ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(Κατά τα γνωστά) Μία (βαθμωτή) **συνάρτηση** ορίζει μια απεικόνιση ενός αριθμού (βαθμωτού μεγέθους) x σε άλλο αριθμό $f(x)$.

Μία **διανυσματική συνάρτηση** ορίζει μια απεικόνιση ενός αριθμού u σε ένα διάνυσμα $\vec{A}(u)$.

Π.χ., για $A_1(u), A_2(u), A_3(u)$ βαθμωτές συναρτήσεις του βαθμωτού μεγέθους u μπορούμε να ορίσουμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{A}(u) = A_1(u)\hat{i} + A_2(u)\hat{j} + A_3(u)\hat{k} \left(\text{με } \hat{i} = \hat{x},\ \hat{j} = \hat{y},\ \hat{k} = \hat{z}\right).$$

Γενικότερα, μία **διανυσματική συνάρτηση** ορίζει μια απεικόνιση ενός διανύσματος $\vec{u} = (x, y, z)$ σε ένα διάνυσμα $\vec{A}(\vec{u})$.

Π.χ., για $A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z)$ βαθμωτές συναρτήσεις 3 μεταβλητών ορίζουμε την $\vec{A}(\vec{u}) = A_1(x,y,z)\hat{i} + A_2(x,y,z)\hat{j} + A_3(x,y,z)\hat{k}$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}(u) = A_1(u)\hat{i} + A_2(u)\hat{j} + A_3(u)\hat{k}$

$(\hat{i} = \hat{x},\ \hat{j} = \hat{y},\ \hat{k} = \hat{z})$

Η παράγωγος της $\vec{A}(u)$ ορίζεται ως: $\dfrac{d\vec{A}(u)}{du} \equiv \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}$

και δίνεται από την σχέση (αν τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ δεν εξαρτώνται από το u):

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_1(u)}{du}\hat{i} + \frac{dA_2(u)}{du}\hat{j} + \frac{dA_3(u)}{du}\hat{k} \quad (1)$$

Παράδειγμα: Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x(\mathrm{t})\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (2)$

βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k} \quad (3)$

και την επιτάχυνση $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \quad (4)$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωματιδίου, του οποίου η θέση καθορίζεται από ένα από τα παρακάτω διανύσματα (συναρτήσεις του χρόνου t):

$(\alpha)\ \vec{r} = 16t\hat{x} + 25t^2\hat{y} + 33\hat{z}$

$(\beta)\ \vec{r} = 10\sin(15t)\hat{x} + 35t\hat{y} + e^{6t}\hat{z}.$

ΛΥΣΗ: (α) Για την ταχύτητα $\vec{v}$ έχουμε: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 16\hat{x} + 50t\hat{y},$

οπότε βρίσκουμε για την επιτάχυνση $\vec{a}$: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 50\hat{y}.$

(β) Έχουμε: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 150\cos(15t)\hat{x} + 35\hat{y} + 6e^{6t}\hat{z},$

και $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -2250\sin(15t)\hat{x} + 36e^{6t}\hat{z}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις $x(t) = 3\sin 5t,\ y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος μετριέται σε sec). Να βρεθούν : (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{v}$ και της επιτάχυνσης $\vec{\gamma}$ του σημείου. (β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου. (γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

α) Είναι $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = 15\cos 5t,\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = -20\sin 5t,$

και $\gamma_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = -75\sin 5t, \gamma_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt} = -100\cos 5t.$

β) Για ττ μέτρο v ττη ττ αχύτητα έχουμε $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{225 + 175\sin^2 5t}\ m/\sec.$

Για το μέτρο γ της επιτάχυνσης έχουμε $\gamma(t) = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}.$

γ) Είναι $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1,$ δηλαδή η τροχιά είναι

μία έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα 4 m και μικρό ημιάξονα 3 m.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $n = n(u)$ *βαθμωτή συνάρτηση* βαθμωτής μεταβλητής και $\vec{A} = \vec{A}(u)$ *διανυσματική συνάρτηση* βαθμωτής μεταβλητής. Τότε :

