ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΣΥΝΟΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

Βαθμωτά Μεγέθη: Είναι μεγέθη που περιγράφονται πλήρως από μια τιμή.

Για παράδειγμα, η μάζα, η πίεση, η θερμοκρασία, κ.ά.

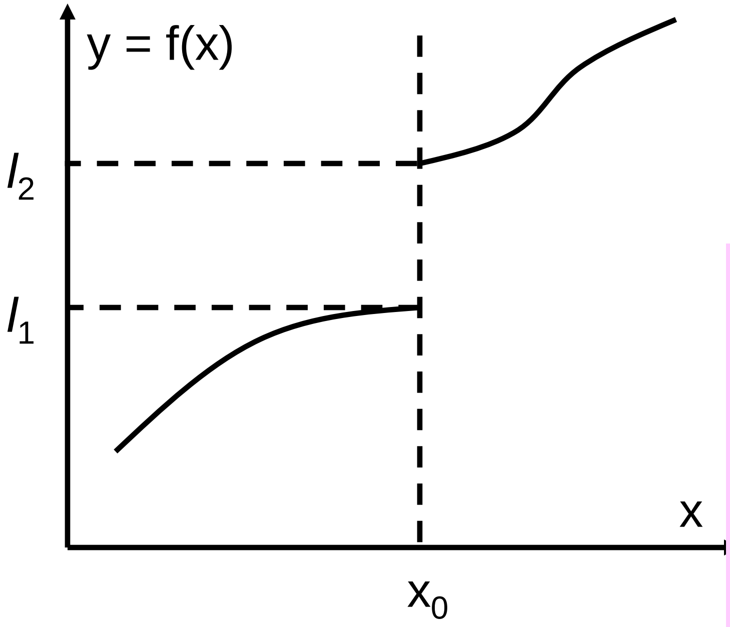
Διανυσματικά ή Ανυσματικά Μεγέθη: Για να περιγραφούν πλήρως πρέπει να δώσουμε πλέον της μιας τιμής.

Για παράδειγμα, σε έναν διδιάστατο χώρο χρειάζονται 2 τιμές, σε έναν τριδιάστατο χώρο 3 τιμές, κ.ο.κ. Τέτοια μεγέθη είναι το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα, η δύναμη, κ.ά.

Τανυστικά Μεγέθη: Είναι μεγέθη που για να περιγραφούν χρειάζεται ένας πίνακας τιμών. Η διάσταση του πίνακα μας δίνει και την διάσταση ή τάξη του τανυστή.

Ελαστικές σταθερές, η αγωγιμότητα, κ.ά. $J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



Ορισμός Συνάρτησης : Μια συνάρτηση ορίζει μια αντιστοιχία από σύνολο τιμών σε ένα άλλο σύνολο τιμών.

Όριο Συνάρτησης : Όταν $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ ούτως ώστε για $0 < |x - x_0| < \delta$ είναι $0 < |f(x) - l| < \varepsilon$, τότε το l καλείται όριο της f στο x_0 $[l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)]$

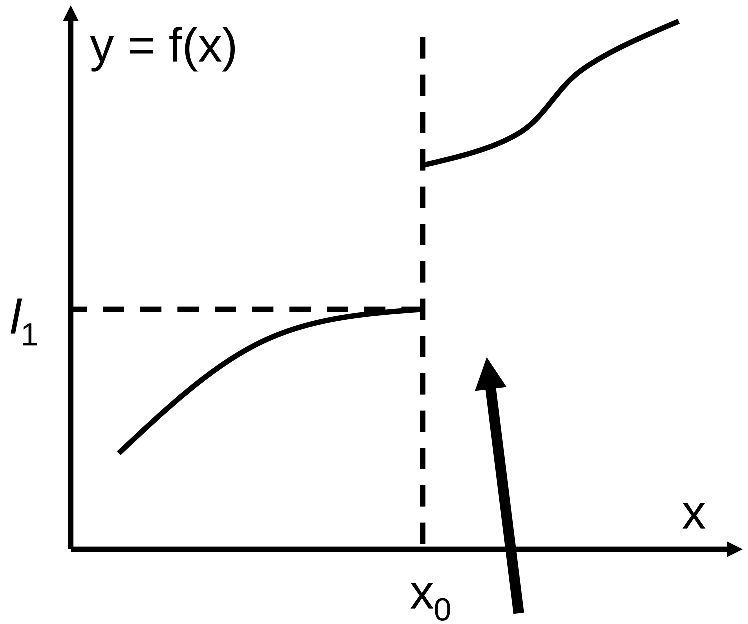
Πλευρικά όρια Συνάρτησης :

