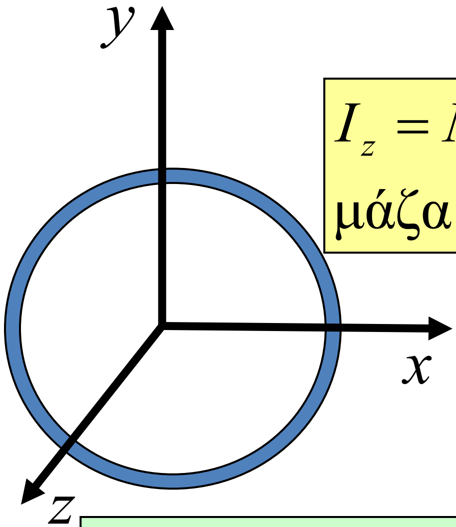
ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ



Για τον λεπτό ομογενή δακτύλιο του σχήματος είναι

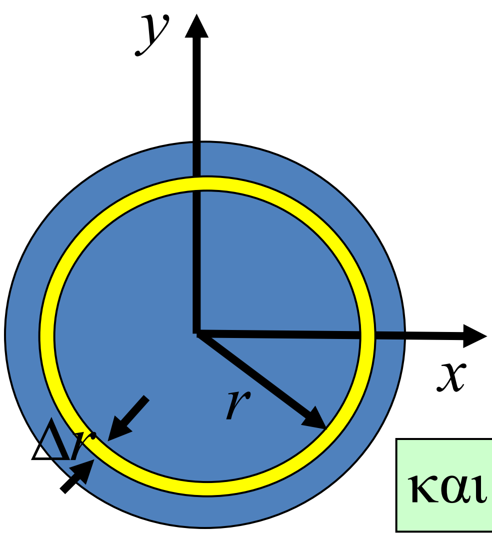
$I_z = MR^2$, όπου M και R είναι η μάζα και η ακτίνα του δακτυλίου.

Ποια είναι η ροπή αδράνειας I_x (I_y) ως προς τον άξονα $x\,(y)$;

Λόγω συμμετρίας είναι $I_x = I_y$.

Από το θεώρημα κάθετων αξόνων: $I_z = 2I_x \Rightarrow I_x = I_z/2 = MR^2/2$ (1).

Θέλουμε να βρούμε τις I_z και I_x για ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M.