$$1)\ \frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{du}$$

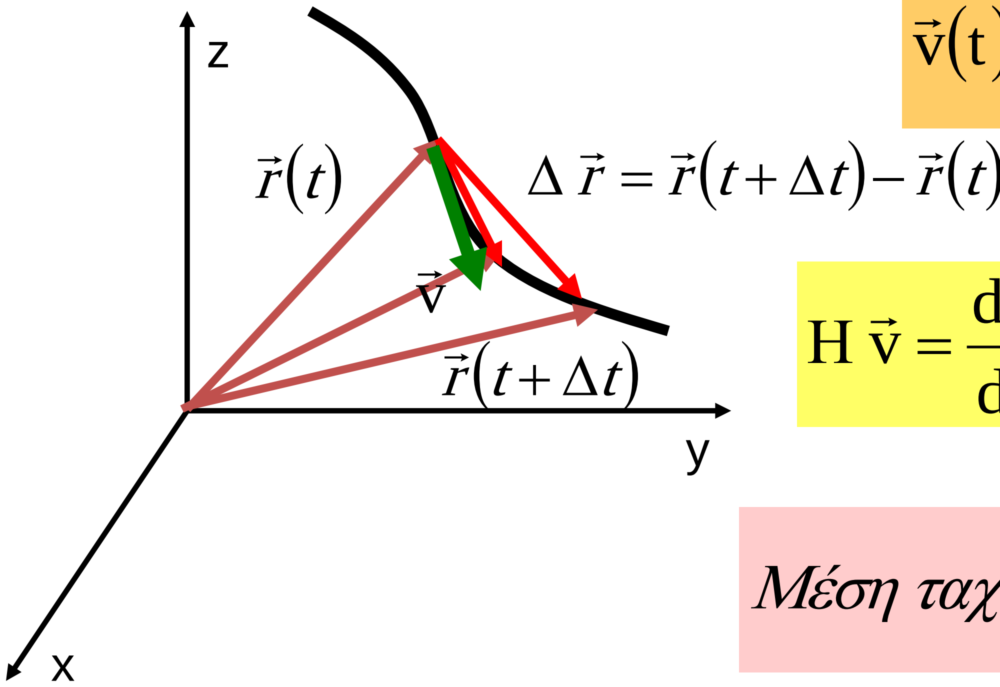
$$2)\ \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}$$

$$3)\ \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (\hat{i} = \hat{x}, \hat{j} = \hat{y}, \hat{k} = \hat{z})$

βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Η $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ **εφάπτεται** στην τροχιά $\vec{r}(t)$

Μέση ταχύτητα στο διάστημα $\Delta t : \dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα την στιγμή $t_1 : \left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=t_1}$

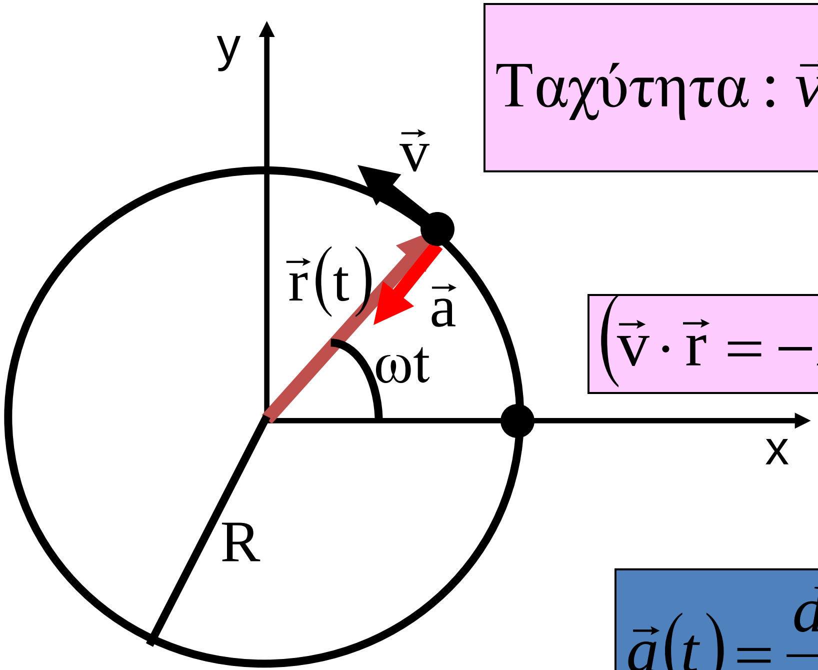
ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Σημείο στην περιφέρεια κυκλικού τροχού $\left(\text{ακτίνας } \mathrm{R}\right)$ που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα ως προς σταθερό άξονα.

