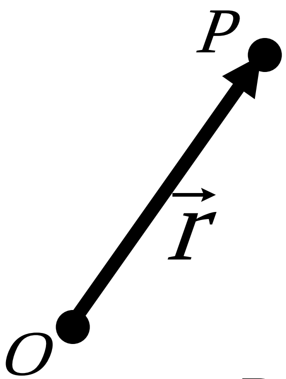
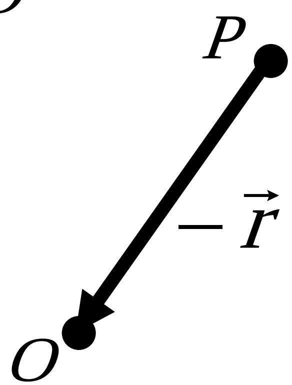
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ





Πολλά φυσικά μεγέθη χαρακτηρίζονται όχι μόνο από κάποια "*ποσότητα*", αλλά και από μία *κατεύθυνση*.

Για την περιγραφή των φυσικών αυτών μεγεθών χρειαζόμαστε *διανύσματα*,

δηλαδή μαθηματικά αντικείμενα με μέτρο (="ποσότητα") και κατεύθυνση.

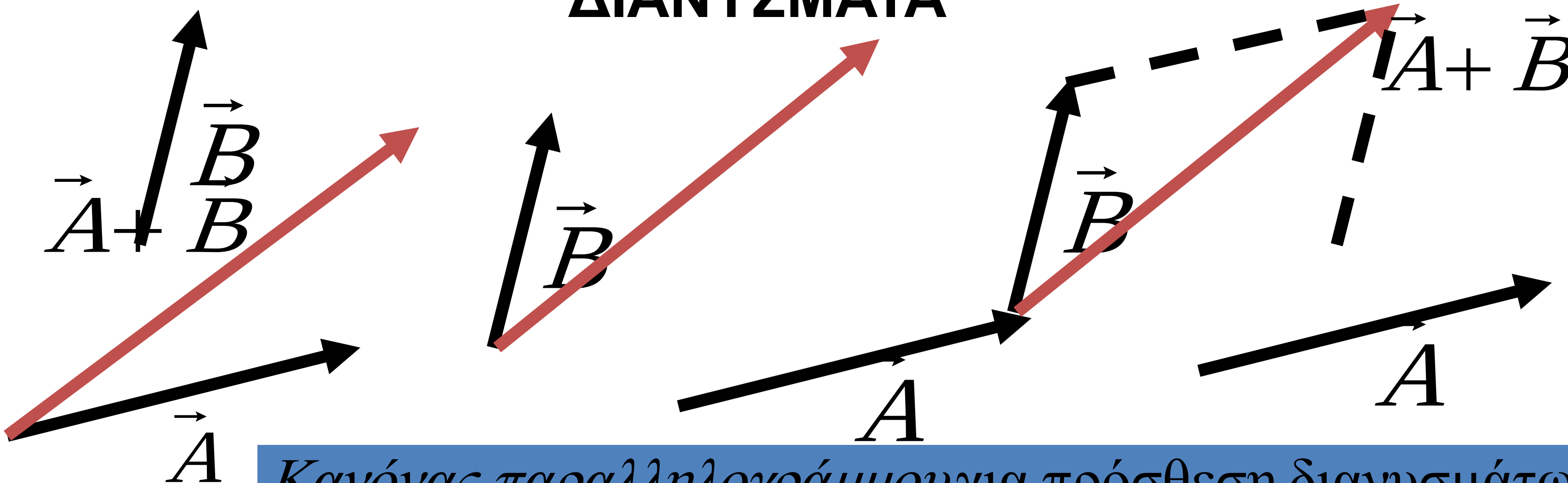
Γράφουμε: $\vec{r} = r\hat{r}$, όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα,

$r\ (\equiv |\vec{r}|)$ το μέτρο του διανύσματος,

$\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα ($|\hat{r}| = 1$) που δηλώνει την κατεύθυνση του $\vec{r}$.

Παραδείγματα διανυσματικών φυσικών μεγεθών: διάνυσμα θέσης, ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρικό πεδίο, κ.ά.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



Κανόνας παραλληλογράμμου για πρόσθεση διανυσμάτων.

Για να ορίσουμε μεγέθη ως διανύσματα απαιτούμε να ισχύει :

1) Η προσεταιριστική ιδιότητα $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

2) Η μεταθετική ιδιότητα $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

3) Ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος ούτως ώστε $k\vec{A}$ να είναι το διάνυσμα με μέτρο $|k|A$ και κατεύθυνση $sign(k)\hat{A}$.

