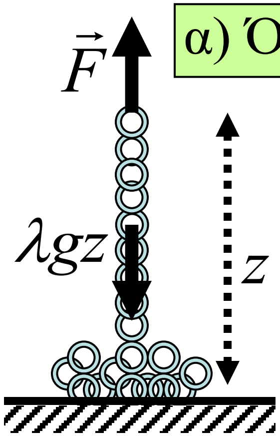
ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΝΥΨΩΣΗ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Αλυσίδα γραμμικής πυκνότητας λ βρίσκεται σωριασμένη στο έδαφος. Να βρεθεί η κατακόρυφη F που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή α) ταχύτητα, β) επιτάχυνση γ, αν το ένα άκρο της αλυσίδας ξεκινά από το έδαφος με μηδενική ταχύτητα. Υπολογίστε, συναρτήσει του ύψους του άνω άκρου της αλυσίδας και για τις δύο περιπτώσεις α) και β) το έργο W που έχει παραχθεί από τη δύναμη, την κινητική ενέργεια E_K και τη δυναμική ενέργεια E_Δ της αλυσίδας, καθώς και την απώλεια ενέργειας Q ως κλάσμα της E_K.



α) Όταν το άνω άκρο της αλυσίδας είναι σε ύψος z και κινείται με ταχύτητα v η ολική ορμή της αλυσίδας είναι $\lambda z v$ και δέχεται δύναμη $F-\lambda g z$. Άρα:

$$d(\lambda z v)/dt = F - \lambda g z \Rightarrow F = \lambda g z + \lambda\, d(vz)/dt \quad (1).$$

Αν $\dot{v}=0$ τότε $z = vt$ και $F = \lambda g z + \lambda v^2$ (2).

Για το έργο W της F έχουμε:

$$W = \int_0^z F dz' = \int_0^z \left(\lambda g z' + \lambda v^2\right) dz' = \lambda g z^2/2 + \lambda v^2 z \quad (3).$$

Είναι $E_K = \lambda z v^2/2$ και $E_\Delta = \lambda g z^2/2$.

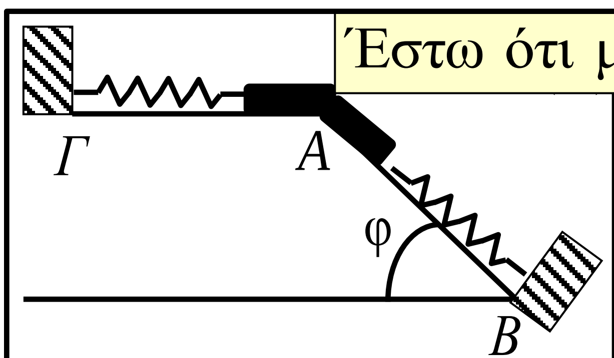
Άρα $Q = W - \left(E_K + E_\Delta\right) = \lambda z v^2/2 = E_K$.

β) Είναι τώρα $z = \gamma t^2/2,\ v = \gamma t$ και η (1) δίνει $F = \lambda\gamma(g+3\gamma)t^2/2 = \lambda(g+3\gamma)z$ (4).

$$W = \int_0^z F dz' = \lambda(g+3\gamma)z^2/2,\ E_K = \lambda\gamma z^2,\ E_\Delta = \lambda g z^2/2,\ Q = W - \left(E_K + E_\Delta\right) = E_K/2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΛΥΣΙΔΑ – ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Ένα κομμάτι ομογενούς αλυσίδας μήκους L και συνολικής μάζας M βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ το υπόλοιπο κομμάτι βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κάτω άκρο της αλυσίδας είναι προσαρτημένο στην άκρη ελατηρίου E_1 σταθεράς k και φυσικού μήκους L. Το άλλο άκρο του E_1, το οποίο βρίσκεται ολόκληρο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, είναι αναρτημένο από σταθερό σημείο B. Το άνω άκρο της αλυσίδας είναι δεμένο σε ελατήριο E_2 σταθεράς k και φυσικού μήκους L, το οποίο βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο και είναι αναρτημένο σε σταθερό σημείο Γ. Βρείτε την θέση ισορροπίας και την συχνότητα ταλάντωσης της αλυσίδας γύρω από αυτή τη θέση. Δίνεται ότι ΑΒ = ΑΓ = 3L/2, όπου Α το σημείο συνάντησης του οριζόντιου και του κεκλιμένου επιπέδου. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της αλυσίδας και του οριζόντιου ή κεκλιμένου επιπέδου.