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται στον άξονα x για $\mathrm{t}=0$

Διάνυσμα θέσης: $\vec{r}\left(t\right)=\hat{x}R\cos\omega t+\hat{y}R\sin\omega t.$

Ταχύτητα: $\vec{v}\left(t\right)=\dfrac{d\vec{r}\left(t\right)}{dt}=-\hat{x}R\omega\sin\omega t+\hat{y}R\omega\cos\omega t.$



$\mathrm{v}=\sqrt{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}}=\omega\mathrm{R},\quad \vec{\mathrm{v}}\perp\vec{\mathrm{r}}$

$\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{r}}=-R^{2}\omega\sin\omega t\cos\omega t+R^{2}\omega\cos\omega t\sin\omega t=0\right)$

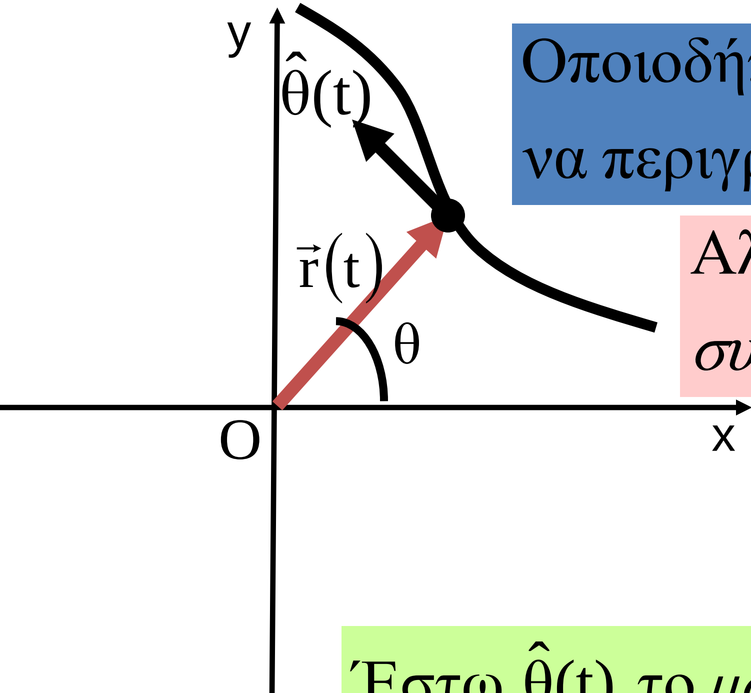
(Κεντρομόλος) Επιτάχυνση:

$$\vec{a}\left(t\right)=\frac{d\vec{v}\left(t\right)}{dt}=-\hat{x}R\omega^{2}\cos\omega t-\hat{y}R\omega^{2}\sin\omega t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{a}\left(t\right)=-\omega^{2}\vec{r}\left(t\right)=-\omega^{2}R\hat{r}\left(t\right)$$

Για το μέτρο έχουμε: $a=\dfrac{v^{2}}{R}=R\omega^{2}.$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Οποιοδήποτε σώμα σε ένα επίπεδο *x-y* μπορεί να περιγραφεί από *καρτεσιανές συντεταγμένες* (x, y).

Αλλιώς, μπορεί να περιγραφεί από τις *πολικές συντεταγμένες* (r, θ), όπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

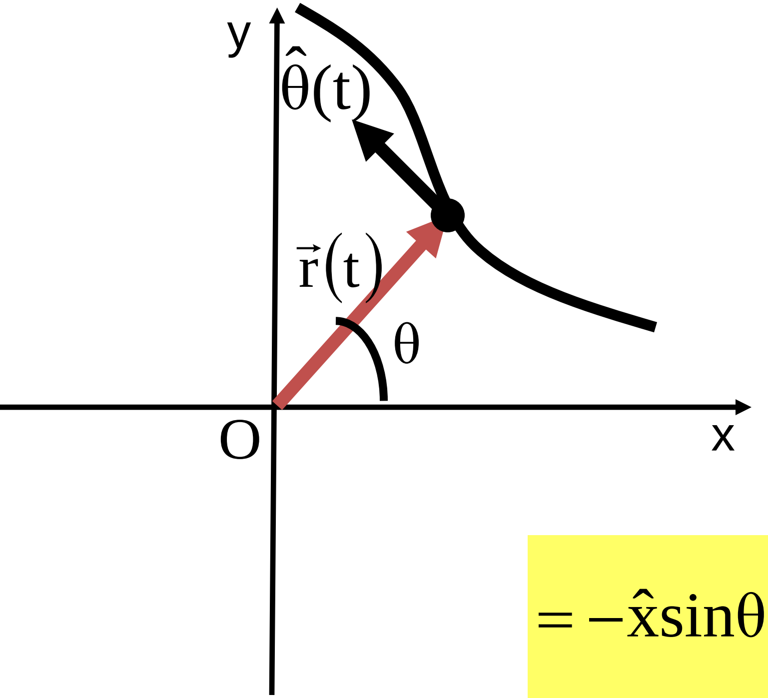
Είναι $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$