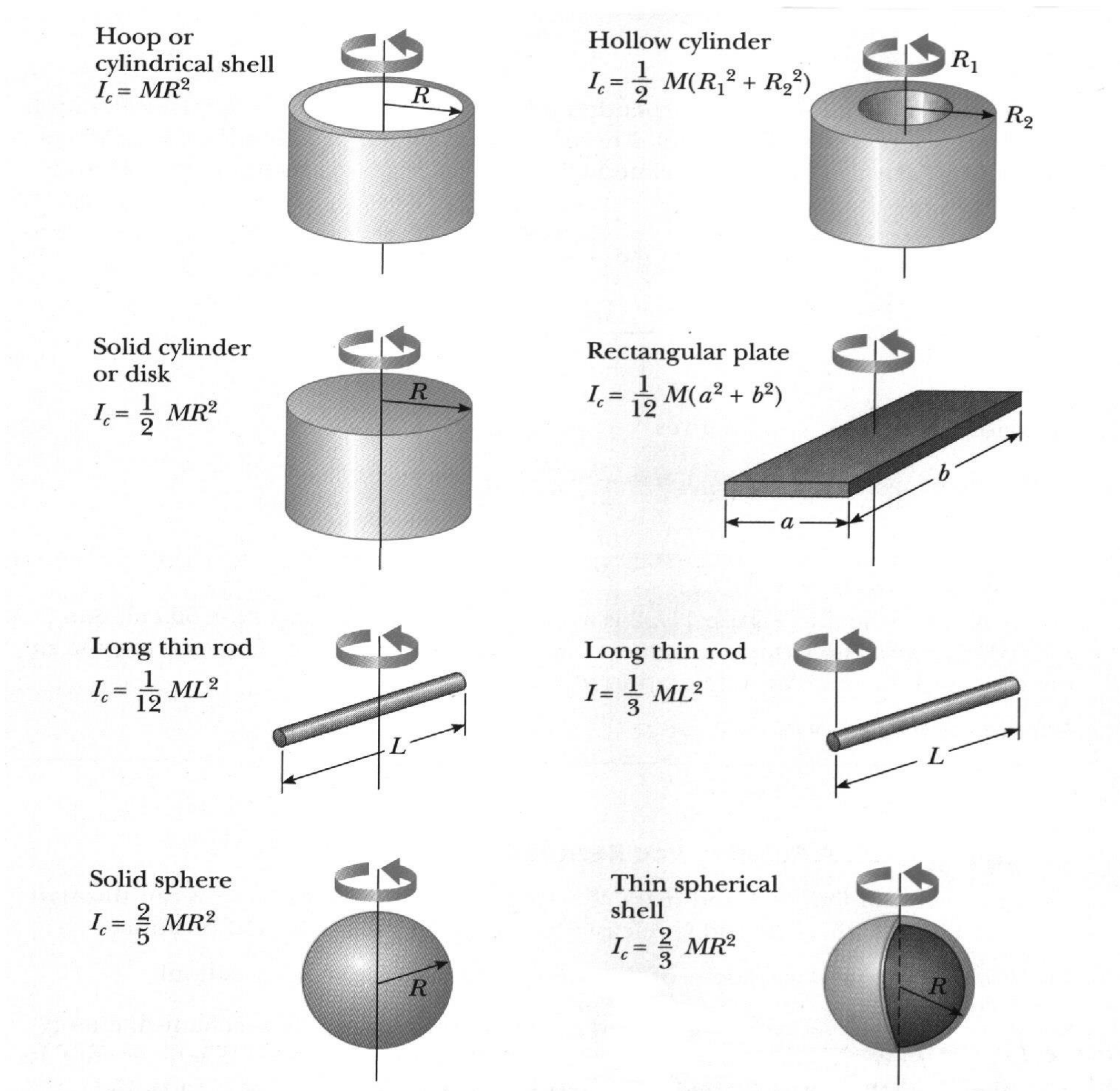
Ένας λεπτός δακτύλιος πάχους Δr έχει μάζα $\Delta M = \dfrac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2} M \approx \dfrac{2r\Delta r}{R^2} M$.

Επομένως: $I_z = \int_0^R \dfrac{2rM}{R^2} r^2 dr = \dfrac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \dfrac{MR^2}{2}$ (2)

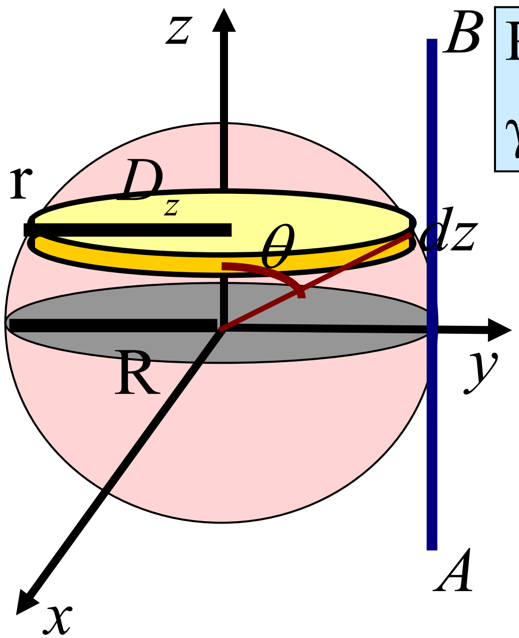
και από το θεώρημα κάθετων αξόνων $I_x = I_z/2 = MR^2/4$ (3).

Η (2) ισχύει και για ομογενή κύλινδρο ακτίνας R.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας συνολικής μάζας M γύρω από άξονα περιστροφής που εφάπτεται της σφαίρας.

