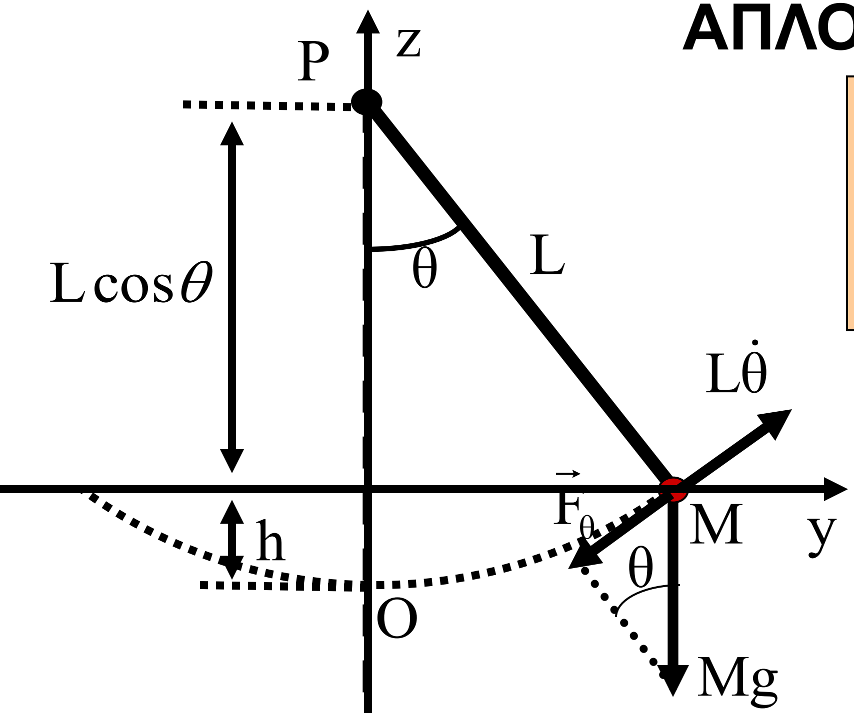
ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς μπορεί να προκύψει από την ροπή που ασκείται στην μάζα Μ και την σχετική στροφορμή.

Έστω ότι το εκκρεμές ταλαντώνεται στο επίπεδο yz. Τότε για την ροπή βρίσκουμε

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N_x = -LMg \sin\theta \ \ (1).$$

Για την στροφορμή έχουμε

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_x = ML^2\dot{\theta} \ \ (2).$$

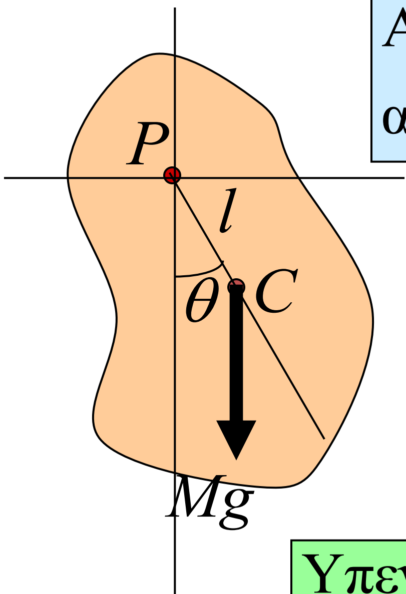
Είναι όμως $N_x = \dfrac{dL_x}{dt}$ και από τις (7) και (8) βρίσκουμε :

$$-LMg \sin\theta = ML^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \ \ (3).$$

Η εξίσωση (3) είναι η εξίσωση του απλού εκκρεμούς.

ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Στερεό σώμα μάζας M μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο του P. Αν C είναι το κέντρο μάζας, τότε το σώμα ισορροπεί όταν η ευθεία PC συμπίπτει με την κατακόρυφο. Τι θα συμβεί αν εκτρέψουμε το σώμα κατά γωνία θ;



Αν I_c και I_P είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τα C και P, αντίστοιχα, τότε από το θεώρημα παράλληλων αξόνων είναι

$I_P = I_c + Ml^2$ (1), όπου l η απόσταση του C από το P.

Η στροφορμή ως προς τον άξονα που περνάει από το P είναι

$$L = I_P\omega = \left(I_c + Ml^2\right)\frac{d\theta}{dt} \quad (2).$$

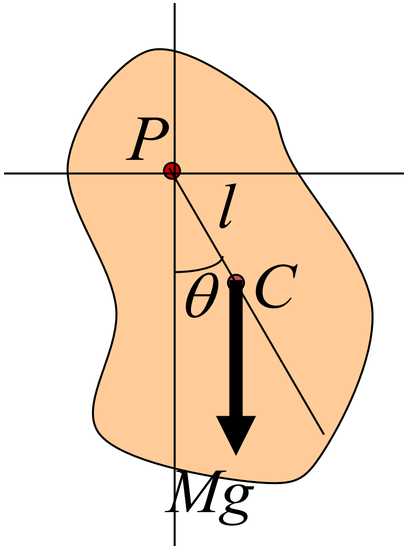
Υπενθύμιση : Έχουμε δείξει ότι η ολική ροπή ως προς P είναι $\vec{N}_P = M\vec{R}_P \times \vec{g}$, όπου $\vec{R}_P$ το διάνυσμα θέσης του C ως προς P.

