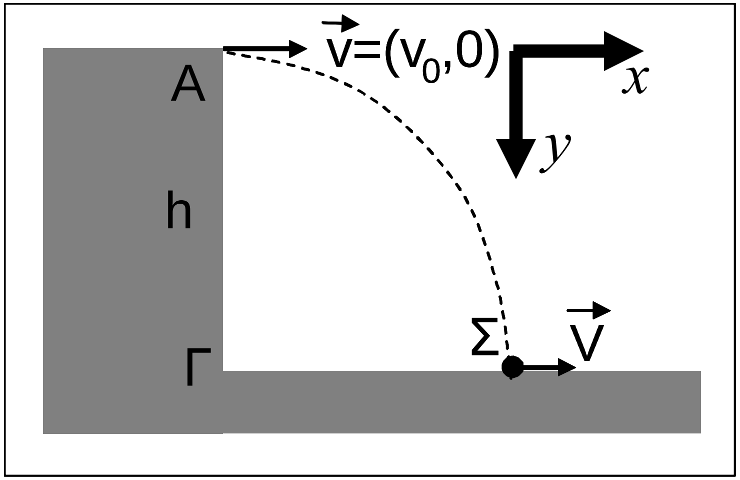
ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΟΛΗ

Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}=(v_0,0)$ με σκοπό να πετύχει στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V}=(v_1,0)$ οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα $(t=0)$ από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στην σφαίρα, είναι ανάλογη της ταχύτητας : $-k\vec{v}$ $(k>0)$. α) Γράψτε την διανυσματική εξίσωση κίνησης για την σφαίρα. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου.



α) Η εξίσωση κίνησης είναι $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-k\vec{v}+m\vec{g}$, ή

$$dv_x/dt=-kv_x/m,\; dv_y/dt=g-kv_y/m.$$

β) Είναι $\dfrac{dv_x}{dt}=-\dfrac{k}{m}v_x \Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v_x}\frac{dv'_x}{v'_x}=-\frac{k}{m}\int_0^t dt' \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_x=v_0\exp(-kt/m)$$

Είναι ακόμη $\dfrac{dv_y}{g-kv_y/m}=dt \Rightarrow \displaystyle\int_0^{v_y}\frac{dv'_y}{g-kv'_y/m}=\int_0^t dt' \Rightarrow v_y=\frac{mg}{k}\left[1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right]$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΟΛΗ

Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}=\left(v_0,0\right)$ με σκοπό να πετύχει στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V}=\left(v_1,0\right)$ οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα $(t=0)$ από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στην σφαίρα, είναι ανάλογη της ταχύτητας : $-k\vec{v}\ \left(k>0\right)$. α) Γράψτε την διανυσματική εξίσωση κίνησης για την σφαίρα. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου.

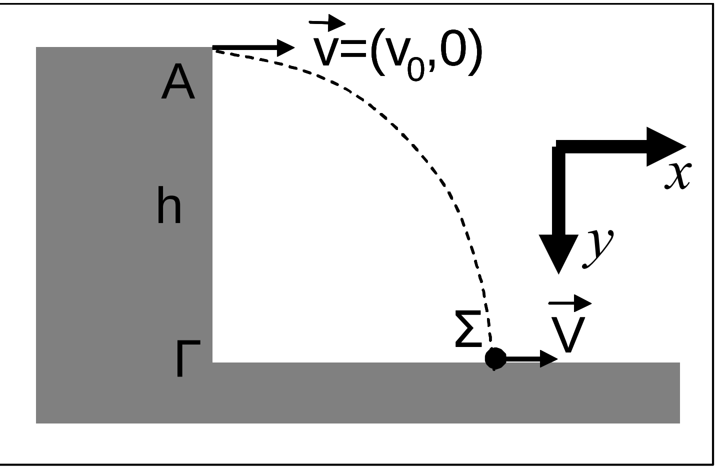
Είναι ακόμη $\dfrac{dv_y}{g-kv_y/m}=dt \Rightarrow \int_0^{v_y}\dfrac{dv'_y}{g-kv'_y/m}=\int_0^t dt' \Rightarrow v_y=\dfrac{mg}{k}\left[1-\exp\left(-\dfrac{kt}{m}\right)\right]$

αφού $\int_0^{v_y}\dfrac{dv'_y}{g-kv'_y/m}=-\dfrac{m}{k}\int_g^{g-kv_y/m}\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{m}{k}\ln\left(1-\dfrac{kv_y}{mg}\right)=\int_0^t dt' \Rightarrow$

$$v_y=\frac{mg}{k}\left[1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right]$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΟΛΗ

γ) Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως την αρχή των αξόνων).