Έστω $\hat{\theta}(t)$ το *μοναδιαίο διάνυσμα* που είναι *κάθετο στο* $\hat{r}(t)$ και δείχνει *στην κατεύθυνση που αυξάνεται το θ*.

$$\text{Είναι } \hat{r}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} = \frac{x(t)}{r(t)}\hat{x} + \frac{y(t)}{r(t)}\hat{y} = \hat{x}\cos[\theta(t)] + \hat{y}\sin[\theta(t)].$$

$$\text{Είναι ακόμη}: \hat{\theta}(t) = -\hat{x}\sin[\theta(t)] + \hat{y}\cos[\theta(t)].$$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Είναι $\hat{r}(t) = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$ (1).

και $\hat{\theta}(t) = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$ (2).

Οπότε: $\dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{x}\dfrac{d\cos\theta}{dt} + \hat{y}\dfrac{d\sin\theta}{dt} =$

$= -\hat{x}\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \hat{y}\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow$ $\dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ (3).

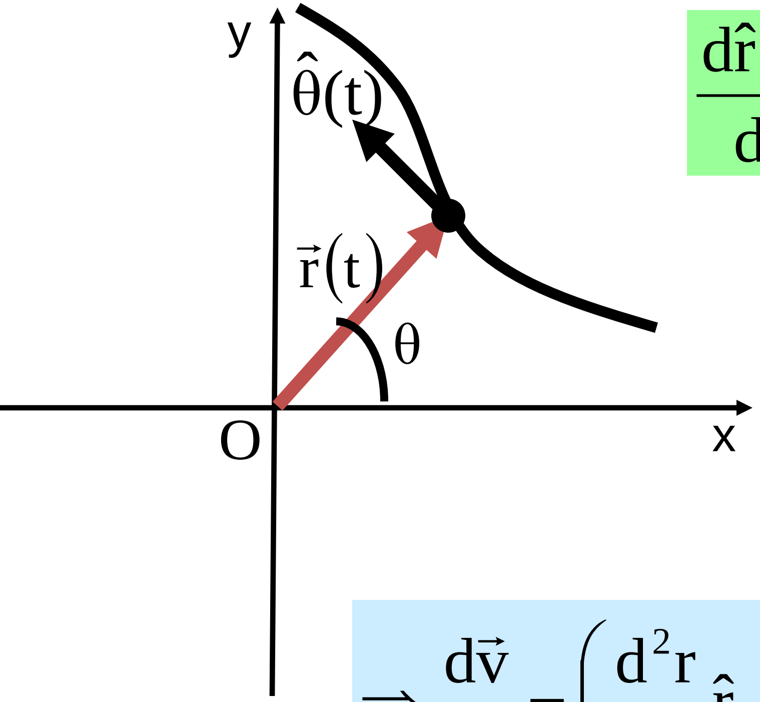
Επομένως: $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[r(t)\hat{r}(t)\right] = \hat{r}(t)\dfrac{dr(t)}{dt} + r(t)\dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow$

και λόγω της (3) βρίσκουμε: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{r} + \left(r\dfrac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}.$ (4)

Ακτινική συνιστώσα

Γωνιακή συνιστώσα

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad (3).$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta} \quad (4)$$

Για την επιτάχυνση $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ έχουμε:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\hat{r} + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right) \quad (5)$$

Όμως: $\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \left(-\hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} \quad (6)$