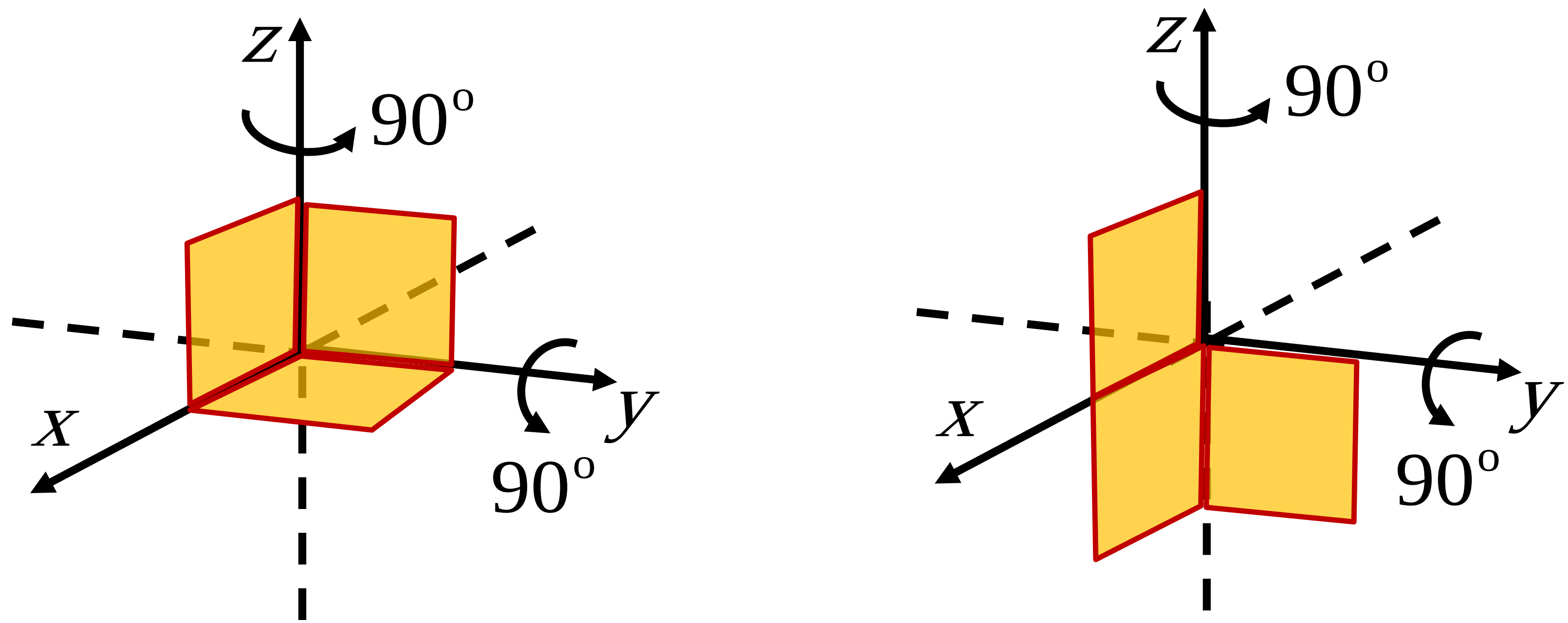
4) Να ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό μέγεθος $k\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=k\vec{A}+k\vec{B}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ: ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

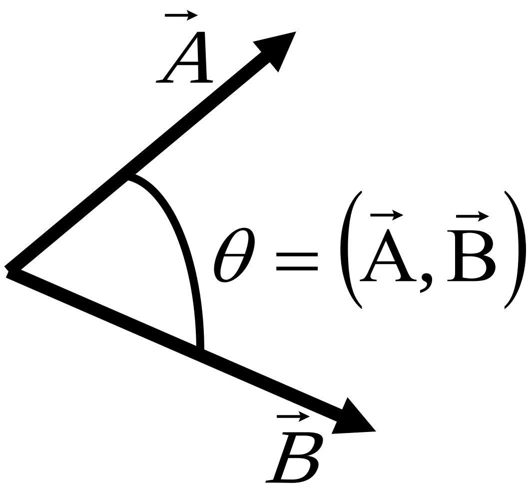
Υπάρχουν μεγέθη που συνδυάζουν "ποσότητα" και κατεύθυνση, ωστόσο δεν συμπεριφέρονται ως διανύσματα.

Οι περιστροφές έχουν την "ποσότητα" της γωνίας περιστροφής και την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής.

Π.χ., για το ζευγάρι "περιστροφή κατά 90^o γύρω από τον z-άξονα" και "περιστροφή κατά 90^o γύρω από τον y-άξονα" παίρνουμε άλλο αποτέλεσμα ανάλογα με το ποια περιστροφή θα εφαρμόσουμε πρώτη.



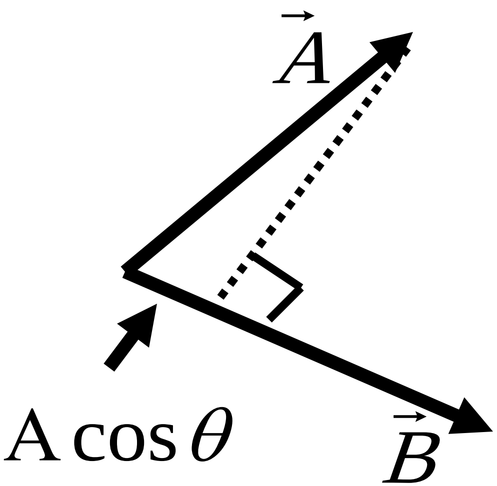
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Ορισμός : Είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB\cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$.

