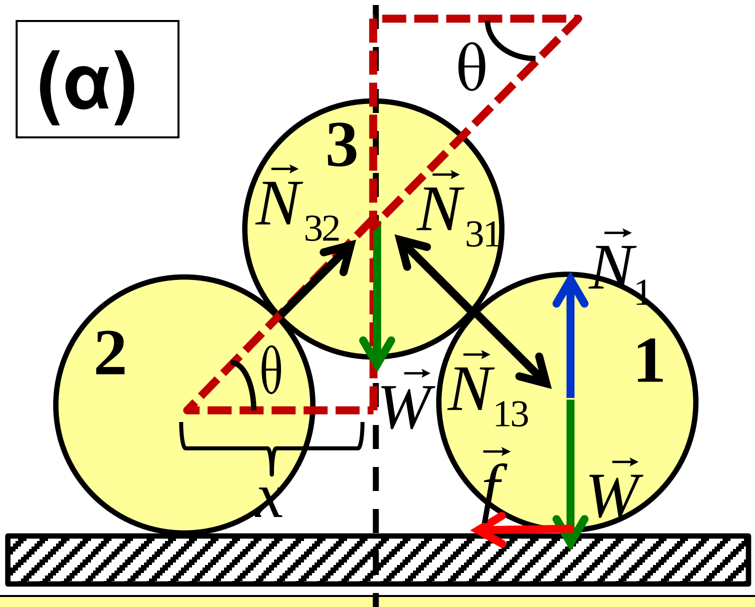
ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΙΣΚΟΙ – ΣΦΑΙΡΕΣ

(α) Τρεις ίδιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας R και μάζας M τοποθετούν ται πάνω στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα (Α). Το σύστημα ισορροπεί. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή απόσταση d μεταξύ των κέντρων των κάτω δίσκων. Οι δίσκοι μπορούν μόνο να ολισθήσουν, δεν μπορούν να κυλήσουν. Οι δίσκοι δεν έχουν τριβές μεταξύ τους, αλλά υπάρχει τριβή συντελεστή $\mu = 1/3$ με το έδαφος.



Ο δίσκος 3 δέχεται δυνάμεις $\vec{N}_{31}$ και $\vec{N}_{32}$ και το βάρος του $\vec{W}$. Συνθήκη ισορροπίας:

$$\vec{N}_{31} + \vec{N}_{32} + \vec{W} = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_{31} = N_{32} \ (1) \\ 2N_{31}\sin\theta = W \ (2) \end{cases}$$

Ο δίσκος 1 δέχεται δυνάμεις $\vec{N}_{13}$, $\vec{N}_1$, τριβή $\vec{f}$ και το βάρος του $\vec{W}$. Συνθήκη ισορροπίας:

$$\vec{N}_{13} + \vec{N}_1 + \vec{f} + \vec{W} = 0 \overset{\vec{N}_{13}=-\vec{N}_{31}}{\Rightarrow} \begin{cases} N_{31}\cos\theta = \mu N_1 = \mu\left(W/2 + W\right) \Rightarrow W\cot\theta = 2\mu\left(3W/2\right) \ (3) \\ N_{31}\sin\theta + W = N_1 \ (4) \end{cases}$$

Επομένως: $\cot\theta = 3\mu = 1 \Rightarrow \theta = 45° \Rightarrow d = 2x = 2\left(2R\right)\cos\theta = 2\sqrt{2}R.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΙΣΚΟΙ – ΣΦΑΙΡΕΣ

(β) Τέσσερις σφαίρες ακτίνας R και μάζας M τοποθετούνται όπως στο σχήμα (Β). Οι σφαίρες μπορούν νο ολισθήσουν, αλλά όχι να κυλήσουν. Οι κάτω σφαίρες 1, 2 και 3 είναι στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου και έχουν συντελεστή τριβής $\mu = 1/4$ με το έδαφος. Η σφαίρα 4 τοποθετείται πάνω στις 1, 2, 3 ούτως ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνάει από το κέντρο του τριγώνου των 1, 2, 3. Οι σφαίρες δεν έχουν τριβή μεταξύ τους. Βρείτε τη μέγιστη δυνατή απόσταση d μεταξύ των κέντρων των 1, 2, 3.

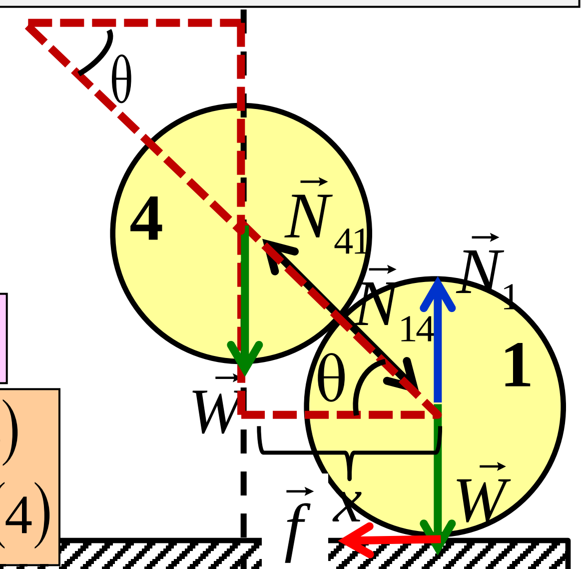
Η σφαίρα 4 δέχεται δυνάμεις $\vec{N}_{41}, \vec{N}_{42}\ \vec{N}_{43}$ και το βάρος $\vec{W}$.