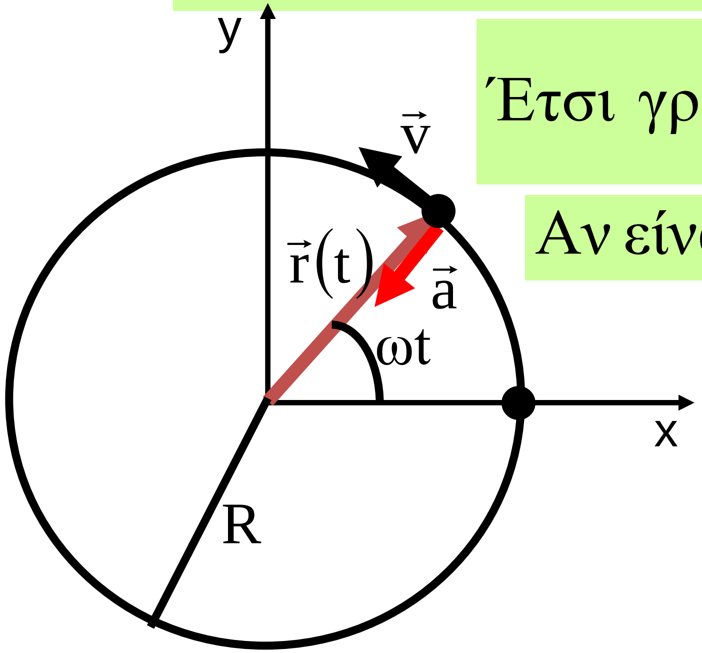
Εισάγοντας την (6) στην (5) παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}. \quad (7)$$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}. \quad (7)$$

Για τις παραγώγους ως προς χρόνο γράφουμε $\frac{df}{dt}=\dot{f}, \frac{d^2f}{dt^2}=\ddot{f}$



Έτσι γράφουμε : $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}. \quad (7')$

Αν είναι $\dot{r}=0$ (δηλαδή έχουμε κυκλική κίνηση) τότε

$$\vec{v}(t)=\frac{dr}{dt}\hat{r}+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}\Rightarrow\vec{v}(t)=\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}=r\dot{\theta}\hat{\theta}.$$

και $\vec{a}(t)=-r\dot{\theta}^2\hat{r}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}.$

Αν επιπλέον είναι $\dot{\theta}=\omega=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$ (ομαλή κυκλική κίνηση) τότε

$$\vec{v}(t)=r\omega\hat{\theta} \text{ και } \vec{a}=-r\omega^2\hat{r}.$$

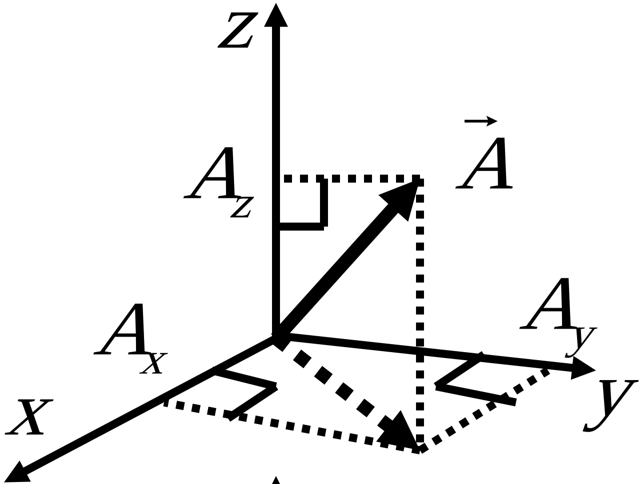
ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ: ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

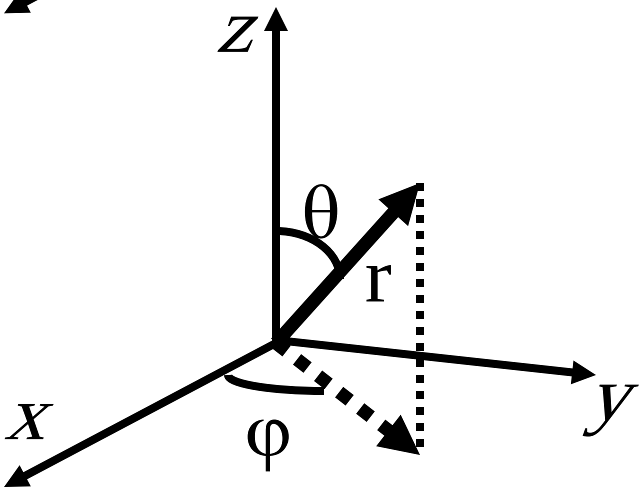
Γιατί μπήκαμε στον "κόπο" να εισάγουμε πολικές συντεταγμένες;

Σε κάποια προβλήματα η χρήση πολικών συντεταγμένων απλοποιούν τις εξισώσεις κίνησης (άρα και την επίλυση τους)

Παράδειγμα είναι η κυκλική κίνηση, η περιγραφή της οποίας σε καρτεσιανές xyz συντεταγμένες εμφανίζει πιο πολύπλοκες εξισώσεις από ότι σε πολικές συντεταγμένες.

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ





Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$$

$$0 \le \varphi < 2\pi,\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

ρ το μέτρο της προβολής στο επίπεδο $x - y$