Η προβολή του $\vec{\mathrm{A}}$ πάνω στο $\vec{\mathrm{B}}$ δίνεται από τη σχέση $\mathrm{A}\cos\left(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}\right) = \vec{\mathrm{A}} \cdot \hat{\mathrm{B}}$

Είναι $\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$ για διανύσματα που είναι *κάθετα ή ορθογώνια* μεταξύ τους.

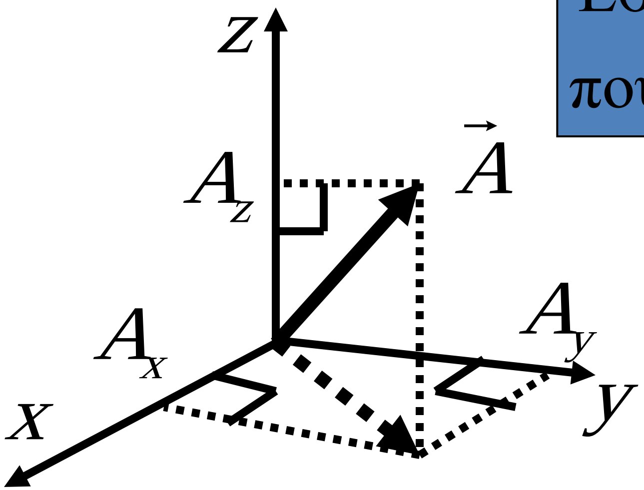


Έχουμε ακόμη ότι αν $\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{A}}$, τότε $\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^2$.

Έχουμε, για παράδειγμα, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$ και $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$

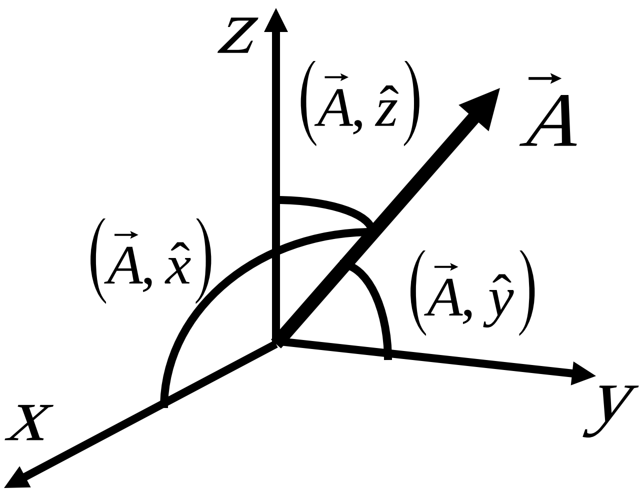
Μπορεί να αποδειχτεί ότι : $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



Έστω ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xyz που ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

Οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{A}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, όπου $A_x = \vec{A}\cdot\hat{x}$, $A_y = \vec{A}\cdot\hat{y}$, $A_z = \vec{A}\cdot\hat{z}$.



Αν $\alpha = (\vec{A}, \hat{x})$, $\beta = (\vec{A}, \hat{y})$, $\gamma = (\vec{A}, \hat{z})$

τότε $\vec{A} = A(\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma)$

Είναι $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

και $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

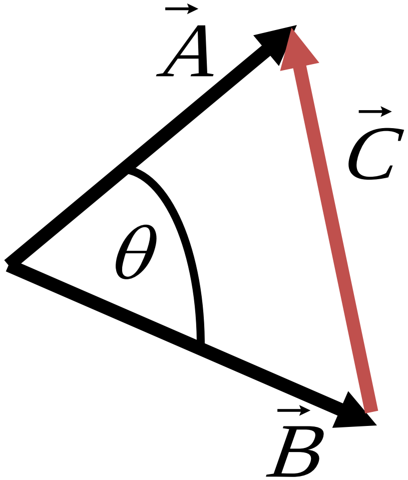
Έστω $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Τότε :

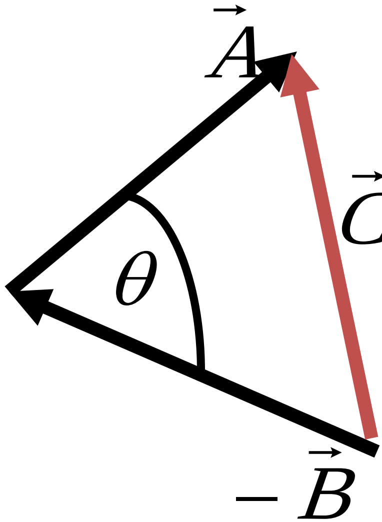
1) $\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ και $a_3 = b_3$

2) $\vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)$

3) $c\vec{A} = (ca_1, ca_2, ca_3)$

ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ





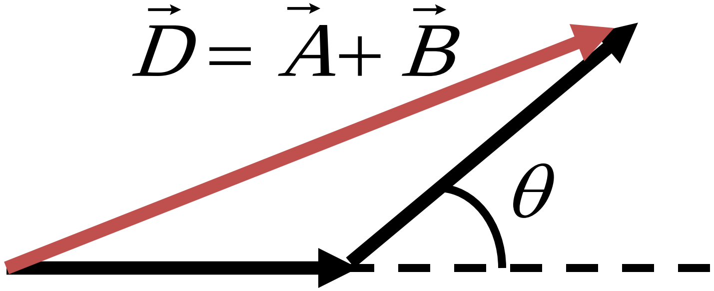
$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