Η ροπή που ασκείται στο C είναι $N_P = -Mgl\sin\theta$ (3).

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης δίνει

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow \left(I_c + Ml^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgl\sin\theta = 0 \quad (4).$$

ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



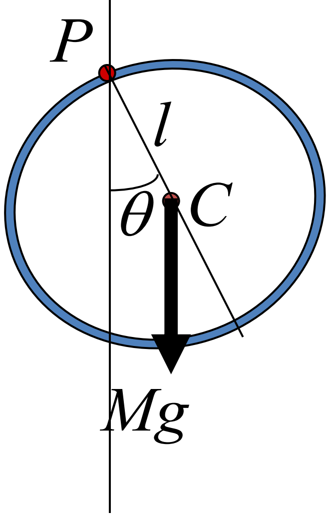
$$\overbrace{\left(I_c + Ml^2\right)}^{I_P}\frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgl\sin\theta = 0 \quad (4).$$

Για μικρές γωνίες εκτροπής είναι $\sin\theta \approx \theta$ και η (4) δίνει

$$\left(I_c + Ml^2\right)\ddot{\theta} + Mgl\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\frac{1}{1+I_c/Ml^2}\theta = 0 \quad (5).$$

Η (5) είναι η διαφορική εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

με συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{Mgl}{I_P}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}\dfrac{1}{1+I_c/Ml^2}} = \sqrt{\dfrac{g}{l_0}} \quad \left[l_0 = l(1+I_c/Ml^2)\right](6).$



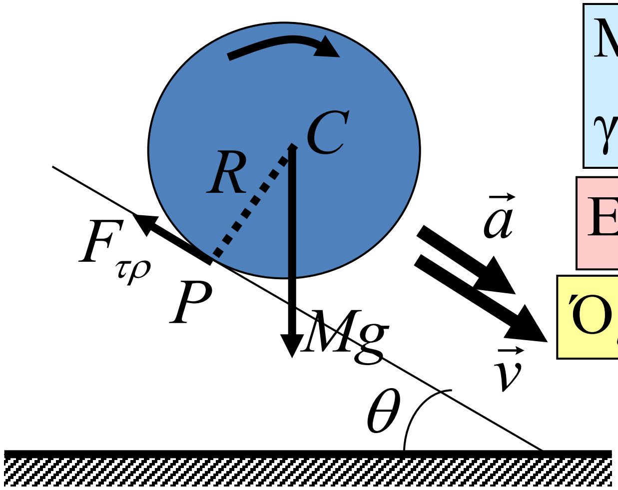
Παράδειγμα : Αν αναρτήσουμε λεπτό δακτύλιο ακτίνας r από κάποιο σημείο του τότε για την σχέση (6) έχουμε τα εξής :

$l = r,\ I_c = Mr^2$ και άρα βρίσκουμε

συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}\dfrac{1}{1+Mr^2/Mr^2}} = \sqrt{\dfrac{g}{2r}} \quad (7).$

ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση στερεού σώματος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Υποθέτουμε ότι το σώμα έχει κυκλική συμμετρία με ακτίνα R και ροπή αδράνειας I ως προς το κέντρο του.



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κέντρο μάζας C για τον υπολογισμό δυνάμεων και ροπών.

Είναι $Ma = Mg\sin\theta - F_{\tau\rho}$ (1) και $F_{\tau\rho}R = I\, d\omega/dt$ (2).

Όμως $\omega R = v \Rightarrow \dot{\omega} = a/R$ (3).

Οι (1), (2) και (3) δίνουν

$$Ma = Mg\sin\theta - Ia/R^2 \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + I/MR^2} \quad (4).$$

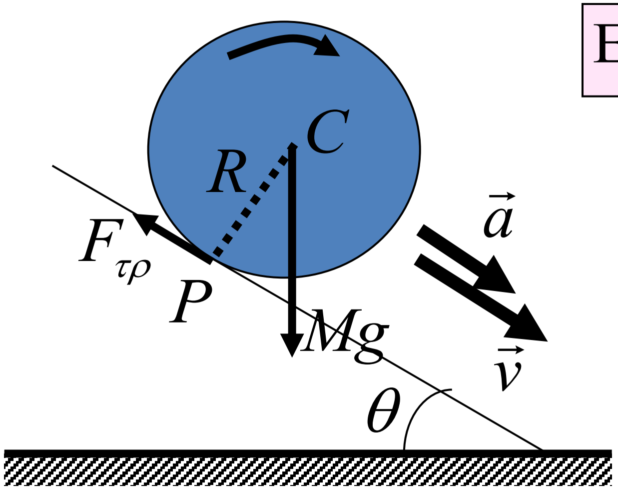
$$\text{Είναι ακόμη } F_{\tau\rho} = M(g\sin\theta - a) = Mg\sin\theta\left(1 - \frac{1}{1 + I/MR^2}\right) = \frac{Mg\sin\theta}{1 + MR^2/I} \quad (5).$$

