ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΠΥΡΑΥΛΟΣ

Πύραυλος Π με μάζα $M_0 = m_0 + m_F$ αρχίζει ανάφλεξη με ρυθμό $dm/dt = \mu(t)$ στέλνοντας καύσιμα προς τα πίσω με σχετική ταχύτητα υ_σ. (α) Βρείτε το $\mu(t)$ για να κινείται ο Π με σταθερή επιτάχυνση a. (β) Βρείτε την ταχύτητα του Π όταν τελειώνουν τα καύσιμα. (γ) Βρείτε το $\mu(t)$ αν ο Π κινείται κατακόρυφα και δέχεται τη δύναμη παγκόσμιας έλξης από τη Γη.

(α) Έστω ότι τη χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει συνολική μάζα M

και ότι τη χρονική στιγμή $t+dt$ έχει εκτοξεύσει καύσιμα μάζας $dm = \mu(t)dt$.

Τότε έχουμε από τον ορισμό της ώθησης $(M-dm)(\upsilon+d\upsilon)+(\upsilon-\upsilon_\sigma)dm - M\upsilon = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Ma = \upsilon_\sigma \mu(t) \Rightarrow \mu(t) = a\,\frac{M_0 - \int_0^t \mu(t')dt'}{\upsilon_\sigma} \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = -\frac{a\mu}{\upsilon_\sigma} \Rightarrow \mu(t) = Ce^{-at/\upsilon_\sigma}$$

Για $t=0$ έχουμε $M = M_0$ και βρίσκουμε $C = aM_0/\upsilon_\sigma$.

(β) Τα καύσιμα τελειώνουν τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία

$$M_0 - \int_0^{t_1} \frac{aM_0}{\upsilon_\sigma} e^{-at/\upsilon_\sigma} dt = m_0 \Rightarrow m_F = M_0\left(1-e^{-at_1/\upsilon_\sigma}\right) \Rightarrow e^{-at_1/\upsilon_\sigma} = \frac{m_0}{M_0} \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_\sigma}{a}\ln\frac{M_0}{m_0}.$$

Η ταχύτητα είναι τότε $\upsilon_1 = at_1 = \upsilon_\sigma \ln(M_0/m_0) = \upsilon_\sigma \ln(1+m_F/m_0)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΠΥΡΑΥΛΟΣ

Πύραυλος Π με μάζα $M_0 = m_0 + m_F$ αρχίζει ανάφλεξη με ρυθμό $dm/dt = \mu(t)$ στέλνοντας καύσιμα προς τα πίσω με σχετική ταχύτητα υ_σ. (α) Βρείτε το $\mu(t)$ για να κινείται ο Π με σταθερή επιτάχυνση a. (β) Βρείτε την ταχύτητα του Π όταν τελειώνουν τα καύσιμα. (γ) Βρείτε το $\mu(t)$ αν ο Π κινείται κατακόρυφα με την σταθερή επιτάχυνση του ερωτήματος (α) και δέχεται τη δύναμη παγκόσμιας έλξης από τη Γη.

(γ) Έστω ότι τη χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει συνολική μάζα M και τη χρονική στιγμή $t + dt$ έχει εκτοξεύσει καύσιμα μάζας $dm = \mu(t)dt$ (και $dM = -\mu dt$).

Τότε έχουμε:

$$(M - dm)(\upsilon + d\upsilon) + (\upsilon - \upsilon_\sigma)dm - M\upsilon = -Mg_0 \frac{R^2}{r^2} dt \Rightarrow \left(\text{είναι } r(t) = R + \frac{at^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow Md\upsilon - \upsilon_\sigma dm = -Mg_0 \frac{R^2}{r^2} dt \Rightarrow M(t)a - \upsilon_\sigma \mu(t) = -Mg_0 \frac{R^2}{\left(R + at^2/2\right)^2} \quad (1).$$

