ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σύστημα Ν σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν με δυνάμεις $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ij}}$ (η δύναμη που ασκεί το σώμα i στο σώμα j).

Από τον 3$^{\mathrm{o}}$ νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ij}} = -\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ji}}$.

ενώ από τον 2$^{\mathrm{o}}$ νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ij}} = -\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ji}} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_j}{dt} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d\left(\vec{p}_i + \vec{p}_j\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i + \vec{p}_j = \text{σταθερά.}$$

Δηλαδή, αν σε ένα σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις (δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων του συστήματος), τότε η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

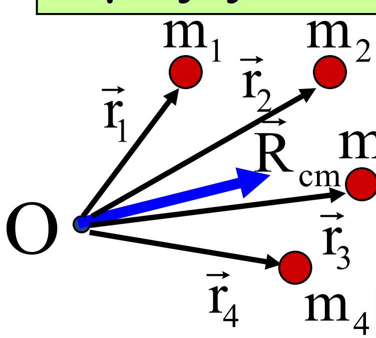
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Για ένα σύστημα Ν σωμάτων το διάνυσμα θέσης $\vec{R}_{cm}$ του κέντρου μάζας ορίζεται ως :

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} = \frac{\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n}{M}, \quad (1)$$

$\vec{r}_n$ και m_n είναι τα διανύσματα θέσης και οι μάζες των Ν σωμάτων, αντίστοιχα.

όπου $M = \sum_n m_n$ η ολική μάζα.



Από την (1) παίρνουμε παραγωγίζοντας

$$M\dot{\vec{R}}_{cm} = \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{v}_n, \quad (2)$$

όπου $\sum_n m_n \vec{v}_n$ η ολική ορμή του συστήματος που είναι ίση με $M\dot{\vec{R}}_{cm}$.

Παραγωγίζοντας ακόμη μία φορά βρίσκουμε $M\ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{v}}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n = \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau}, \quad (3)$

όπου $\vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$ η ολική εξωτερική δύναμη.

Στα παραπάνω είναι $\sum_n^N \vec{F}_n^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = 0$ λόγω $3^{ου}$ νόμου Νεύτωνα.

Αν $\vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0$ τότε $\ddot{\vec{R}}_{cm} = 0$, δηλαδή το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Έστω $\vec{R}_1$ και $\vec{R}_2$ τα κέντρα μάζας δύο συστημάτων με μάζες m_1 και m_2.

Για το κοινό κέντρο μάζας βρίσκουμε :

$$\vec{R}_{12} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{R}_{12} = \vec{R}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right),$$

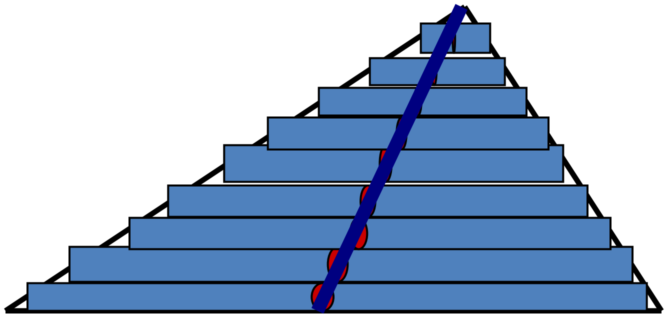
δηλαδή το κοινό κέντρο μάζας είναι πάνω στην ευθεία που ενώνει τα $\vec{R}_1$ και $\vec{R}_2$.

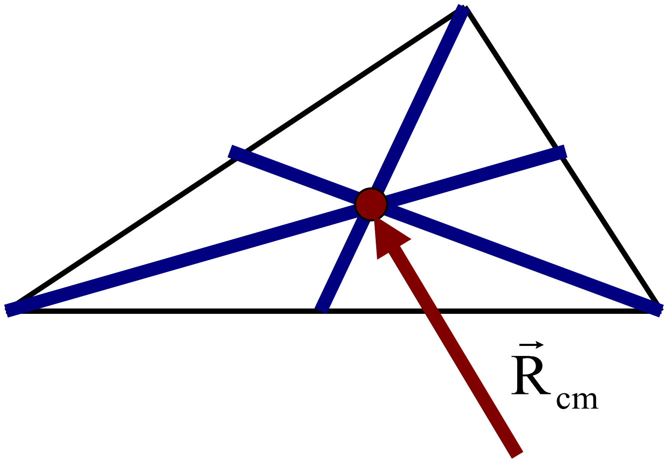
Αν προσθέσουμε και 3η μάζα m_3 τότε :

$$\vec{R}_{123} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_{12}\vec{R}_{12} + m_3\vec{R}_3}{m_{12} + m_3}, \text{ όπου } m_{12} = m_1 + m_2.$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω σε άξονες (ή σημεία) συμμετρίας.