Είναι $\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=\vec{C}\cdot\vec{C}$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}-2\vec{A}\cdot\vec{B}=C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2+B^2-2AB\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)=C^2.$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$$

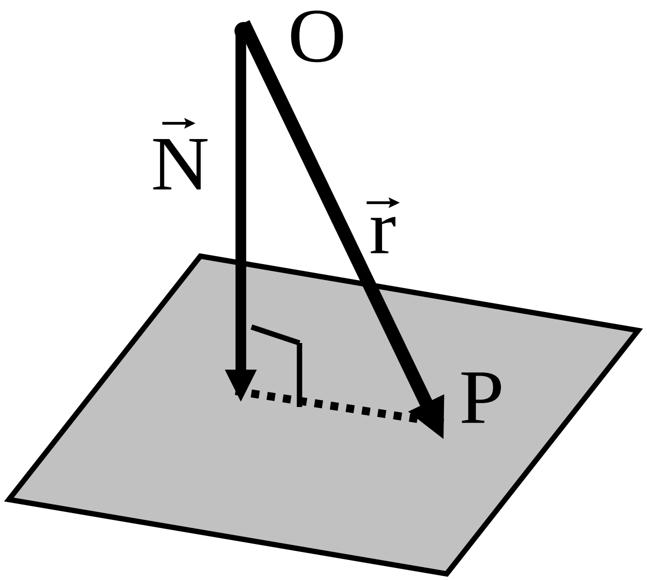


Είναι $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{D}\cdot\vec{D} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{B}=D^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2+B^2+2AB\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)=D^2.$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ



Το κοινό γνώρισμα όλων των σημείων του επιπέδου είναι ότι το αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{r}$ έχει την ίδια προβολή πάνω στο $\vec{N}$:

$$\vec{r}\cdot\vec{N} = N^2$$

Αν $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ και $\vec{N} = N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}$

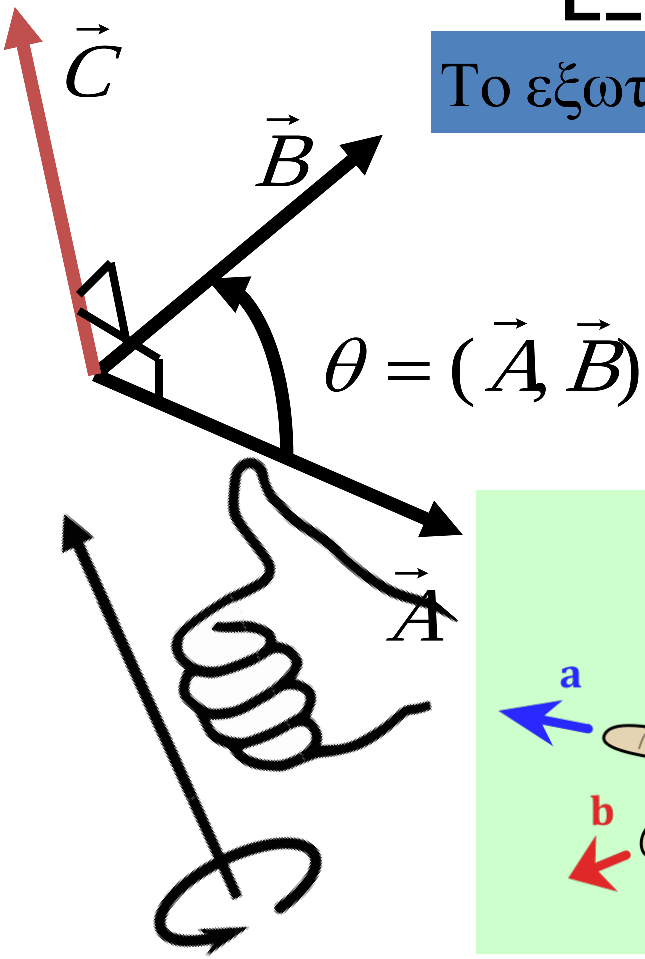
βρίσκουμε

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1$$

που είναι η συνήθης μορφή της εξίσωσης ενός επιπέδου

$$ax + by + cz = 1$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

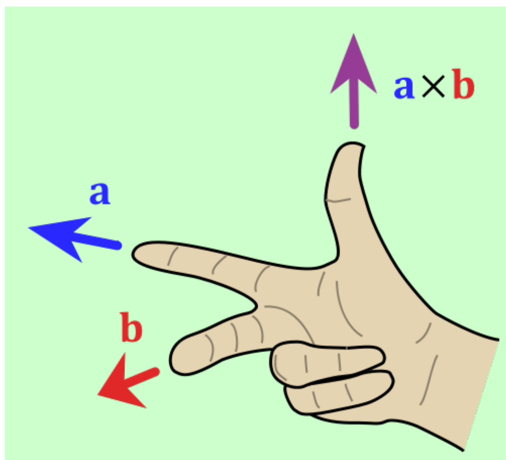


Το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι το *διάνυσμα*:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv AB\left|\sin\left(\vec{A}, \vec{B}\right)\right|\hat{C},$$

όπου $\hat{C}$ ορίζει μία κατεύθυνση ως εξής

1) Φέρνουμε τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σε μία κοινή αρχή.