$$\text{Ισορροπία: } \vec{N}_{41} + \vec{N}_{42} + \vec{N}_{43} + \vec{W} = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_{41} = N_{42} = N_{43} & (1) \\ 3N_{41}\sin\theta = W & (2) \end{cases}$$

Η σφαίρα 1 δέχεται δυνάμεις $\vec{N}_{14}, \vec{N}_1$, τριβή $\vec{f}$ και το βάρος $\vec{W}$.

$$\text{Ισορροπία: } \vec{N}_{14} + \vec{N}_1 + \vec{f} + \vec{W} = 0 \overset{\vec{N}_{14} = -\vec{N}_{41}}{\Rightarrow} \begin{cases} N_{41}\cos\theta = \mu N_1 & (3) \\ N_{41}\sin\theta + W = N_1 & (4) \end{cases}$$

$$\frac{W}{3}\cot\theta = \frac{4W}{3}\mu \Rightarrow \cot\theta = 4\mu \overset{\theta = 45^\circ}{\Rightarrow} x = \sqrt{2}R.$$

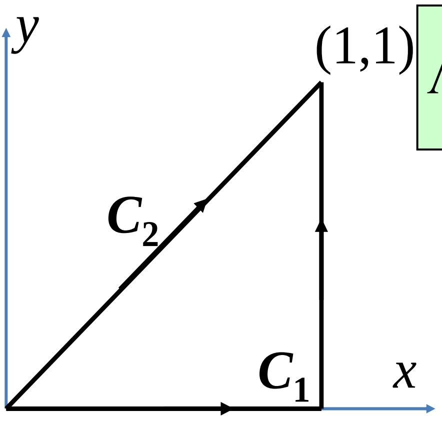


Επίπεδο που σχηματίζει το κέντρο O_1 με την κατακόρυφο που περνάει από το O_4.

Αν Ο το κέντρο του τριγώνου $O_1O_2O_3$ πλευράς d, τότε $x = OO_1$ και $d = 2x\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{6}R.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΕΡΓΟ

Θεωρήστε τις δυνάμεις **F**$_1$ = (x,y,0) και **F**$_2$ = (y,-x,0) και: (α) υπολογίστε, για κάθε μία έργο από το **r**$_1$ = (0,0,0) στο **r**$_2$ = (1,1,0) κατά μήκος των δύο διαφορετικών διαδρομών C1 και C2. (β) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α), ποια δύναμη μπορεί να είναι διατηρητική και ποια δεν είναι διατηρητική; (γ) Για ποιο από τα δύο συμπεράσματα του ερωτήματος (β), η απόδειξη, μέσω των αποτελεσμάτων του (α), είναι επαρκής και για ποιο όχι; (δ) Για το δεύτερο συμπέρασμα του ερωτήματος (γ), ποιά είναι η πλήρης απόδειξη; (ε) Για το πεδίο που αντιστοιχεί σε διατηρητική δύναμη, ποιά είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας;



$$\text{ΛΥΣΗ}:(\alpha)\ \text{Είναι}\ W_{C_1}^{\mathbf{F}_1}=\int_{C_1}F_{1x}dx+F_{1y}dy=\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\text{και}\ W_{C_2}^{\mathbf{F}_1}=\int_{C_2}F_{1x}dx+F_{1y}dy=\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\text{Είναι ακόμη}\ W_{C_1}^{\mathbf{F}_2}=\int_{C_1}F_{2x}dx+F_{2y}dy=\int_0^1 \overbrace{y}^{0}dx-\int_0^1 \overbrace{x}^{1}dy=\frac{1}{2}$$

$$\text{και}\ W_{C_2}^{\mathbf{F}_2}=\int_{C_2}F_{2x}dx+F_{2y}dy=\int_0^1 \overbrace{y}^{x}dx-\int_0^1 \overbrace{x}^{y}dy=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

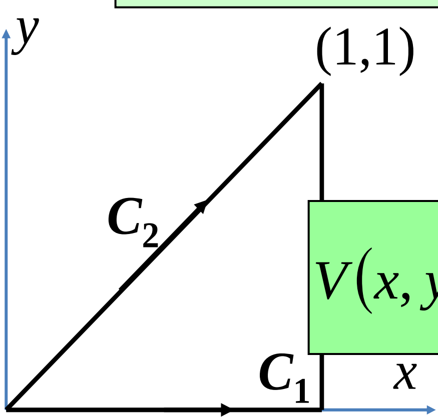
$(\beta\text{-}\gamma)$ Η $\mathbf{F}_1$ θα μπορούσε να είναι διατηρητική, $\mathbf{F}_2$ σίγουρα δεν είναι διατηρητική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΕΡΓΟ

Θεωρήστε τις δυνάμεις **F**$_1$ = (x,y,0) και **F**$_2$ = (y,-x,0) και: (α) υπολογίστε, για κάθε μία έργο από το **r**$_1$ = (0,0,0) στο **r**$_2$ = (1,1,0) κατά μήκος των δύο διαφορετικών διαδρομών C1 και C2. (δ) Για το δεύτερο συμπέρασμα του ερωτήματος (γ), ποιά είναι η πλήρης απόδειξη; (ε) Για το πεδίο που αντιστοιχεί σε διατηρητική δύναμη, ποιά είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας;

$$(\delta)\,\text{Είναι}\,\nabla\times\mathbf{F}_1=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & 0\end{vmatrix}=\hat{x}\left(\overbrace{\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}}^{0}\right)-\hat{y}\left(\overbrace{\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}}^{0}\right)+\hat{z}\left(\overbrace{\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}}^{0}\right)=0,\ \text{ενώ}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}_2=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & 0\end{vmatrix}=\hat{x}\left(\overbrace{\frac{\partial 0}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}}^{0}\right)-\hat{y}\left(\overbrace{\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial z}}^{0}\right)+\hat{z}\left(\overbrace{-\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}}^{-2}\right)=-2\hat{z}\neq 0.$$



Άρα η $\mathbf{F}_1$ είναι διατηρητική, η $\mathbf{F}_2$ δεν είναι διατηρητική.

(ε) Αν αντί για το $(1,1)$ επιλέξουμε τυχαίο σημείο (x,y) τότε

$$V(x,y)=-W_{C_1}^{\mathbf{F}_1}=-\int_0^x x'dx'-\int_0^y y'dy'=-\frac{x^2+y^2}{2},\ \text{όπου θέσαμε}\ V(0,0)=0.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΕΡΟΣΤΑΤΟ

Ένα αερόστατο μάζας m_0 ισορροπεί σε ύψος h. Η μισή από την συνολική του μάζα είναι σε μορφή άμμου. Κάποια στιγμή ανοίγει τρύπα στο δάπεδο του κουβούκλιου του αερόστατου και η άμμος αρχίζει να πέφτει με σταθερό ρυθμό k. Να βρεθεί η ταχύτητα του αερόστατου την στιγμή που αυτό χάνει όλη την άμμο.

Το αερόστατο αρχικά ισορροπεί και άρα $m_0 g = A$, όπου A είναι η άνωση.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t η μάζα του αερόστατου είναι m και την χρονική στιγμή $t+dt$ η μάζα είναι $m-dm$. Αν οι ταχύτητες του αερόστατου τις στιγμές t και $t+dt$ είναι v και $v+dv$, τότε η διαφορά της ορμής είναι

$$(m-dm)(v+dv)+(v-V)dm-mv=[A-mg]dt,$$ όπου

$V=0$ η σχετική ταχύτητα της άμμου ως προς το αερόστατο.

Επειδή είναι $dm=kdt$, $v_s=v$ και αγνοώντας γινόμενα διαφορικών, βρίσκουμε

$$mdv=(A-mg)dt \Rightarrow dv/dt=[A-(m_0-kt)g]/m=ktg/(m_0-kt)\Rightarrow$$

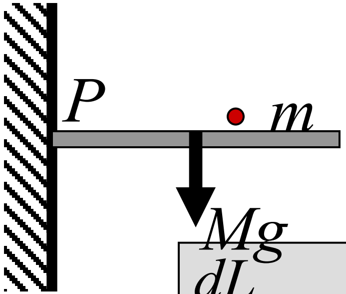
$$\Rightarrow \int_0^v dv'=\int_0^t \frac{ktg}{m_0-kt}dt' \Rightarrow v=-gt-\frac{m_0 g}{k}\ln\left(1-\frac{kt}{m_0}\right)$$

Αν τ είναι η στιγμή που $m=m_0/2$ τότε $\tau=m_0/2k$,

τότε $v(\tau)=(\ln 2-1/2)m_0 g/k$.

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΡΑΒΔΟΣ

Ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβή γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από οριζόντια θέση. Ποια είναι η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου; Σε ποιο σημείο της πρέπει να τοποθετήσουμε σωμα μάζας m (με m << M) ώστε αυτό μόλις που θα ξεκολλήσει από την ράβδο;



Το βάρος της ράβδου ασκεί μια ροπή ως προς το σημείο P ίση με $N = Mg\,L/2$.

Από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow I\frac{d\omega}{dt} = MgL/2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2\frac{d\omega}{dt} = MgL/2 \Rightarrow \alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2L} \quad (1).$$

όπου α είναι η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Έστω ότι αφήνουμε την μάζα m σε απόσταση x από το P.

Η αρχική γραμμική ταχύτητα της ράβδου σε αυτό το σημείο είναι $v = \omega x$

Για να αποκολληθεί το σωματίδιο θα πρέπει $a \geq g \Rightarrow \frac{3g}{2L}x \geq g \Rightarrow x \geq \frac{3L}{2}$.