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x),\ l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πλευρικά όρια Συνάρτησης :

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x),\ l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



Αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, τότε η f *είναι συνεχής* στο x_0.

Μια συνάρτηση είναι *συνεχής σε ένα διάστημα* όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $x = x_0$, τότε και οι $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0,

ενώ η $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής εφόσον $g(x_0) \neq 0$.

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλα τα ορισμένα διαστήματα : τα πολυώνυμα, $\sin x, \cos x, a^x$ (με $a > 0$).

Η συνεχής συνάρτηση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι μια συνεχής συνάρτηση.

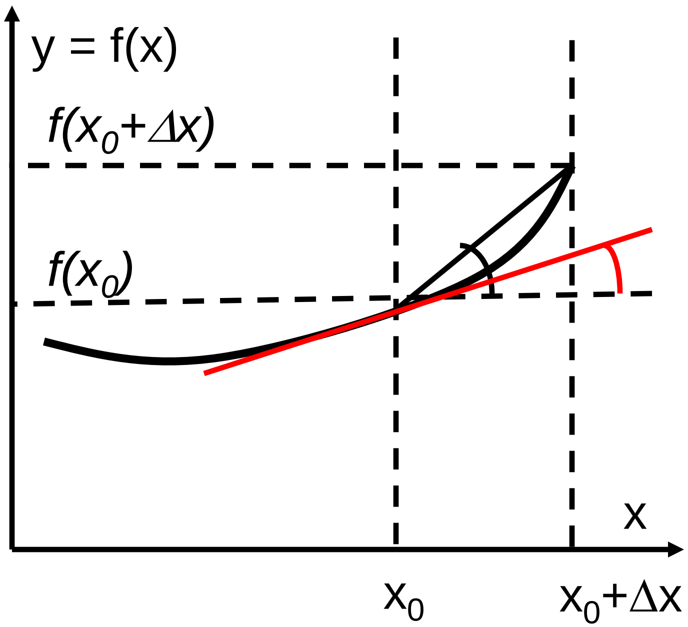
Δηλαδή, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο x_0,

και η $z = g(y)$ είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$,

τότε και η $z = g[f(x)]$ είναι συνεχής στο x_0.

Παράδειγμα : Η $f(x) = 3x^2 + 1$ είναι συνεχής στο 1. Η $g(y) = 1/y$ είναι συνεχής στο y = 4. *Άρα και η* $1/f(x) = 1/(3x^2+1)$ *είναι συνεχής στο* 1.

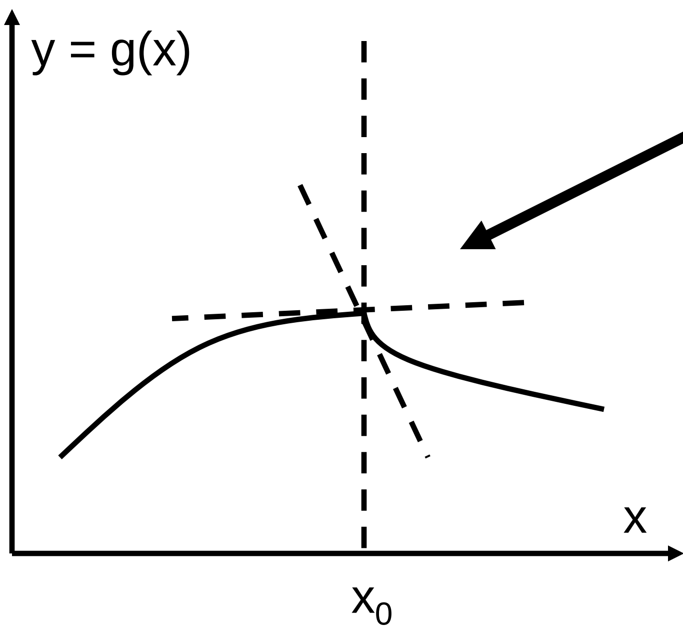
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