Η σφαίρα αποτελείται από διαδοχικούς λεπτούς κυλίνδρους πάχους dz, όπως ο D_z του σχήματος.

Η μάζα του $\mathrm{D_z}$ είναι $M_{D_z} = M \dfrac{\pi r^2 |\mathrm{dz}|}{4\pi R^3/3}$,

ενώ η ροπή αδράνειας του D_z είναι $I_z^{D_z} = M_{D_z} r^2/2$.

Είναι ακόμη: $r = R\sin\theta$ και $z = R\cos\theta \Rightarrow |dz| = R\sin\theta d\theta$.

Η ροπή αδράνειας ως προς τον $z-$άξονα είναι: $I_z = \int_0^\pi \dfrac{1}{2} r^2 M \dfrac{\pi r^2 R\sin\theta d\theta}{4\pi R^3/3} =$

$$= -\frac{3MR^2}{8}\int_0^\pi \sin^4\theta d\left(\overbrace{\cos\theta}^{x}\right) = -\frac{3MR^2}{8}\int_{1(=\cos 0)}^{-1(=\cos\pi)} \left(1-x^2\right)^2 dx = \frac{3MR^2}{8}\frac{16}{15} = \frac{2MR^2}{5}.$$

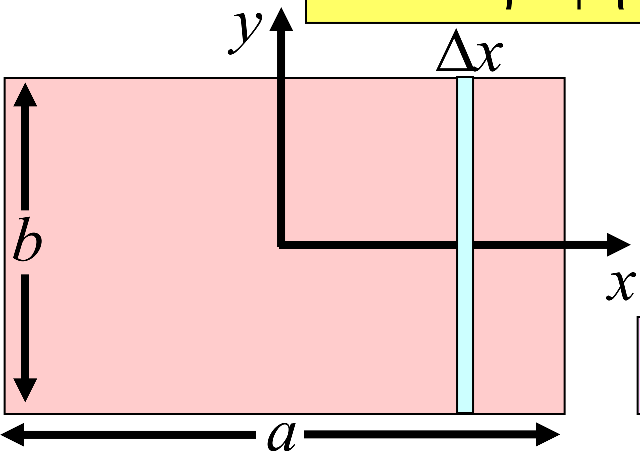
Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων βρίσκουμε για την ροπή I_{AB}

ως προς τον άξονα AB: $I_{AB} = I_z + MR^2 = 7MR^2/5$.

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ: ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΛΑΚΑ

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις ροπές αδράνειας για ομογενή ορθογώνια πλάκα πυκνότητας ρ και συνολικής μάζας M $(M=\rho ab)$.

Κατακόρυφη ράβδος πάχους Δx έχει μάζα $\Delta M = M\Delta x/a$.



Άρα $I_y = \int_{-a/2}^{a/2} Mx^2 dx/a = Ma^2/12 = \rho a^3 b/12.$

Ομοίως προκύπτει ότι $I_x = Mb^2/12 = \rho ab^3/12.$

Άρα : $I_z = I_x + I_y = M\left(a^2+b^2\right)/12 = \rho\left(a^3b+ab^3\right)/12.$

Διαφορετικά χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα :

$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \rho ds$, όπου $\rho = \dfrac{M}{ab}$ η πυκνότητα

και $ds = dxdy$ το στοιχειώδες εμβαδό. Άρα

$$I_z = \frac{M}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{M}{ab}\left[\int_{-b/2}^{b/2}\left(\int_{-a/2}^{a/2}x^2dx\right)dy + \int_{-b/2}^{b/2}y^2\left(\int_{-a/2}^{a/2}dx\right)dy\right] =$$

$$= M\left[\int_{-b/2}^{b/2}\frac{a^3}{12}dy + \int_{-b/2}^{b/2}y^2 a dy\right]\Big/ab = M\left(a^2+b^2\right)/12.$$