Όμως πρέπει $F_{\tau\rho} \le \mu N = \mu Mg\cos\theta$.

$$\text{Τι συμβαίνει όταν } \frac{Mg\sin\theta}{1 + MR^2/I} \ge \mu N \Leftrightarrow \mu \le \frac{\tan\theta}{1 + MR^2/I};$$

ΚΥΛΙΣΗ ΜΕ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Τι συμβαίνει όταν δεν πληρούνται οι συνθήκες για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση;



Είναι $Ma = Mg\sin\theta - F_{\tau\rho}$ (1) και $F_{\tau\rho}R = I\, d\omega/dt$ (2).

Όταν $\dfrac{Mg\sin\theta}{1+MR^2/I} \geq \mu N \Leftrightarrow \mu \leq \dfrac{\tan\theta}{1+MR^2/I}$ έχουμε

κύλιση με ολίσθηση και δεν ισχύει πλέον η σχέση $\omega R = v$ (3).

Σε αυτή την περίπτωση είναι $F_{\tau\rho} = \mu N = \mu Mg\cos\theta$

και η (1) δίνει $a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta = g\cos\theta(\tan\theta - \mu)(4)$.

Από την (2) βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\mu MgR\cos\theta}{I}$.

Είναι όμως $\mu \leq \dfrac{\tan\theta}{1+MR^2/I} \Rightarrow \mu + \mu\dfrac{MR^2}{I} \leq \tan\theta \Rightarrow \mu\dfrac{MR^2}{I} \leq \tan\theta - \mu$.

Ισχύει λοιπόν $\dot{\omega}R = \dfrac{\mu MgR^2\cos\theta}{I} = g\cos\theta\dfrac{\mu MR^2}{I} \leq g\cos\theta(\tan\theta - \mu) = a$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΜΗ-ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ

Λεπτή ράβδος μήκους l και μάζας m έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) που δίνεται από τη σχέση $\lambda(x)=\frac{2m}{3l}\left(1+\frac{x}{l}\right)$, όπου x η απόσταση από το ένα της άκρο Ο. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστραφεί γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το Ο. (α) Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου, καθώς και τη ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα περιστροφής.

(α) Η ολική μάζα της ράβδου είναι $M=\int_0^l \lambda(x)dx=\frac{2m}{3l}\int_0^l\left(1+\frac{x}{l}\right)dx=\frac{2m}{3l}\left(l+\frac{l^2}{2l}\right)=m.$

Από τον ορισμό $\vec{r}_{cm}=\left(\int \vec{r}\,dm\right)/M_{ο\lambda}$ για το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{cm}$ του κέντρου μάζας

βρίσκουμε $x_{cm}=\frac{1}{m}\int_0^l x\lambda(x)dx=\frac{1}{m}\frac{2m}{3l}\int_0^l x(1+x/l)dx=\frac{2}{3l}\left(\frac{l^2}{2}+\frac{l^3}{3l}\right)=\frac{2}{3l}\frac{5l^2}{6}=\frac{5l}{9}.$

Από τον ορισμό $I=\int r^2 dm$ για τη ροπή αδράνειας γύρω από άξονα περιστροφής

βρίσκουμε $I_O=\int_0^l x^2\lambda(x)dx=\frac{2m}{3l}\int_0^l x^2(1+x/l)dx=\frac{2m}{3l}\left(\frac{l^3}{3}+\frac{l^4}{4l}\right)=\frac{2m}{3l}\frac{7l^3}{12}=\frac{7ml^2}{18}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΜΗ-ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ

Λεπτή ράβδος μήκους l και μάζας m έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) που δίνεται από τη σχέση $\lambda(x)=\frac{2m}{3l}\left(1+\frac{x}{l}\right)$, όπου x η απόσταση από το ένα της άκρο O. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστραφεί γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το O. (β) Σημειακή μάζα m στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Τη στιγμή $t_0=0$ η m εκτοξεύεται με τη βοήθεια εσωτερικών δυνάμεων και κινείται πάνω στο επίπεδο με ταχύτητα v_0 σε κατεύθυνση κάθετη σε αυτήν της ράβδου. Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα ω_0 της ράβδου αμέσως μετά την εκτόξευση; (γ) Πόση ενέργεια απαιτείται για την εκτόξευση;

(β) Επειδή κατά την εκτόξευση έχουμε μόνο εσωτερικές δυνάμεις

η στροφορμή διατηρείται και άρα $I_O\omega_0 = mv_0 l \Rightarrow \omega_0 = \frac{mv_0 l}{7ml^2/18} = \frac{18v_0}{7l}$.

(γ) Η ενέργεια που απαιτείται κατά την εκτόξευση είναι το άθροισμα

των κινητικών ενεργειών $E=\frac{1}{2}I_O\omega_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\frac{7ml^2}{18}\left(\frac{18v_0}{7l}\right)^2+\frac{mv_0^2}{2}=\frac{25}{14}mv_0^2$.