Παράγωγος Συνάρτησης:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Όταν η παράγωγος υπάρχει τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι *παραγωγίσιμη* ή *διαφορίσιμη* στο x_0.



Η $g(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αν $f(x)$ είναι διαφορίσιμη, τότε γράφουμε $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$. Η σχέση αυτή ορίζει το *διαφορικό* dy της $y = f(x)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

Η σχέση $dy = f'(x)dx$ ορίζει το διαφορικό $dy \equiv df$ της $y = f(x)$.

Το διαφορικό df δίνει την μεταβολή της $f(x)$ όταν μεταβάλλουμε το όρισμα της συνάρτησης κατά τιμή dx που είναι πολύ μικρή.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

Ποια είναι η μεταβολή Δf της συνάρτησης όταν πηγαίνουμε από το σημείο $x_0 = 1$ στο σημείο $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$;

Για $\Delta x = 1$, είναι $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3$.

Για $\Delta x = \frac{1}{2}$, είναι $\Delta f = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\frac{1}{2} = 2{,}5 \times \frac{1}{2}$.

Για $\Delta x = 1/4$, είναι $\Delta f = (1 + 1/4)^2 - 1 = 9/16 = 2{,}25 \times 1/4$.

$\Delta x = 1/8 \Rightarrow \Delta f = 2{,}125 \times (1/8)$.

$\Delta x = 1/16 \Rightarrow \Delta f = 2{,}062 \times (1/16)$.

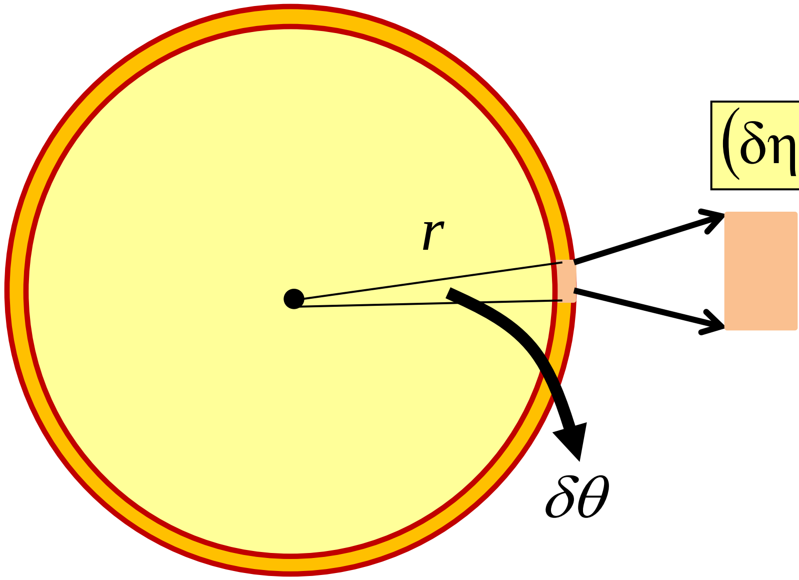
Καθώς το Δx γίνεται ολοένα μικρότερο βρίσκουμε κατά προσέγγιση

$$\Delta f \approx df = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} dx = 2x_0 dx = 2dx.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πόσο αλλάζει το εμβαδό ενός κύκλου αν η ακτίνα μεταβληθεί από r σε $r+\Delta r$, όπου $\Delta r << r$ (δηλαδή το Δr είναι πολύ μικρότερο από το r);

Το μπλε κομμάτι είναι κατά προσέγγιση ορθογώνιο με πλευρές $r\delta\theta$ και Δr.