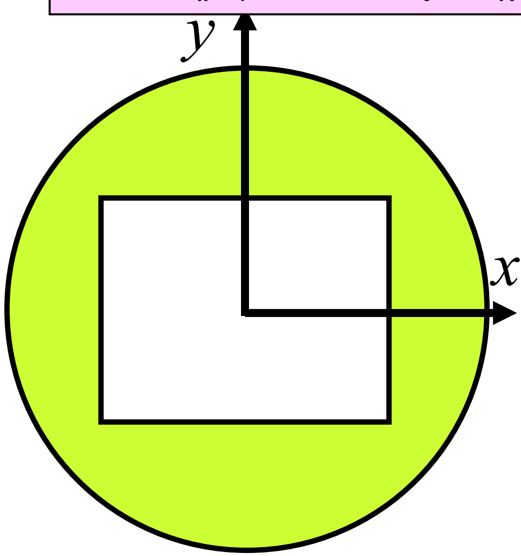
ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΕΝΟΥ

Προφανώς μπορούμε στη σχέση που μας δίνει τη ροπή αδράνειας να προσθαφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα. Έτσι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα υπολογισμού ροπών αδράνειας (ή και κέντρου μάζας) για σώματα που έχουν κάποιο ή κάποια κενά.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ομογενή δίσκο πυκνότητας ρ και ακτίνας R που φέρει στο κέντρο του ένα ορθογώνιο κενό με διαστάσεις a, b.

Για τη ροπή αδράνειας I_z έχουμε $I_z = \underbrace{\int r^2 dm}_{\text{ολοκλήρωμα πάνω στις στοιχειώδεις μάζες του σχήματος}}$

$$= \underbrace{\int r^2 dm}_{\text{ολοκλήρωμα πάνω στις στοιχειώδεις μάζες του πλήρους δίσκου}} - \underbrace{\int r^2 dm}_{\text{ολοκλήρωμα πάνω στις στοιχειώδεις μάζες του κενού}}$$



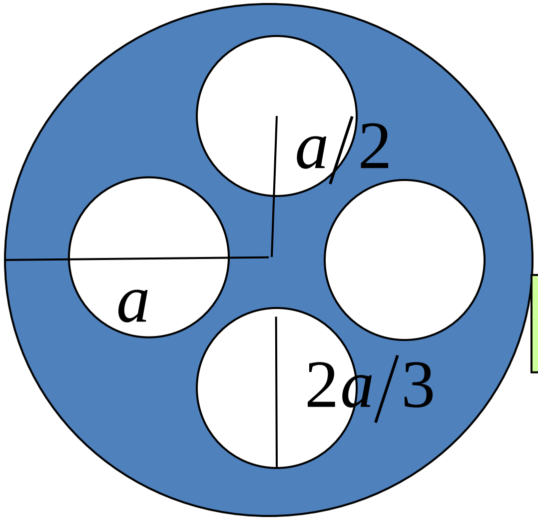
όπου οι στοιχειώδεις φανταστικές μάζες που αντιστοιχούν στο κενό έχουν την ίδια πυκνότητα με αυτήν του ομογενούς στερεού σώματος που μας ενδιαφέρει.

Δηλαδή $I_z = I_z^{\text{πλήρους δίσκου}} - I_z^{\text{ορθογωνίου}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_z = \pi\rho R^2 \left(R^2/2\right) - \rho ab\left(a^2 + b^2\right)/12.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του σώματος του σχήματος. Η ακτίνα του μεγάλου δίσκου είναι a, η ακτίνα κάθε κυκλικού κενού είναι $a/3$ και το κέντρο του κάθε κενού βρίσκεται σε απόσταση $a/2$ από το κέντρο του δίσκου. Η συνολική μάζα του σώματος είναι M.



Έστω ρ η πυκνότητα του σώματος.

Εάν καλύπταμε με το ίδιο υλικό τα κενά το κάθε ένα από αυτά θα είχαν μάζα $m_0 = \rho\pi(a/3)^2$ και

ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο τους $I_{c0} = m_0(a/3)^2/2$.