Κέντρο μάζας ομογενούς σκαληνού τριγώνου





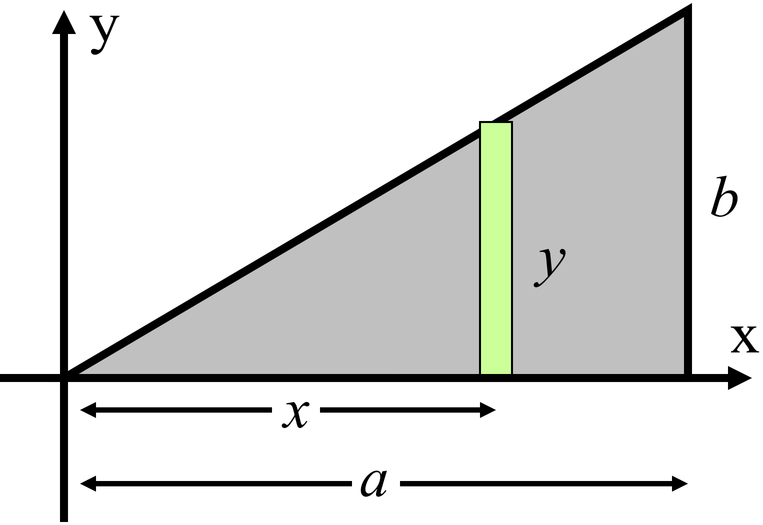
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για ένα εκτεταμένο σώμα μάζας Μ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm \quad (1).$$

Κέντρο μάζας ομογενούς ορθογώνιου τριγώνου πυκνότητας ρ.

Αν τα μήκη των κάθετων πλευρών είναι a και b, τότε $\rho = \dfrac{M}{ab/2}$.



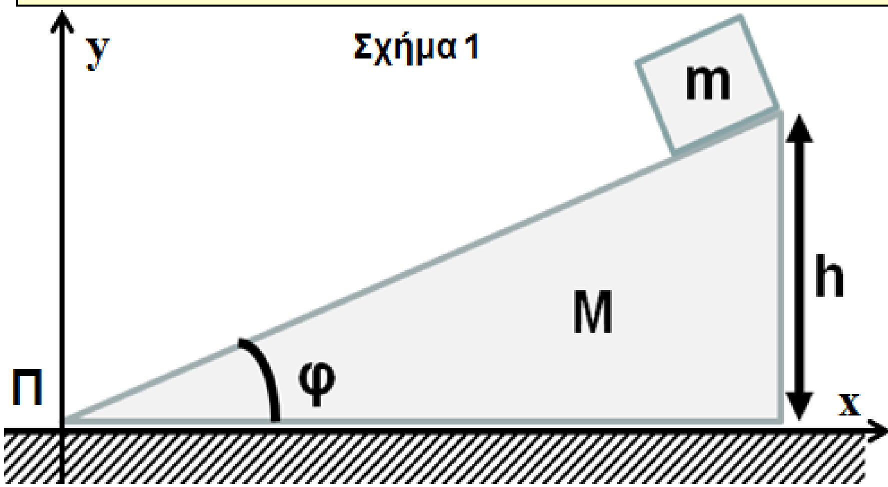
Είναι $x_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_0^a x\,dm = \dfrac{1}{M}\int_0^a x\dfrac{2M}{ab}y\,dx \Rightarrow$