Αν αθροίσουμε όλα αυτά τα κομμάτια

(δηλαδή ολοκληρώσουμε πάνω στις γωνίες θ)

τότε βρίσκουμε για το εμβαδό ΔS του πορτοκαλί δακτυλιδιού

$$\Delta S = \sum_{\delta\theta}\left(r\delta\theta\Delta r\right) = r\Delta r\sum_{\delta\theta}\left(\delta\theta\right) = 2\pi r\Delta r.$$

Από την άλλη, αν $S(r)$ είναι το εμβαδό κύκλου ακτίνας r τότε έχουμε

$$S(r) = \pi r^2 \Rightarrow dS = \frac{dS}{dr}dr = \left[\frac{d}{dr}\left(\pi r^2\right)\right]dr = 2\pi r dr.$$

Για πολύ μικρά Δr είναι λοιπόν όντως:

$$\Delta S \equiv S(r+\Delta r) - S(r) = 2\pi r\Delta r = dS.$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(c\cdot f)' = c\cdot f', \text{όπου } c \text{ μια σταθερά.}$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'[g(x)]g'(x)$$

Αν $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

Π.χ. αν $f(x) = \sin 2x$ τότε

$$\frac{df}{dx} = (\cos 2x)(2) = 2\cos 2x$$

Π.χ. αν $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ τότε $x = \ln y$

και $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx} = 1/e^x = 1/y$

Αν $x = f(t)$ και $y = g(t)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Αρμονική κίνηση : $x = A\sin\omega t$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t = v(\text{ταχύτητα})$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR

Αν $f'(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη, τότε μπορούμε να ορίσουμε

την "δεύτερη" παράγωγο $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}.$

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι $\frac{d^n y}{dx^n}$ οποιασδήποτε τάξης n.

Αν όλες οι παράγωγοι της $y = f(x)$ είναι συνεχείς και διαφορίσιμες στο διάστημα (a, b),

τότε $\exists \xi$ με $x \le \xi \le x_0$ ώστε για τα δύο σημεία x και x_0 του (a, b) έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, τότε έχουμε την σειρά Taylor.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR

Αν $f'(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη, τότε μπορούμε να ορίσουμε

την "δεύτερη" παράγωγο $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \equiv \dfrac{d^2 y}{dx^2}.$

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ οποιασδήποτε τάξης n.

Αν όλες οι παράγωγοι της $y = f(x)$ είναι συνεχείς και διαφορίσιμες στο διάστημα (a, b),

τότε $\exists \xi$ με $x \le \xi \le x_0$ ώστε για τα δύο σημεία x και x_0 του (a, b) έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, τότε έχουμε την σειρά Taylor.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Είναι $\dfrac{d^n e^x}{dx^n} = e^x \;\forall n.$

Οπότε $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$

Έχουμε : $\dfrac{d \sin x}{dx} = \cos x$ και $\dfrac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

και για $x_0 = 0$ είναι $\sin x_0 = 0, \cos x_0 = 1$

Άρα $\sin x = \cancel{\sin x_0} + (x - x_0)\cos x_0 - \cancel{\dfrac{(x - x_0)^2}{2}\sin x_0} - \dfrac{(x - x_0)^3}{6}\cos x_0 + \ldots$

Επομένως : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

και $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Για πολύ μικρές διαφορές $|x - x_0|$,

συγκεκριμένα για $|x - x_0| << |2 f'(x_0) / f''(x_0)|$

είναι $\left| \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 \right| << \left| \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) \right|$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Αν θέλουμε μπορούμε να κρατήσουμε ψηλότερους όρους

