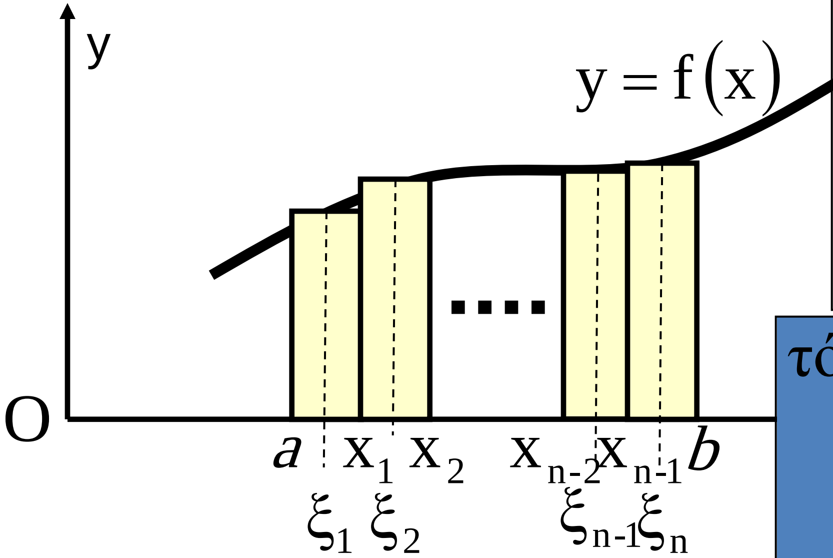
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\Delta x\to 0\,(n\to\infty)}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

τότε λέμε ότι το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της $f(x)$ στο $[a,b]$ είναι το

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0\,(n\to\infty)}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος :

1) $\int_a^b [Af(x)\pm Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx \pm B\int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

1ο – 2ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης:

Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν c είναι ένας αριθμός εσωτερικός του διαστήματος αυτού, $a \le c \le b$, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $A(x)$ ως εξής: $A(x)=\int_c^x f(t)dt$, αν $a \le x \le b$. Η παράγωγος $A'(x)$ υπάρχει τότε σε κάθε σημείο x του (a,b) όπου η $f(x)$ είναι συνεχής και για αυτά τα x είναι $A'(x)=f(x)$.

Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης:

Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και συνεχής στο (a,b). Έστω $P(x)$ τυχούσα παράγουσα της $f(x)$, δηλαδή $P'(x)=f(x)$, στο διάστημα (a,b). Αν $a<c<b$, θα είναι

$$\int_c^x f(t)dt = P(x)-P(c).$$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κάθε συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε $F'(x)=\dfrac{dF}{dx}= f(x)$

ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της $f(x)$.

Συμβολικά : $\int f(x)dx = F(x)+C$, όπου C μία σταθερά (ολοκλήρωσης).

Είναι : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \dfrac{dF(x)}{dx}dx = F(b)-F(a)$.

Δηλαδή : $\int f(x)dx = F(x)+C = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = F(x)-F(x_0)$, όπου $C=-F(x_0)$.

Παράδειγμα 1 : $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}+C$

Παράδειγμα 2 : $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Παράδειγμα 3 : $\int e^{ax}dx = \dfrac{e^{ax}}{a}+C$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Αλλαγή μεταβλητής: $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f[g(t)]g'(t)dt,\ (1)$ όπου $g(t_a)=a, g(t_b)=b.$

$\left(\text{αφού για } x = g(t) \text{ έχουμε } dx = \frac{d[g(t)]}{dt}dt = g'(t)dt\right)$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{dx}{ax+b},\ a>0, b>0.$

Αν θέσουμε $ax+b=u$ τότε $adx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$ και από την (1) βρίσκουμε

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\left[\ln u\Big|_{u_1}^{u_2}\right] = \frac{1}{a}(\ln u_2 - \ln u_1) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right),$$ όπου $u_1 = a\cdot 0 + b = b$

και $u_2 = a\cdot 1 + b = a+b.$

Τελικά: $I = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right).$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω $u = f(x)$ και $w = g(x)$. Είναι τότε $d(uw) = \dfrac{d(uw)}{dx}dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(uw) = \left(u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}\right)dx = u\left(\frac{dw}{dx}dx\right) + w\left(\frac{du}{dx}dx\right) = udw + wdu.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int udw = uw - \int wdu, \ (1)$

ή αλλιώς: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx. \ (2)$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_1 = \int xe^x dx.$

Με εφαρμογή της (2) για $f(x) = x$ και $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$ βρίσκουμε

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x \frac{dx}{dx}dx = xe^x - e^x + C.$$

Γενικότερα βρίσκουμε:

$$I_{n+1} = \int x^{n+1}e^x dx = x^{n+1}e^x - (n+1)\int e^x x^n dx = x^{n+1}e^x - (n+1)I_n.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Είδαμε ότι για διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(u) = F_1(u)\hat{i} + F_2(u)\hat{j} + F_3(u)\hat{k}$

η παράγωγος βρίσκεται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{dF_1(u)}{du}\hat{i} + \frac{dF_2(u)}{du}\hat{j} + \frac{dF_3(u)}{du}\hat{k}. \quad (1)$$

Επομένως, με τον αντίστροφο συλλογισμό, το αόριστο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(u) = f_1(u)\hat{i} + f_2(u)\hat{j} + f_3(u)\hat{k}$

δίνεται από την σχέση $I = \int \vec{f}(u)du = \hat{i}\int f_1(u)du + \hat{j}\int f_2(u)du + \hat{k}\int f_3(u)du. \quad (2)$

Παράδειγμα: Βρείτε το ολοκλήρωμα της $\vec{\upsilon}(t) = 2t\hat{x} + 8t^3\hat{z}$.

Λύση: Είναι $\vec{r}(t) = \int \vec{\upsilon}(t)dt = \hat{x}\int 2tdt + \hat{y}\int 0dt + \hat{z}\int 8t^3dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x}\left(t^2 + C_1\right) + \hat{y}C_2 + \hat{z}\left(2t^4 + C_3\right). \quad (3)$$

Αν μας δοθεί η πληροφορία, π.χ., ότι $\vec{r}(0) = (0,10,0)$

τότε βρίσκουμε: $C_1 = C_3 = 0, C_2 = 10$ και $\vec{r}(t) = t^2\hat{x} + 10\hat{y} + 2t^4\hat{z}$.