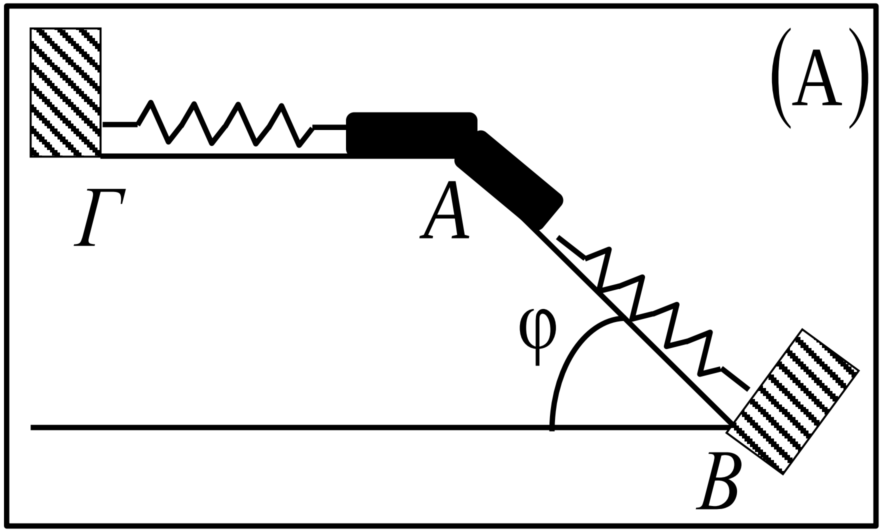


Έστω ότι μήκος x της αλυσίδας είναι στο κεκλιμένο επίπεδο.

Τότε, στο κεκλιμένο επίπεδο υπάρχει δύναμη προς τα κάτω ίση με $Mg\dfrac{x\sin\varphi}{L} - k\left(x - \dfrac{L}{2}\right)$,

ενώ στο οριζόντιο επίπεδο δύναμη $-k\left[\dfrac{L}{2} - (L - x)\right]$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΛΥΣΙΔΑ – ΕΛΑΤΗΡΙΑ



$$\text{Ισορροπία}: F=0 \Rightarrow -\left(2k - Mg\frac{\sin\varphi}{L}\right)x_{eq} + kL = 0 \Rightarrow x_{eq} = \left(2kL - Mg\sin\varphi\right)/kL^2$$

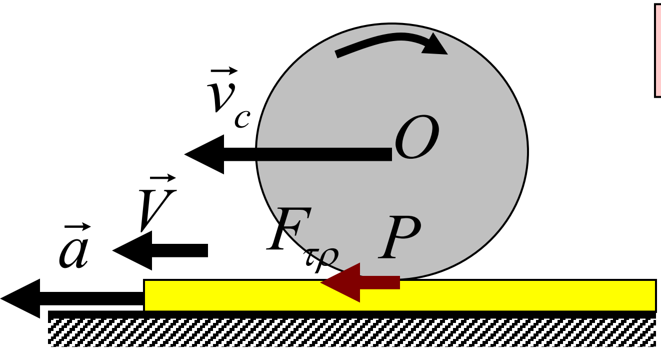
Σε εκτροπή από την κατάσταση ισορροπίας έχουμε $x = x_{eq} + \Delta x$

και η δύναμη είναι $F = -\left(2k - Mg\dfrac{\sin\varphi}{L}\right)\Delta x.$

Επομένως η αλυσίδα εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{2kL - Mg\sin\varphi}{ML}}$

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΣΕ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Κύλινδρος βρίσκεται πάνω σε επιφάνεια που σύρεται με επιτάχυνση a κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου. Ποια είναι η κίνηση του κυλίνδρου (υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει).



Στον κύλινδρο ασκείται μόνο η δύναμη τριβής $F_{\tau\rho}$.

Αν v_c η ταχύτητα του κέντρου μάζας O του κυλίνδρου τότε $M\, dv_c/dt = F_{\tau\rho}$ (1).

Η τριβή ασκεί ροπή $F_{\tau\rho}R$ ως προς το O και

$$F_{\tau\rho}R = I_c \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\omega}{dt} \quad (2).$$

Οι (1) και (2) δίνουν $M\dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{2}MR\dfrac{d\omega}{dt}$ (3).

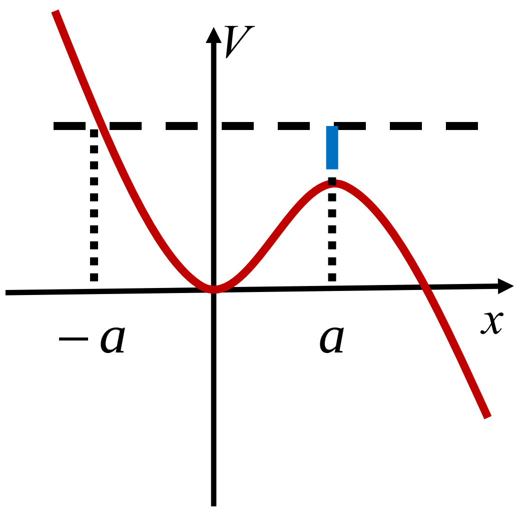
Αν V είναι η ταχύτητα της επιφάνειας τότε $v_c = V - R\omega$ και $\dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{dV}{dt} - R\dfrac{d\omega}{dt}$ (4).