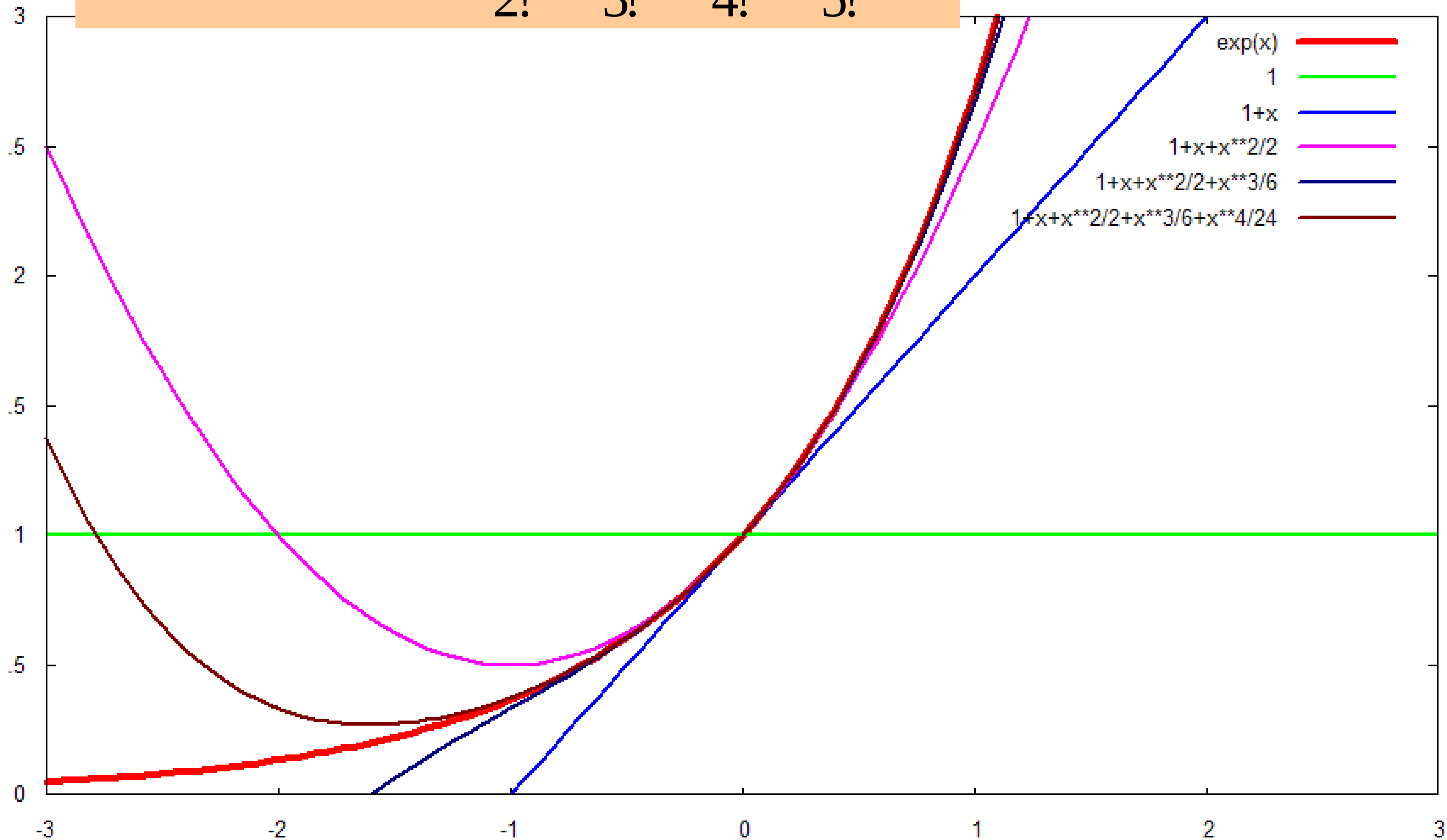
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Το ανάπτυγμα Taylor μας δίνει **προσεγγίσεις** για τις οποίες μπορούμε να **εκτιμήσουμε το σφάλμα**.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

$$f(x)= f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\ldots$$

Οπότε $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$



$$e^x = 1$$

$x = 1$

Όρος		Προσέγγιση
0		1

$x = 1/2$

Όρος		Προσέγγιση
0		1

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Είναι $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x \ \forall n.$

Οπότε $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots$

Έχουμε $\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta}$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right)$$

Είναι όμως : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ και $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Οπότε : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Θα βρούμε το ανάπτυγμα της $f(x) = \sqrt{1 - x}$ γύρω από το $x_0 = 0$.