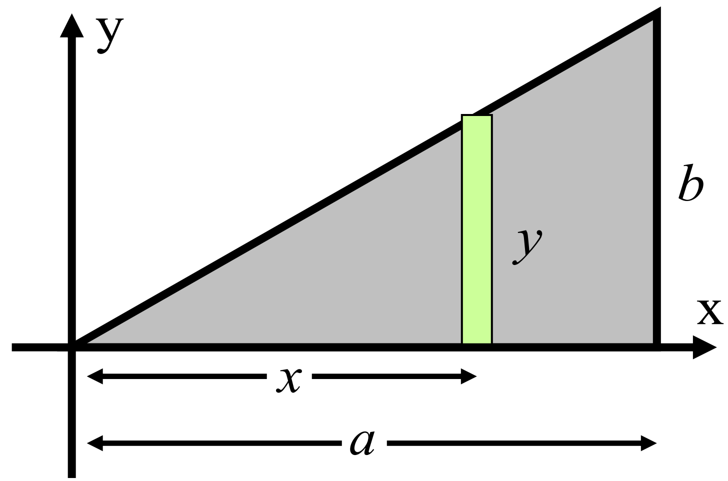
$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\,dx = \frac{2}{ab}\int_0^a x\frac{b}{a}x\,dx = \frac{2a}{3} \quad (2).$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε $y_{cm} = \dfrac{b}{3}$ (3).

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΦΗΝΑΣ

Σημειακή μάζα m συγκρατείται ακίνητη σε ύψος h στην κορυφή σφήνας μάζας $M = 3m$. Η σφήνα συγκρατείται επίσης αρχικά ακίνητη και οι τριβές σε όλες τις διεπιφάνειες είναι μηδενικές. Στο κάτω άκρο της σφήνας βρίσκεται ακίνητος παρατηρητής Π. Τη στιγμή $t = t_0$ η μάζα και η σφήνα αφήνονται ελεύθερες και τη στιγμή $t = t_1$ η μάζα φτάνει στο κάτω άκρο της σφήνας. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος τη στιγμή t_0 και τη στιγμή t_1.



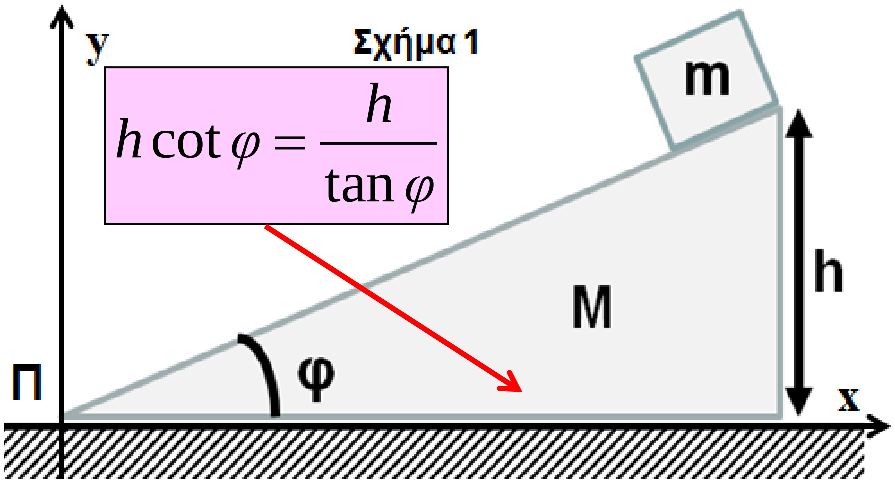


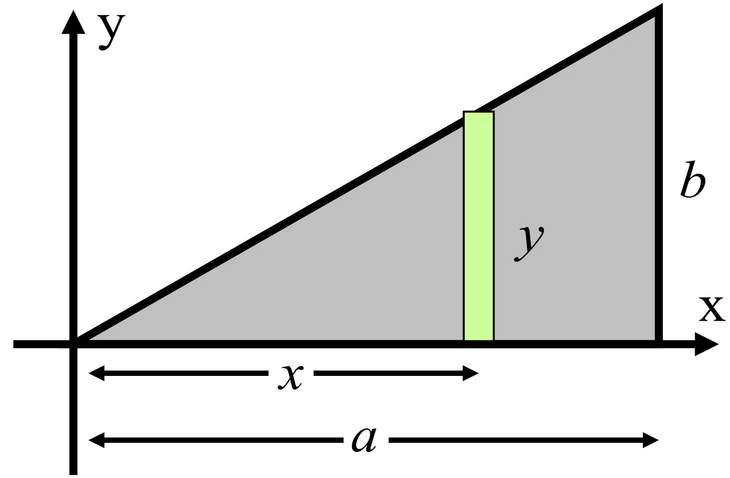
Έχουμε δείξει ότι για ομογενές ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές a και b