Η ροπή αδράνειας ενός πληρωθέντος κενού ως προς το κέντρο του σώματος θα ήταν $I_0 = I_{c0} + m_0(a/2)^2$.

Η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ακτίνας a είναι $I_d = \rho\pi a^2 a^2/2$.

Επομένως, η ροπή αδράνειας του σώματος του σχήματος είναι

$I = I_d - 4I_0 = \rho\pi a^4/2 - 11\rho\pi a^4/81$.

Επειδή είναι $M = \rho\pi a^2 - 4m_0 = 5\rho\pi a^2/9$

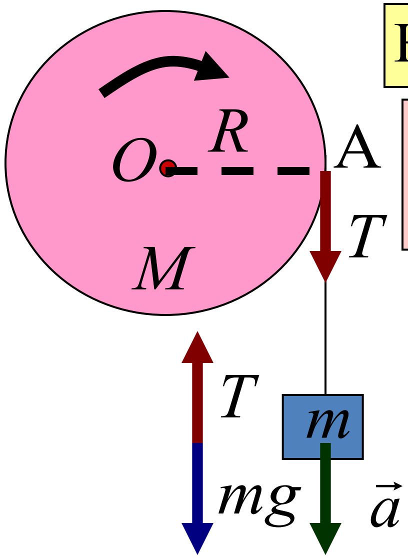
τελικά βρίσκουμε $I = (1/2 - 11/81)9Ma^2/5 = 59Ma^2/90$.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΛΟΓΩ ΡΟΠΗΣ

Συμπαγής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου όταν από την μία πλευρά του κρέμεται με νήμα μάζα m.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$ (1).

Αν a είναι η επιτάχυνση του σώματος τότε είναι $mg - T = ma \Rightarrow T = m(g-a)$.



Η τάση ασκεί ροπή στο σημείο A ίση με $N = m(g-a)R$ (2).

Αντικαθιστώντας τις (1),(2) στην $\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N$ βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} = m(g-a)R \quad (4).$$

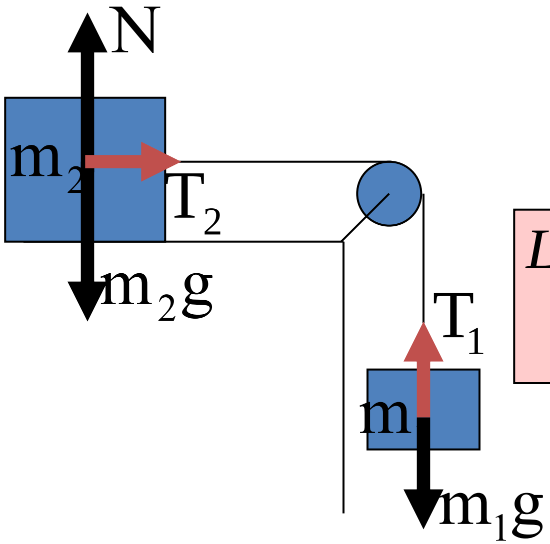
Είναι ακόμη $R\omega = v \Rightarrow R\frac{d\omega}{dt} = a$ (5).

Από τις (4) και (5) (με απαλοιφή του a και επίλυση ως προς $d\omega/dt$) βρίσκουμε

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{m+M/2}\frac{g}{R} = \frac{g}{R}\frac{1}{1+M/2m}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα, με αβαρές νήμα που είναι περασμένο σε τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I. Η m_2 ολισθαίνει χωρίς τριβές. Προσδιορίστε την επιτάχυνση των δύο μαζών.



Η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο Ο της τροχαλίας είναι

$L = m_1 vR + m_2 vR + I\omega$ (1), όπου v η ταχύτητα των μαζών και $v = \omega R$ η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.

Η συνισταμένη ροπή εξωτερικών δυνάμεων είναι $m_1 gR$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (1) βρίσκουμε

$$\frac{dL}{dt} = m_1 gR \Rightarrow (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt} = m_1 gR \Rightarrow$$

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$