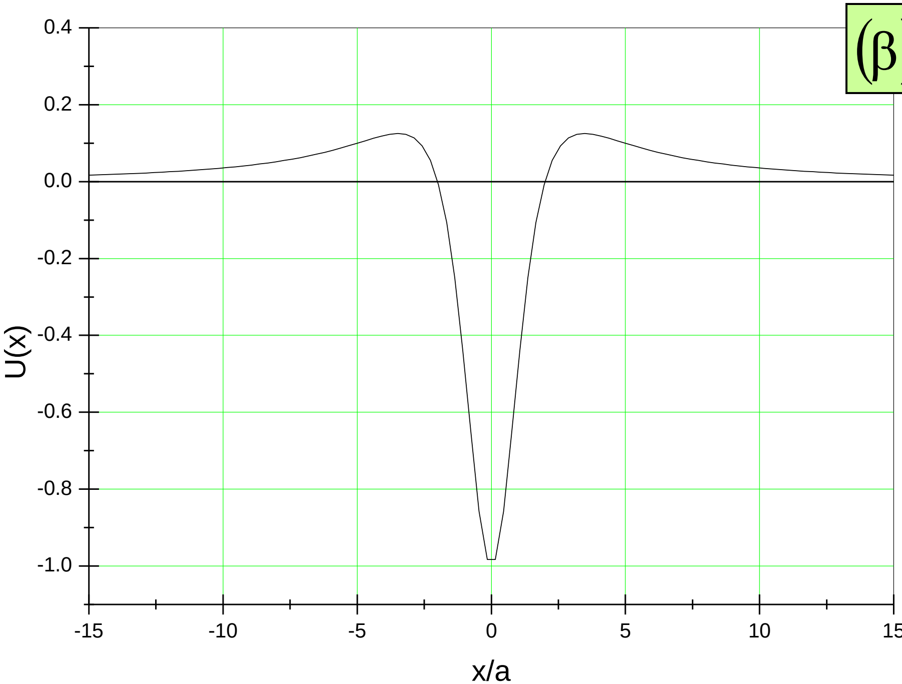
$$\Rightarrow Ma + \upsilon_\sigma \frac{dM}{dt} = -Mg_0 \frac{R^2}{\left(R + at^2/2\right)^2} \Rightarrow -\frac{dM}{M} = \frac{1}{\upsilon_\sigma}\left[\frac{R^2}{\left(R + at^2/2\right)^2} + a\right]dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{M_0}{M(t)} = \frac{1}{\upsilon_\sigma}\left(\int_0^t \frac{R^2 dt'}{\left(R + at'^2/2\right)^2} + \int_0^t a dt'\right) = \frac{R^{1/2}}{\upsilon_\sigma}\frac{\arctan\left(at/2R\right)}{\sqrt{2a}} + \frac{at}{\upsilon_\sigma} \text{ και η (1) δίνει το } \mu(t).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Σώμα μάζας m κινείται σε δυναμικό $U(x)=U_0 a^2 \dfrac{x^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$. (α) Υπολογίστε τη δύναμη $F(x)$. (β) Βρείτε τα σημεία μηδενισμού των $U(x), F(x)$ και σχεδιάστε την $U(x)$. (γ) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και τη συχνότητα ταλάντωσης γύρω από αυτά.

ΛΥΣΗ: (α) $F(x)=-\dfrac{dU}{dx}=U_0 a^2\left[\dfrac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}-2\dfrac{\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2+a^2\right)^3}\right]=2U_0 a^2 x\dfrac{-x^2+3a^2}{\left(x^2+a^2\right)^3}$



(β) $U(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm a, F(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\pm\sqrt{3}a.$

$x=0$: σημείο ευσταθούς ισορροπίας,

$x=\pm\sqrt{3}a$: σημεία ασταθούς ισορροπίας.

Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $x=0: U(x)\approx U(0)+\dfrac{1}{2}U''(0)x^2+\ldots$

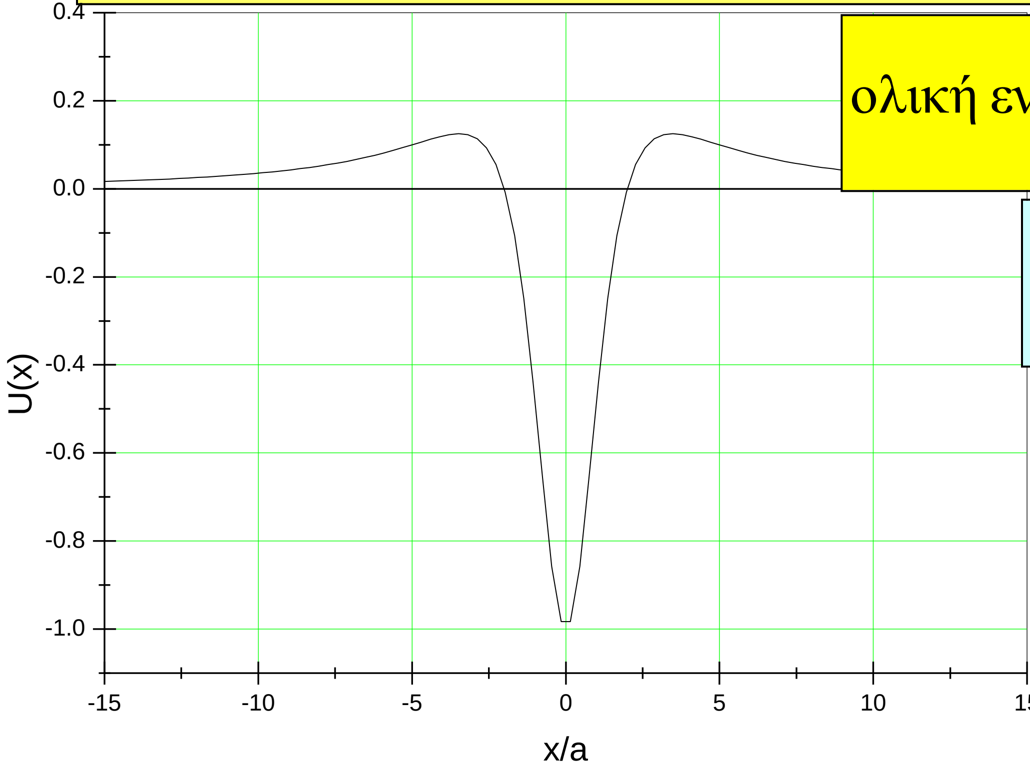
Συχνότητα ταλάντωσης γύρω από το $x=0: \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, όπου $k=U''(0)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Σώμα μάζας m κινείται σε δυναμικό $U(x)=U_0 a^2 \dfrac{x^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