το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο $(x_{cm}, y_{cm}) = (2a/3, b/3)$.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΦΗΝΑΣ

Σημειακή μάζα m συγκρατείται ακίνητη σε ύψος h στην κορυφή σφήνας μάζας $M = 3m$. Τη στιγμή $t = t_0$ η μάζα και η σφήνα αφήνονται ελεύθερες και τη στιγμή $t = t_1$ η μάζα φτάνει στο κάτω άκρο της σφήνας. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος τη στιγμή t_0 και τη στιγμή t_1.





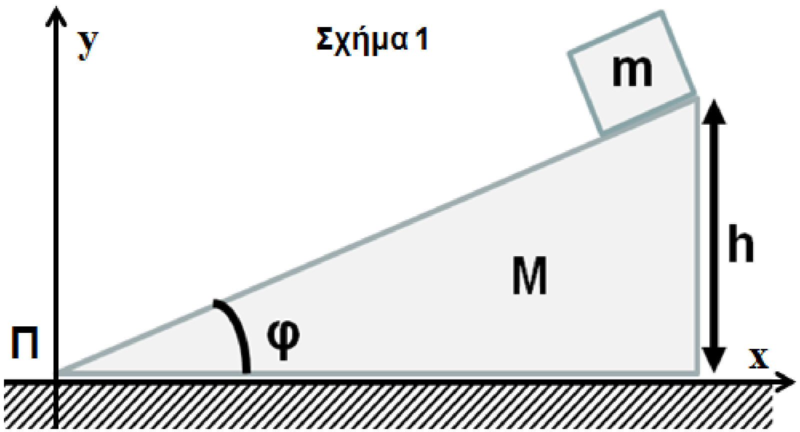
Άρα, για $t = t_0$ το κέντρο μάζας του συστήματος σώμα(m)-σφήνα (Σ) έχει

$$\text{διάνυσμα θέσης } \vec{R}_{cm}^{t=t_0} = \frac{M\vec{R}_{cm,\Sigma}^{t=t_0} + m\vec{R}_{m}^{t=t_0}}{M+m} = \frac{3\vec{R}_{cm,\Sigma}^{t=t_0} + \vec{R}_{m}^{t=t_0}}{4}$$

$$\text{και συντεταγμένες } x_{cm,t_0}^{m-\Sigma} = \frac{3}{4}\frac{2h\cot\varphi}{3} + \frac{1}{4}h\cot\varphi = \frac{3h\cot\varphi}{4},\; y_{cm,t_0}^{m-\Sigma} = \frac{3}{4}\frac{h}{3} + \frac{h}{4} = \frac{h}{2}.$$

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΦΗΝΑΣ

Σημειακή μάζα m συγκρατείται ακίνητη σε ύψος h στην κορυφή σφήνας μάζας $M = 3m$. Τη στιγμή $t = t_0$ η μάζα και η σφήνα αφήνονται ελεύθερες και τη στιγμή $t = t_1$ η μάζα φτάνει στο κάτω άκρο της σφήνας. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος τη στιγμή t_0 και τη στιγμή t_1.



Για $t_0 < t < t_1$ η σφήνα κινείται προς τα δεξιά και το σώμα προς τα αριστερά. Οι μοναδικές εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των m - Σ και η αντίδραση που δέχεται η Σ από το έδαφος.

Όλες οι εξωτερικές δυνάμεις είναι κατακόρυφες.