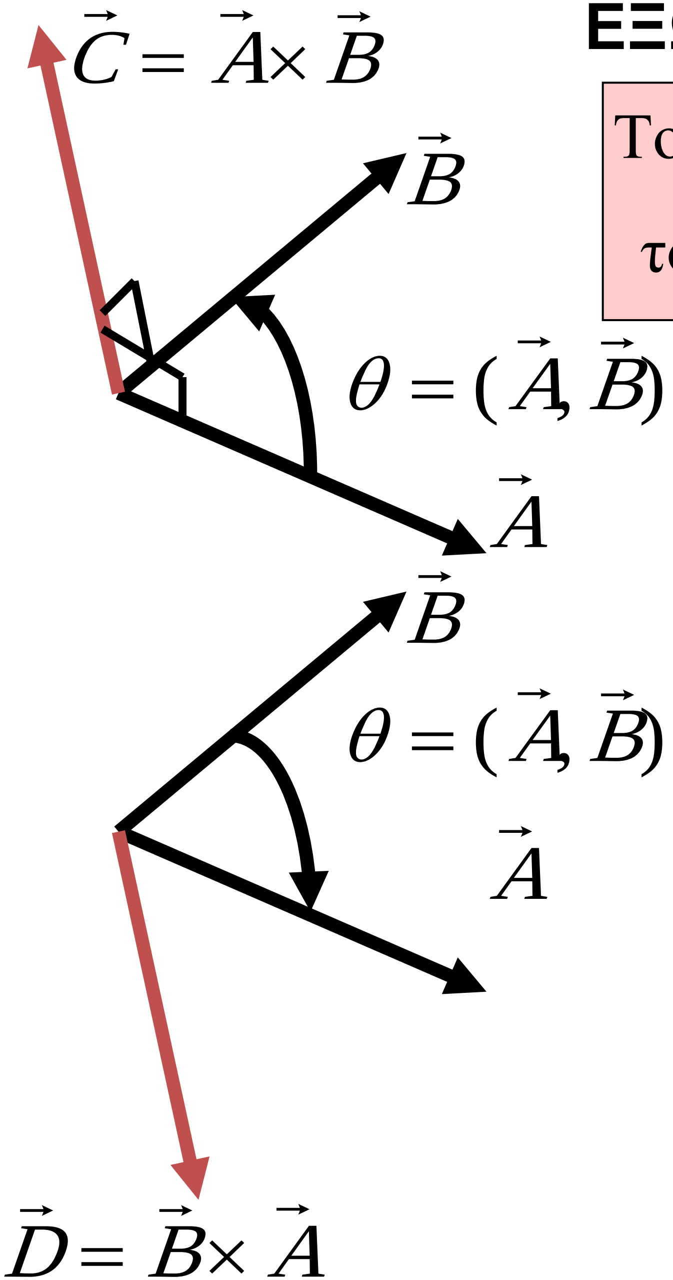


2) Το $\vec{C}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{A}, \vec{B}$.

3) Η κατεύθυνση του $\vec{C}$ προκύπτει από τον αντίχειρα του δεξιού μας χεριού όταν η υπόλοιπη παλάμη "ακολουθεί" την μικρότερη δυνατή γωνία που πρέπει να διαγράψει το $\hat{A}$ για να συμπέσει με το $\hat{B}$.

(κανόνας του **δεξιόστροφου κοχλία**).

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{\mathrm{A}}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ είναι το διάνυσμα : $\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{AB}\left|\sin\left(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}\right)\right|\hat{\mathrm{C}}$.

Είναι :

1) $\vec{\mathrm{B}} \times \vec{\mathrm{A}} = -\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$.

2) $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{A}} = 0$ (αφού $\sin(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{A}}) = 0$)

3) $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = 0, \forall\ \vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}$ με $\vec{\mathrm{A}} \parallel \vec{\mathrm{B}}$.

4) $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ και ίδιες σχέσεις με *κυκλική εναλλαγή* των x, y, z (π.χ. $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$)

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει η *επιμεριστική ιδιότητα*:

$$\vec{\mathrm{A}} \times \left(\vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{C}}\right) = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{C}}. \quad (1)$$

Όπως είδαμε: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ και σχέσεις κυκλικής εναλλαγής των x, y, z.