Είναι: $f(x_0) = 1, \dfrac{df}{dx} = -\dfrac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}, \dfrac{d^2 f}{dx^2} = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1)(1 - x)^{-3/2}.$

Επομένως: $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}, f''(x_0) = -\dfrac{1}{4}$, κ.ό.κ.

Έτσι βρίσκουμε από τον γενικό τύπο: $\sqrt{1 - x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \ldots$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Το ανάπτυγμα της $g(y) = (y-1)^3$ γύρω από το $y_0 = 0$:

$$\frac{dg}{dy} = 3(y-1)^2, \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=0} = 3, \frac{d^2 g}{dy^2} = 6(y-1), \left.\frac{d^2 g}{dy^2}\right|_{y=0} = -6, \frac{d^3 g}{dy^3} = 6, \frac{d^n g}{dy^n} = 0 \ \forall n > 3.$$

$$\text{Άρα}: g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2}y^2 + \frac{g'''(0)}{6}y^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1.$$

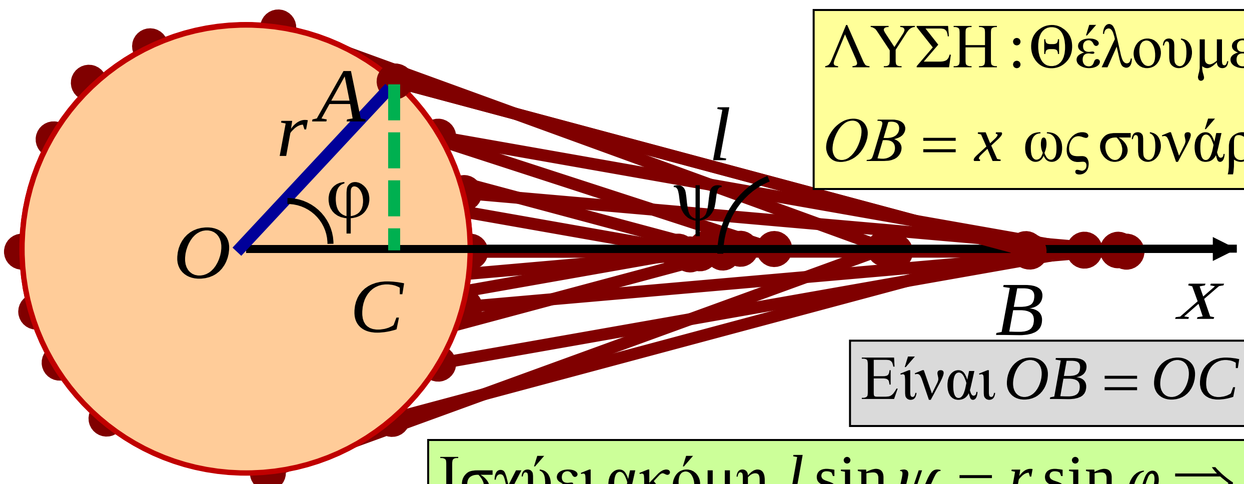
Το ανάπτυγμα της $z(w) = 1 + 3w + 3w^2 + w^3$ γύρω από το $w_0 = -1$:

$$\frac{dz}{dw} = 3 + 6w + 3w^2, z'(-1) = 0, \frac{d^2 z}{dw^2} = 6 + 6w, z''(-1) = 0, \frac{d^3 z}{dw^3} = 6, \frac{d^n z}{dw^n} = 0 \ \forall n > 3.$$

$$\text{Άρα}: z(w) = z(-1) + z'(-1)(w+1) + \frac{z''(-1)}{2}(w+1)^2 + \frac{z'''(-1)}{6}(w+1)^3 = (w+1)^3.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δοκός AB σταθερού μήκους l έχει το ένα της άκρο A περασμένο σε κυκλική στεφάνη ακτίνας r και το άλλο άκρο B σε ευθύ άξονα που περνάει από το κέντρο O της στεφάνης. Αν το άκρο A περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, βρείτε την απόσταση του άκρου B από το O ως συνάρτηση του χρόνου. Δείξτε ότι αν ο λόγος $\lambda = r/l$ είναι πολύ μικρότερος της μονάδας τότε η κίνηση του B είναι κατά προσέγγιση απλή αρμονική ταλάντωση.