Χρησιμοποιώντας την (4) στην (3) βρίσκουμε $\dfrac{3}{2}R\dfrac{d\omega}{dt} = a(\equiv \dfrac{dV}{dt})$

και $dv_c/dt = a/3,\ F_{\tau\rho} = Ma/3.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ένα σώμα μάζας *m* κινείται σε μία διάσταση (πάνω στον άξονα *x*) υπό την επίδραση της δύναμης $F(x)=-2kx+3kx^2/a$, όπου k και a είναι θετικές σταθερές.
(α) Ποιά είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σώματος, αν $U(0)=0$;
(β) Να σχεδιασθεί πρόχειρα η $U(x)$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος καθώς και το είδος ισορροπίας στο καθένα. (γ) Αν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση $x=-a$ με μηδενική αρχική ταχύτητα, υπολογίστε με πόση ταχύτητα θα περάσει από τη θέση όπου η δυναμική του ενέργεια είναι μέγιστη. δ) Ποιά είναι η ενέργεια διαφυγής του σώματος από τη θέση x=0;



α) Είναι $F=-dV/dx \Rightarrow V(x)=kx^2-kx^3/a.$

β) Σημείο ευσταθούς ισορροπίας $: x=0.$

Σημείο ασταθούς ισορροπίας $: x=a.$

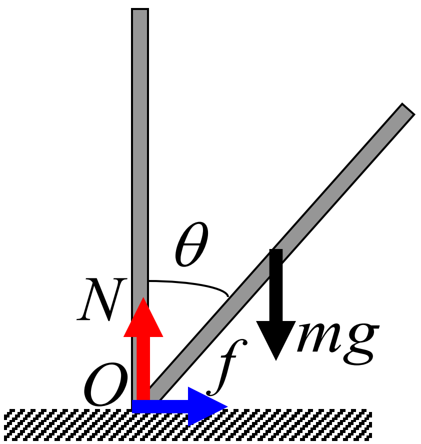
γ) Αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει για την κινητική ενέργεια E_K στο $x=a: E_K=V(-a)-V(a)\Rightarrow$

$$\Rightarrow E_K=2ka^3/a=2ka^2\Rightarrow v=\sqrt{2mE_K}=2\sqrt{mk}\,a.$$

δ) Η ενέργεια που απαιτείται είναι η $V(a)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ στέκεται αρχικά κατακόρυφα πάνω σε δάπεδο που έχει συντελεστή στατικής τριβής μ. Η ράβδος εκτρέπεται λίγο και αφήνεται να πέσει. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο (υποθέτουμε ότι η ράβδος δεν έχει ολισθήσει). Βρείτε ακόμη τον συντελεστή μ αν η ολίσθηση αρχίζει για $\theta = 30^{\circ}$.



Στην ράβδο ασκούνται το βάρος, η κάθετη αντίδραση N και η τριβή f.

Αν $\dot{\omega} = d\omega/dt$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση τότε λόγω της ροπής του βάρους ως προς O έχουμε

$$mgl\sin\theta = I\dot{\omega} = \frac{1}{3}m(2l)^2\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\theta \quad (1).$$

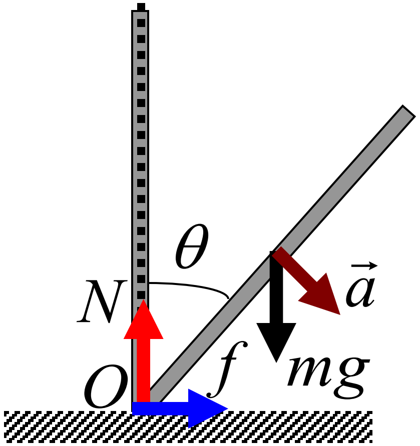
Έχουμε μια μεταβλητή $\dot{\omega}$ και για να βρούμε την ω πρέπει να ολοκληρώσουμε:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\omega^2\right) = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega^2}\mathrm{d}\left(\omega'^2\right) = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\int_0^{\theta}\sin\theta' d\theta' \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(1-\cos\theta\right) \quad (2).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ στέκεται αρχικά κατακόρυφα πάνω σε δάπεδο που έχει συντελεστή στατικής τριβής μ. Η ράβδος εκτρέπεται λίγο και αφήνεται να πέσει. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο (υποθέτουμε ότι η ράβδος δεν έχει ολισθήσει). Βρείτε ακόμη τον συντελεστή μ αν η ολίσθηση αρχίζει για $\theta = 30^{\circ}$.



Η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ αντιστοιχεί σε επιτάχυνση $a = \dot{\omega} l$ του κέντρου μάζας.

Χρησιμοποιώντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση βρίσκουμε

$$(mg - N) = m\dot{\omega} l \sin\theta = \frac{3}{4} mg \sin^2\theta \quad (1).$$

$$f = ml\dot{\omega}\cos\theta = \frac{3}{4} mg \sin\theta\cos\theta \quad (2).$$

Μόλις αρχίζει η ολίσθηση είναι $f = \mu N$ και από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$N = \frac{mg}{4}\left(4 - 3\sin^2\theta\right), \quad \mu = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{4 - 3\sin^2\theta}. \text{ Για } \theta = 30^{o}, \ \mu = 0{,}40.$$