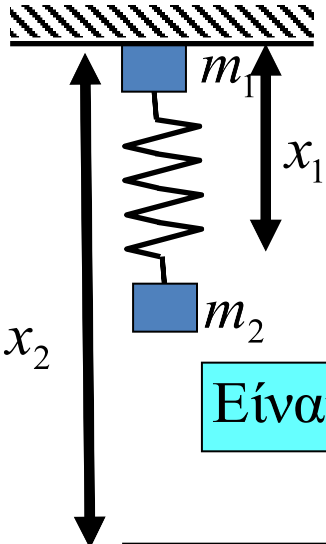
Επομένως, ισχύει η διατήρηση της **ολικής** ορμής στην οριζόντια διεύθυνση,

δηλαδή για $t_0 < t < t_1$ η $x -$ συντεταγμένη μένει σταθερή, ίση με $x_{cm,t_0}^{m-\Sigma} = \dfrac{3h\cot\varphi}{4}$.

Για τη $y -$ συντεταγμένη τη στιγμή t_1 έχουμε $y_{cm,t_1}^{m-\Sigma} = \dfrac{3}{4}\dfrac{h}{3} + \dfrac{1}{4}0 = \dfrac{h}{4}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα ελατήριο σταθεράς C και φυσικού μήκους l φέρει δύο μάζες m_1 και m_2 στα δύο άκρα του. Η μάζα m_1 είναι αρχικά κολλημένη στην οροφή, ενώ η m_2 αιωρείται. Κάποια στιγμή ξεκολλάμε την m_1. Βρείτε τις αποστάσεις $x_1(t), x_2(t)$ των $m_1,\ m_2$ από την οροφή.



Έστω ότι το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι d.

Είναι τότε : $m_2 g = C(d-l) \Rightarrow d = l + m_2 g/C$ (1).

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι :

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + C(x_2 - x_1 - l) \quad (2).$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - C(x_2 - x_1 - l) \quad (3).$$

Είναι $X_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ το κέντρο μάζας των m_1 και m_2.

Προσθέτοντας τις (2) και (3) κατά μέρη βρίσκουμε

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \ddot{X}_{cm} = g \Rightarrow X_{cm} = gt^2/2 + m_2 d/(m_1 + m_2) \quad (4).$$

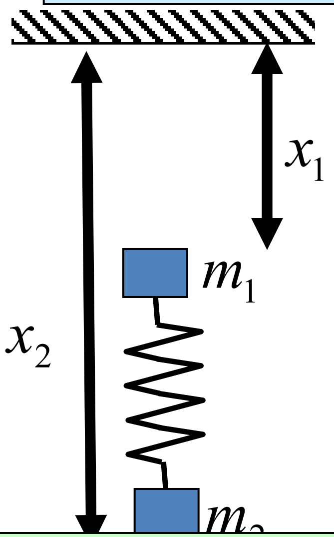
Αφαιρώντας τις (2) και (3) κατά μέρη βρίσκουμε

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{C}{m_2} + \frac{C}{m_1}\right)(x_2 - x_1 - l) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 - l) = -\omega^2(x_2 - x_1 - l) \quad (5),$$

όπου $\omega^2 = C(1/m_1 + 1/m_2)$ (6).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα ελατήριο σταθεράς C και φυσικού μήκους l φέρει δύο μάζες m_1 και m_2 στα δύο άκρα του. Η μάζα m_1 είναι αρχικά κολλημένη στην οροφή, ενώ η m_2 αιωρείται. Κάποια στιγμή ξεκολλάμε την m_1. Βρείτε τις αποστάσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ των m_1, m_2 από την οροφή.



$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_2 - x_1 - l\right) + \omega^2\left(x_2 - x_1 - l\right) = 0 \ \ (5), \ \omega^2 = C\left(1/m_1 + 1/m_2\right).$$

Η γενική λύση της (5) δίνει $x_2 - x_1 - l = A\cos(\omega t + \phi)$ (6).

Για $t = 0$ είναι $x_2 - x_1 = d$ και $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε από την (6):

$$-A\omega \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \ \text{και} \ A\cos\phi = d - l \Rightarrow A = d - l.$$

Τελικά: $x_2 - x_1 = l + (d - l)\cos\omega t$ (7).

Ακόμη: $X_{cm} = gt^2/2 + m_2 d/(m_1 + m_2)$ (4).

Είναι ακόμη: $X_{cm} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$.

Από τις (4) και (7) βρίσκουμε:

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{m_2(d - l)}{m_1 + m_2}(1 - \cos\omega t)$$

$$x_2 = d + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{m_1(d - l)}{m_1 + m_2}(1 - \cos\omega t)$$