ΛΥΣΗ: Θέλουμε να εκφράσουμε το μήκος $OB = x$ ως συνάρτηση του χρόνου t.

Είναι $OB = OC + BC = r\cos\varphi + l\cos\psi$

Ισχύει ακόμη $l\sin\psi = r\sin\varphi \Rightarrow \sin\psi = \lambda\sin\varphi$.

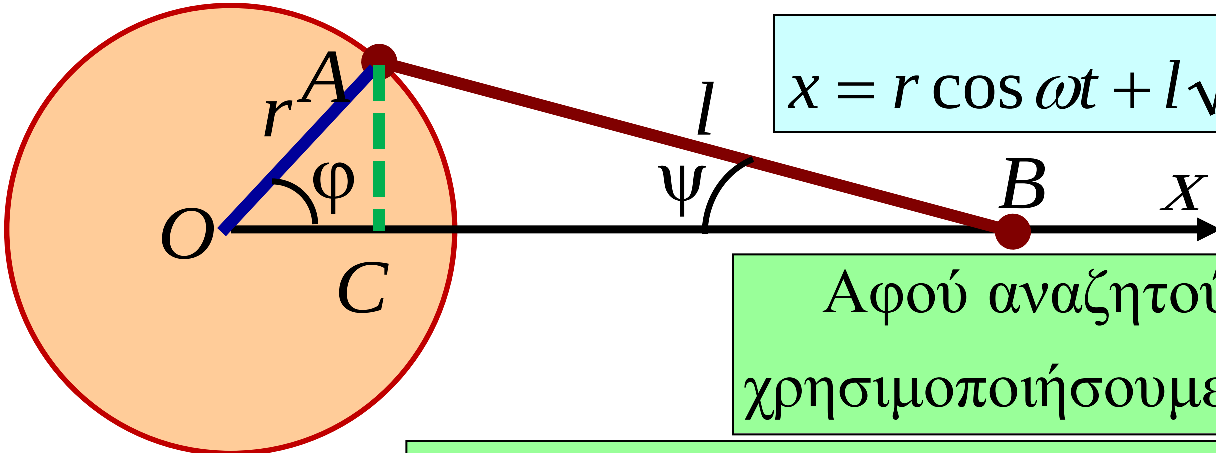
Επομένως: $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$

Είναι όμως $\varphi = \omega t$

και για την απόσταση x βρίσκουμε $x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δείξτε ότι αν ο λόγος $\lambda = r/l$ είναι πολύ μικρότερος της μονάδας τότε η κίνηση του Β είναι κατά προσέγγιση απλή αρμονική ταλάντωση.



$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}$$

Αφού αναζητούμε προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Είναι $\sqrt{1-a} = 1 - \dfrac{a}{2} + \ldots$

άρα $x \approx r\cos\omega t + l\left(1 - \dfrac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t\right)$