(δ) Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δοθεί στην m όταν είναι στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας για να μπορέσει αυτή να διαφύγει στο $+\infty$. (ε) Βρείτε τα όρια κίνησης όταν η ενέργεια είναι μηδέν, καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα σε αυτήν την περίπτωση.

(δ) Για να διαφύγει από το $x=0$ στο $x=+\infty$ θα πρέπει το σώμα να αποκτήσει



ολική ενέργεια $E \ge U\left(\sqrt{3}a\right)=U_0 a^2 \dfrac{2a^2}{\left(4a^2\right)^2}=\dfrac{U_0}{8}$.

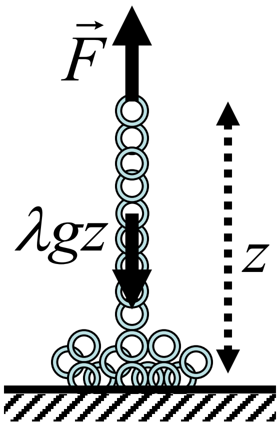
Επομένως, πρέπει να δοθεί ελάχιστη κινητική ενέργεια $K_{\min}=U\left(\sqrt{3}a\right)-U(0)$

$$\Rightarrow K_{\min}=\frac{9U_0}{8} \Rightarrow \upsilon_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{U_0}{m}}.$$

(ε) Όρια κίνησης $x=\pm a$, για $x=0$ μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{\max}=\sqrt{2U_0/m}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΝΥΨΩΣΗ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Αλυσίδα γραμμικής πυκνότητας λ βρίσκεται σωριασμένη στο έδαφος. Να βρεθεί η κατακόρυφη F που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή α) ταχύτητα, β) επιτάχυνση γ, αν το ένα άκρο της αλυσίδας ξεκινά από το έδαφος με μηδενική ταχύτητα. Υπολογίστε, συναρτήσει του ύψους του άνω άκρου της αλυσίδας και για τις δύο περιπτώσεις α) και β) το έργο W που έχει παραχθεί από τη δύναμη, την κινητική ενέργεια E_K και τη δυναμική ενέργεια E_Δ της αλυσίδας, καθώς και την απώλεια ενέργειας Q ως κλάσμα της E_K.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΛΥΣΙΔΑ – ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Ένα κομμάτι ομογενούς αλυσίδας μήκους L και συνολικής μάζας M βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ το υπόλοιπο κομμάτι βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κάτω άκρο της αλυσίδας είναι προσαρτημένο στην άκρη ελατηρίου E_1 σταθεράς k και φυσικού μήκους L. Το άλλο άκρο του E_1, το οποίο βρίσκεται ολόκληρο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, είναι αναρτημένο από σταθερό σημείο B. Το άνω άκρο της αλυσίδας είναι δεμένο σε ελατήριο E_2 σταθεράς k και φυσικού μήκους L, το οποίο βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο και είναι αναρτημένο σε σταθερό σημείο Γ. Βρείτε την θέση ισορροπίας και την συχνότητα ταλάντωσης της αλυσίδας γύρω από αυτή τη θέση. Δίνεται ότι AB = AΓ = 3L/2, όπου A το σημείο συνάντησης του οριζόντιου και του κεκλιμένου επιπέδου. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της αλυσίδας και του οριζόντιου ή κεκλιμένου επιπέδου.