Οπότε, αν $\vec{\mathrm{A}} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ και $\vec{\mathrm{B}} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$

$$\text{τότε}: \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{x} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{y} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{z} \quad (2)$$

$$\text{ή αλλιώς } \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Για έναν πίνακα 2×2 η ορίζουσα ορίζεται ως $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Για την ορίζουσα του 2×2 πίνακα $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ γράφουμε επίσης

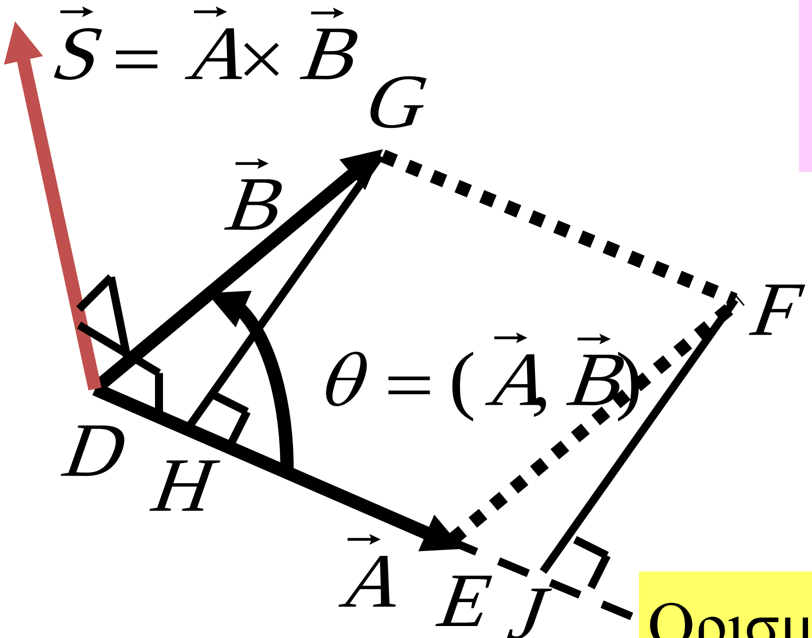
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv \det \mathrm{A} \ (= \text{determinant of } \mathrm{A}).$$

Για έναν πίνακα 3×3 η ορίζουσα ορίζεται ως $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv$

$$\equiv (-1)^{(1+1)} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

και αντίστοιχα για τις ορίζουσες πινάκων μεγαλύτερης διάστασης.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



Το εμβαδό του DEFG είναι ίσο με αυτό του FGHJ και ίσο με $AB\left|\sin\left(\vec{A}, \vec{B}\right)\right|$.

Έχουμε λοιπόν ότι το $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$ μας δίνει το *εμβαδό S του παραλληλογράμμου* που σχηματίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Ορισμός του εμβαδού S ως διάνυσμα $\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι το *μικτό γινόμενο*

$$\left|\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}\right| = V \quad (1),$$

όπου V είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τρία διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

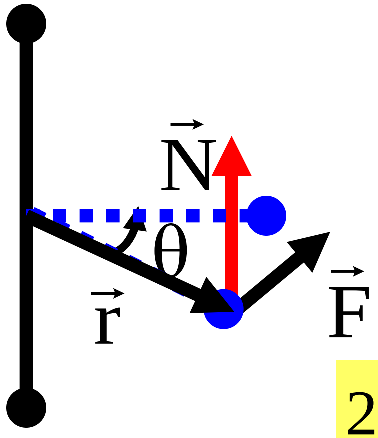
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

$$\text{Είναι}: \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Οπότε, αν } \vec{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z} \quad (2)$$

$$\text{τότε } \vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\left[\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{x} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{y} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{z} \quad (1')\right]$$

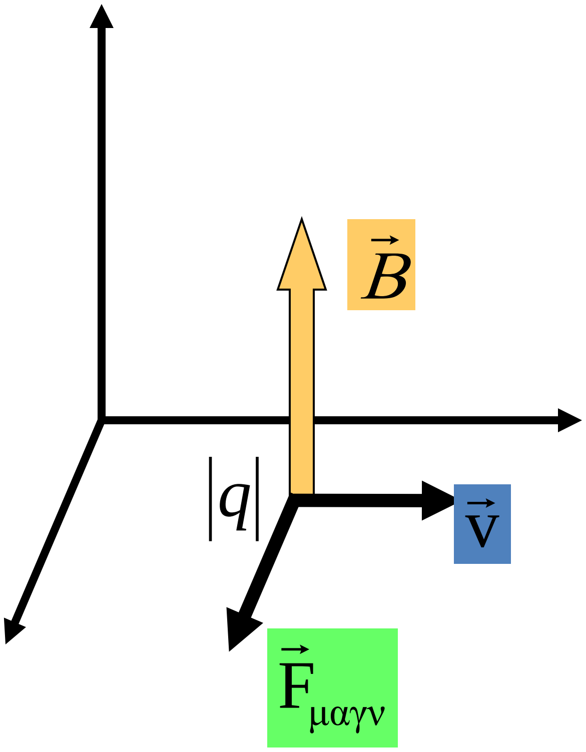


Μεγέθη που ορίζονται ως εξωτερικά γινόμενα:

1) *Ροπή*: $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$

2) *Στροφορμή*: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, όπου $\vec{p} = m\vec{v}$ η ορμή σώματος

ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ



Έστω φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathrm{v}}$ μέσα σε *μαγνητικό πεδίο* έντασης $\vec{\mathrm{B}}$.