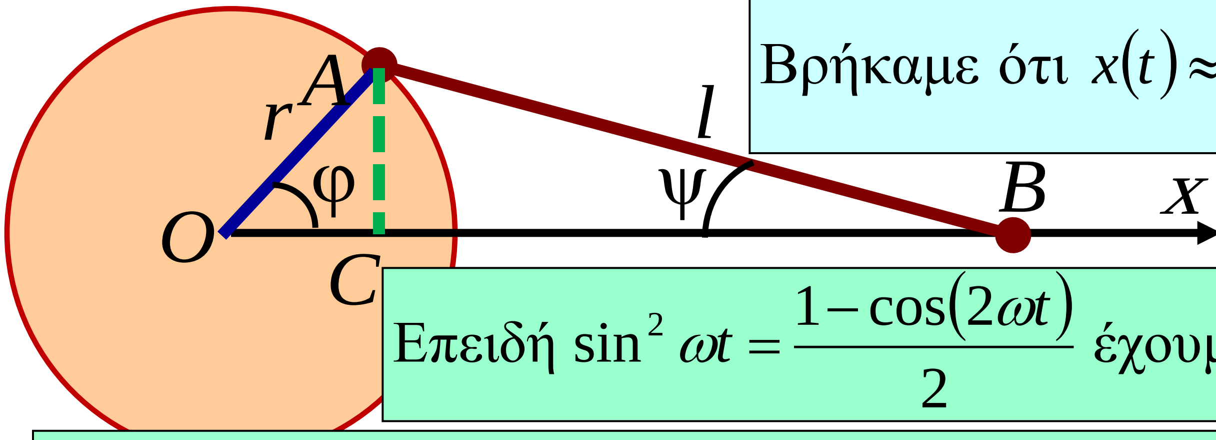
$\Rightarrow x \approx r\cos\omega t + l$

που περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση

πλάτους r γύρω από το σημείο $x = l$ με περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δείξτε ότι αν ο λόγος $\lambda = r/l$ είναι πολύ μικρότερος της μονάδας τότε η κίνηση του B είναι κατά προσέγγιση απλή αρμονική ταλάντωση.



Βρήκαμε ότι $x(t) \approx r\cos\omega t + l\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \omega t\right)$.

Επειδή $\sin^2 \omega t = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$ έχουμε σε "ανώτερη" προσέγγιση

$$x(t) \approx r\cos\omega t + l\left[1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right] = l\,\frac{4-\lambda^2}{4} + r\cos(\omega t) + \frac{l\lambda^2}{4}\cos(2\omega t) \ (1).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην ανώτερη αυτή προσέγγιση η κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως σύνθεση (επαλληλία) δύο ταλαντώσεων:

1) Αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω και πλάτος r,

2) αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα 2ω και πλάτος $\frac{l\lambda^2}{4} << r$.

ΚΑΝΟΝΕΣ L' HOPITAL

Έστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B.$

Αν $A = B = 0$, ή $A = B = \infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

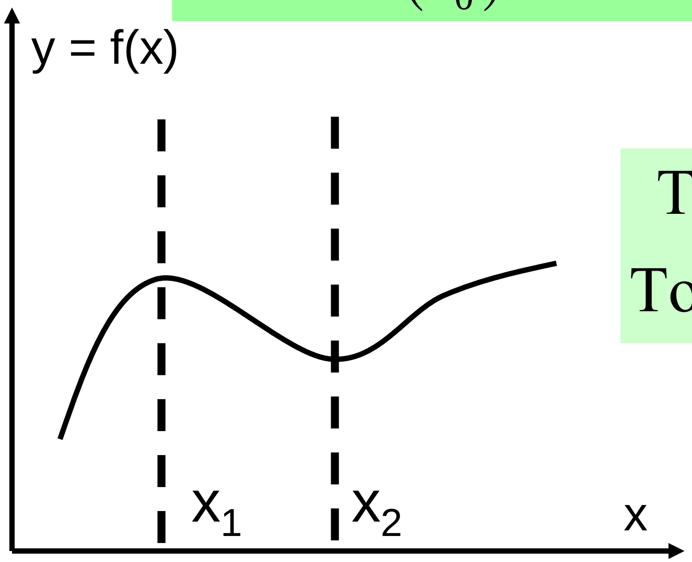
ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(2p)}(x_0) \neq 0$

για κάποιον θετικό ακέραιο p, τότε

Αν $f^{(2p)}(x_0) < 0$ τότε η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Αν $f^{(2p)}(x_0) > 0$ τότε η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.



Τοπικό μέγιστο στο x_1 : $f'(x_1) = 0,\ f''(x_1) < 0.$

Τοπικό ελάχιστο στο x_2 : $f'(x_2) = 0,\ f''(x_2) > 0.$