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την εξίσωση τροχιάς $y=y_1+A(x-x_1)^2=y_0+Ax^2$,

με $y_1=y_0+\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2g}\overset{\theta=0}{=}y_0,\; x_1=x_0+\dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}=0,\; A=\dfrac{-g}{2\upsilon_0^2\cos^2\theta}=-\dfrac{1}{2y_0}.$

Επομένως : $s=\int_0^a\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+(x/y_0)^2}\,dx\overset{u=x/y_0}{=}y_0\int_0^{a/y_0}\sqrt{1+u^2}\,du=\cdots\Rightarrow$

$$s=y_0\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{a/y_0}=\frac{y_0}{2}\left[\frac{a}{y_0}\sqrt{1+\left(\frac{a}{y_0}\right)^2}+\ln\left[\frac{a}{y_0}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{y_0}\right)^2}\right]\right]$$

όπου $0=y_0+Aa^2\Rightarrow a=\sqrt{|y_0/A|}=\sqrt{2}y_0.$

Άρα : $s=y_0\left[\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]/2.$

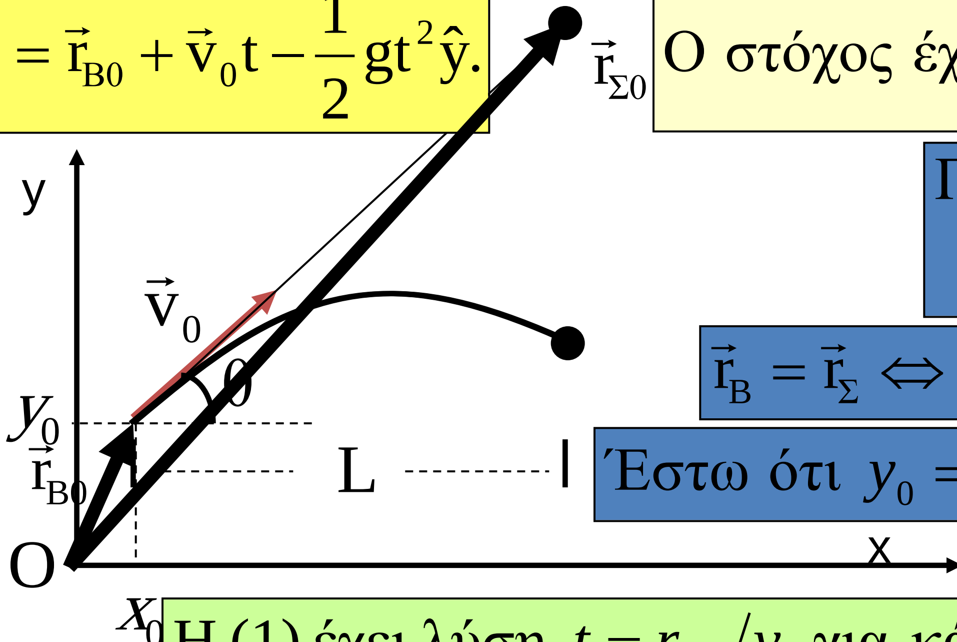
ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΟΛΗ

Στοχεύουμε προς στόχο και βάλλουμε την στιγμή που ο στόχος αφήνεται να πέσει. Κάτω από ποιες συνθήκες βρίσκει το βλήμα τον στόχο;

ΛΥΣΗ : Το διάνυσμα θέσης του βλήματος υπακούει την εξίσωση :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B0} + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}.$$

Ο στόχος έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_\Sigma = \vec{r}_{\Sigma 0} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}.$



Για να βρει το βλήμα τον στόχο πρέπει για κάποιο t να είναι

$$\vec{r}_B = \vec{r}_\Sigma \Leftrightarrow \vec{r}_{B0} + \vec{v}_0 t = \vec{r}_{\Sigma 0} \Leftrightarrow \vec{v}_0 t = \vec{r}_{\Sigma 0} - \vec{r}_{B0} \quad (1).$$

Έστω ότι $y_0 = 0$ (η βολή γίνεται από το έδαφος)

Η (1) έχει λύση $t = r_{\Sigma B}/v_0$ για κάθε v_0 αρκεί το βεληνεκές της τροχιάς να είναι μεγαλύτερο από την οριζόντια απόσταση L.

Είναι $L = r_{\Sigma B}\cos\theta$ και το βεληνεκές $R = v_0^2 \sin 2\theta / g$

Για $L < R \Leftrightarrow g r_{\Sigma B} < 2 v_0^2 \sin\theta$ το βλήμα βρίσκει σίγουρα τον στόχο.