Τότε η δύναμη $\vec{\mathrm{F}}_{\mu\alpha\gamma\nu}$ που ασκείται στο q είναι :

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mu\alpha\gamma\nu} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}.$$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A} \quad (1)$$

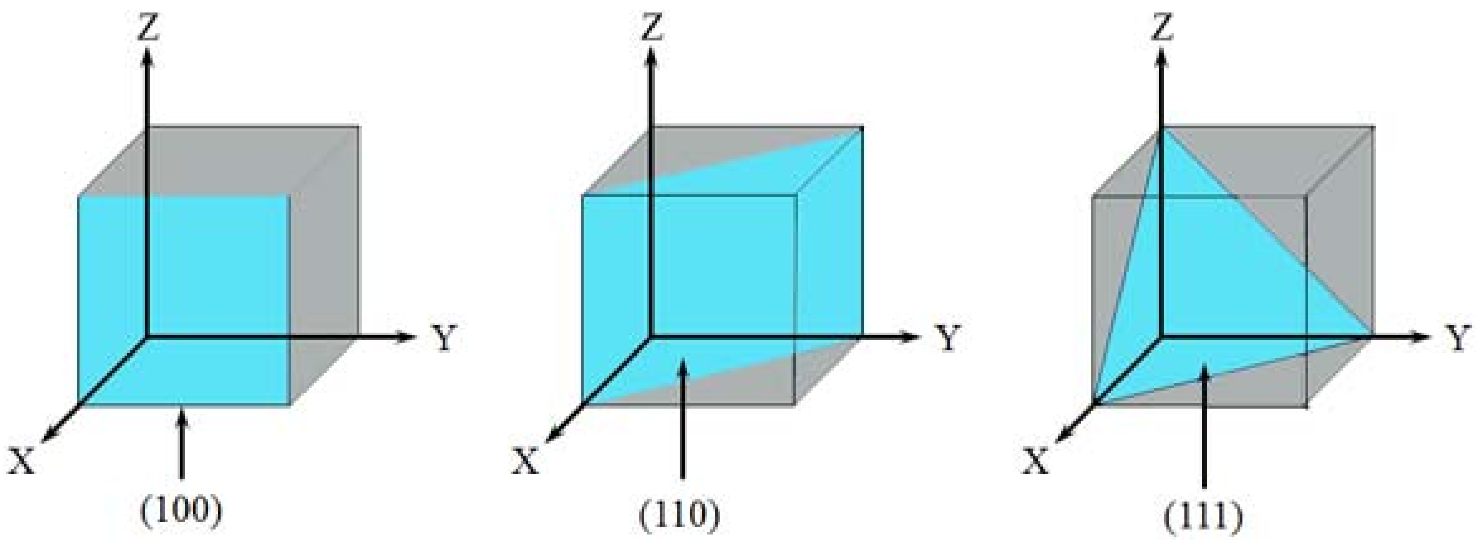
$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \quad (2)$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right) \quad (3)$$

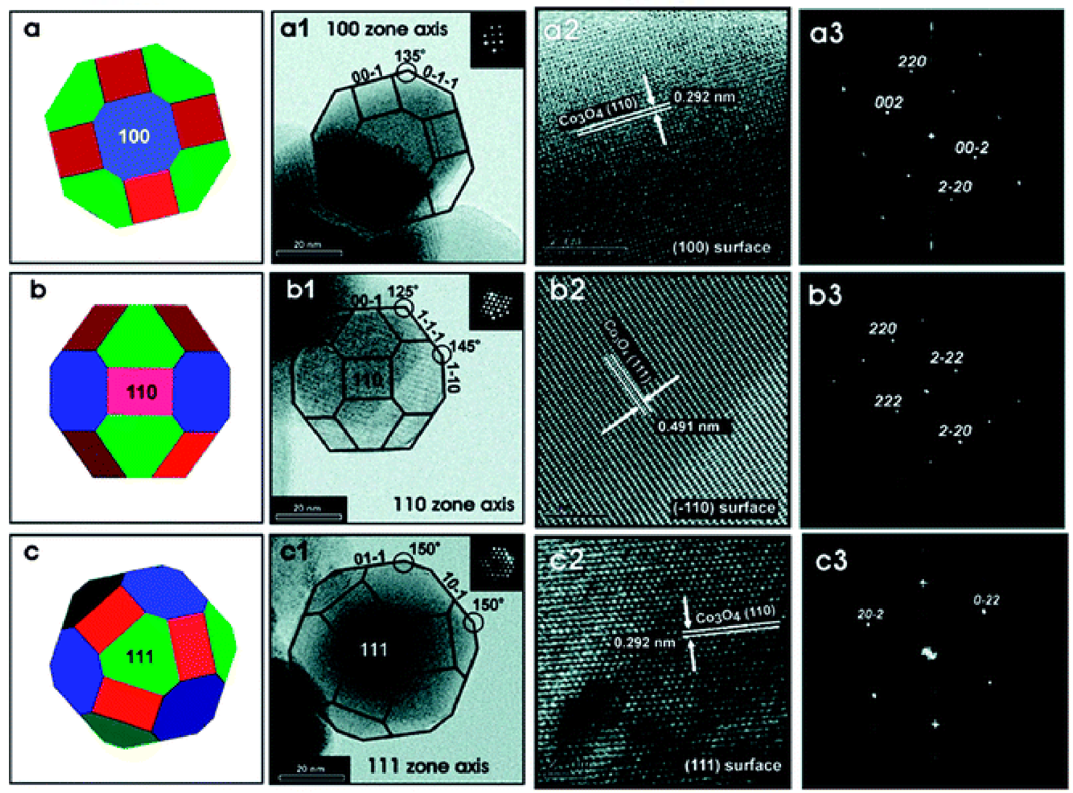
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{D}\right)\right]\vec{C}-\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]\vec{D} \quad (4)$$

$$\vec{A}\times\left[\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]=\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{A}\times\vec{D}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right) \quad (5)$$

ΕΠΙΠΕΔΑ



Σχήμα νανοκρυστάλλων, κατασκευή με το θεώρημα Wulff



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. α) Ποιο είναι το μέτρο του $\vec{A}$; β) Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\vec{A}$ πάνω στο επίπεδο x-y; γ) Κατασκευάστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{B}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{A}$ και να ανήκει στο επίπεδο x-y. δ) Βρείτε το μέτρο της προβολής του $\hat{A}$ στην κατεύθυνση του $\vec{C} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$. ε) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{A} \times \vec{C}$.

ΛΥΣΗ: α) Είναι $A = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

β) Το διάνυσμα που προκύπτει από την προβολή του $\vec{A}$ στο επίπεδο xy είναι το $3\hat{x} + \hat{y}$. Το μέτρο αυτής της προβολής είναι $\sqrt{10}$.

γ) Έστω $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$. Για να είναι $\vec{B} \perp \vec{A}$ πρέπει $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow 3B_x + B_y = 0$

$\Rightarrow B_y = -3B_x$. Είναι λοιπόν $\vec{B} = B_x(\hat{x} - 3\hat{y})$ και $\hat{B} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{x} - 3\hat{y})$.

Έστω $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. α) Ποιο είναι το μέτρο του $\vec{A}$; β) Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\vec{A}$ πάνω στο επίπεδο x-y; γ) Κατασκευάστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{B}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{A}$ και να ανήκει στο επίπεδο x-y. δ) Βρείτε το μέτρο της προβολής του $\hat{A}$ στην κατεύθυνση του $\vec{C} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$. ε) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{A} \times \vec{C}$.

δ) Είναι $C = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ και άρα $\hat{C} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\left(\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}\right)$. Οπότε η προβολή που ζητάμε είναι ίση με $\hat{A} \cdot \hat{C} = \dfrac{1}{14}\left(3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3\right) = \dfrac{11}{14}$.

ε) Είναι $\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2\right) - \hat{y}\left(3 \cdot 3 - 1 \cdot 2\right) + \hat{z}\left(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1\right) =$

$= -\hat{x} - 7\hat{y} + 5\hat{z}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ροπή δύναμης ως προς σημείο. Θεωρούμε μια δύναμη $\vec{F} = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$ (N) που εφαρμόζεται στο σημείο $\vec{r}_A = 7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$ (m). (α) Ποια είναι η ροπή της $\vec{F}$ ως προς την αρχή των συντεταγμένων O; (β) Ποια είναι η ροπή ως προς το σημείο $\vec{r}_{O'} = (0,10,0)$;

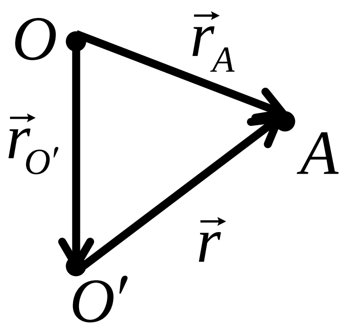
ΛΥΣΗ : (α) Είναι $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F} =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{x}(3\cdot 5 - 1\cdot 1) - \hat{y}[7\cdot 5 - 1\cdot(-3)] + \hat{z}[7\cdot 1 - 3\cdot(-3)] =$$

$$= 14\hat{x} - 38\hat{y} + 16\hat{z}\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ροπή δύναμης ως προς σημείο. Θεωρούμε μια δύναμη $\vec{\mathrm{F}} = -3\hat{\mathrm{x}} + \hat{\mathrm{y}} + 5\hat{\mathrm{z}}$ (N) που εφαρμόζεται στο σημείο $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{A}} = 7\hat{\mathrm{x}} + 3\hat{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{z}}$ (m). (α) Ποια είναι η ροπή της $\vec{\mathrm{F}}$ ως προς την αρχή των συντεταγμένων; (β) Ποια είναι η ροπή ως προς το σημείο (0,10,0);



ΛΥΣΗ : (β) Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{O}'} = \left(7\hat{\mathrm{x}} + 3\hat{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{z}}\right) - 10\hat{\mathrm{y}} = 7\hat{\mathrm{x}} - 7\hat{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{z}}\ (\mathrm{m})\ \text{και}$$

$$\vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{x}} & \hat{\mathrm{y}} & \hat{\mathrm{z}} \\ 7 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\mathrm{x}}\left(-7\cdot 5 - 1\cdot 1\right) - \hat{\mathrm{y}}\left[7\cdot 5 - 1\cdot\left(-3\right)\right] + \hat{\mathrm{z}}\left[7\cdot 1 - \left(-7\right)\cdot\left(-3\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{N}} = -36\hat{\mathrm{x}} - 38\hat{\mathrm{y}} - 14\hat{\mathrm{z}}\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}).$$