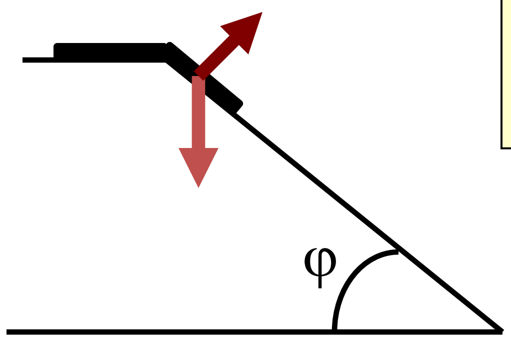
γ) Χρειάζεται να ολοκληρώσουμε ακόμη μια φορά :

$$x(t) = \int_0^t v_x dt' = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{kt'}{m}\right) dt' = -\frac{mv_0}{k}\left[\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - 1\right] = \frac{mv_0}{k}\left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right]$$

Ακόμη $y(t) = \int_0^t v_y dt' = \frac{mg}{k}\int_0^t \left[1 - \exp\left(-\frac{kt'}{m}\right)\right] dt' = \frac{mgt}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right].$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΛΥΣΙΔΑ – ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκος L και μάζας M είναι τοποθετημένη έτσι ώστε την χρονική στιγμή $t=0$ τμήμα του μήκους της x_0 να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ. Αν δεν υπάρχουν τριβές βρείτε την ταχύτητα την οποία έχει αποκτήσει η αλυσίδα όταν βρίσκεται πια εξ' ολοκλήρου στο κεκλιμένο επίπεδο.



ΛΥΣΗ : Αν $m(t)$ η μάζα της αλυσίδας που βρίσκεται την χρονική στιγμή t πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο,

τότε από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m(t) g \sin\varphi = M\, dv/dt\,.$$

Αλλά $m(t) = M\, x(t)/L$ και $\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$.

$$\text{Άρα } Mg\frac{x\sin\varphi}{L} = Mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{g\sin\varphi}{L}\int_{x_0}^{L} x'dx' = \int_0^v v'dv' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g\sin\varphi}{2L}\left(L^2 - x_0^2\right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g\sin\varphi}{L}\left(L^2 - x_0^2\right)}.$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ – ΩΘΗΣΗ

Η γενική μορφή του 2ου νόμου του Νεύτωνα είναι

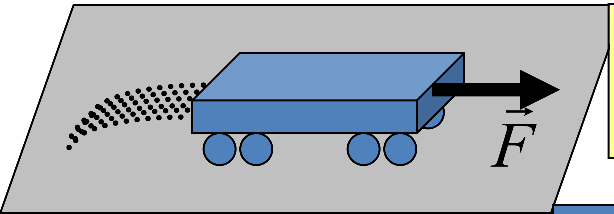
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M\vec{v})}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt}. \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε $\vec{F}dt = d\vec{p} = Md\vec{v} + \vec{v}dM. \quad (2)$

Η ποσότητα $\vec{F}dt$ αντιπροσωπεύει την ώθηση της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα dt.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΑΓΟΝΙ ΜΕ ΑΜΜΟ

Βαγόνι μάζας M_1 γεμάτο με άμμο μάζας M_2 κινείται πάνω σε λείες ευθύγραμμες ράγες. Στο βαγόνι ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη F και η άμμος χύνεται από μία τρύπα που βρίσκεται στο πίσω μέρος του βαγονιού με σταθερό ρυθμό $dm/dt = \lambda$ και σταθερή οριζόντια ταχύτητα v_1 ως προς το βαγόνι. α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης. β) Βρείτε για το χρονικό διάστημα που υπάρχει άμμος την ταχύτητα του βαγονιού σαν συνάρτηση του χρόνου αν δίνεται η $v(t=0) = v_0$.



α) Έστω ότι τις χρονικές στιγμές t και $t+dt$ χύνεται άμμος dm και η ταχύτητα του βαγονιού είναι v και $v+dv$.

Αν την στιγμή t υπάρχει $M = M_2 - \lambda t$ άμμος στο βαγόνι τότε

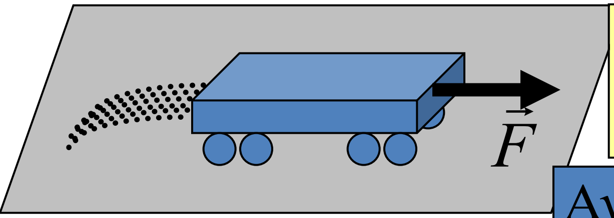
$$\underbrace{(M_1 + M - dm)(v + dv)}_{\text{Ορμή βαγονιού τη στιγμή } t+dt} + \underbrace{(v - v_1)dm}_{\text{Ορμή άμμου dm για } t+dt} - \underbrace{(M_1 + M)v}_{\text{Ορμή βαγονιού τη στιγμή } t} = Fdt \Rightarrow (M_1 + M)dv - v_1 dm = Fdt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F + \lambda v_1}{M_1 + M_2 - \lambda t} \quad (1).$$

Σημείωση: Σε εκφράσεις σαν την παραπάνω μπορούμε να αγνοήσουμε γινόμενα διαφορικών (είναι αμελητέα σε σχέση με τους άλλους όρους), εδώ τον όρο $dmdv$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΒΑΓΟΝΙ ΜΕ ΑΜΜΟ

Βαγόνι μάζας M_1 γεμάτο με άμμο μάζας M_2 κινείται πάνω σε λείες ευθύγραμμες ράγες. Στο βαγόνι ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη F και η άμμος χύνεται από μία τρύπα που βρίσκεται στο πίσω μέρος του βαγονιού με σταθερό ρυθμό $dm/dt = \lambda$ και σταθερή οριζόντια ταχύτητα v_1 ως προς το βαγόνι. α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης. β) Βρείτε για το χρονικό διάστημα που υπάρχει άμμος την ταχύτητα του βαγονιού σαν συνάρτηση του χρόνου αν δίνεται η $v(t=0) = v_0$.



α) Έστω ότι τις χρονικές στιγμές t και $t+dt$ χύνεται άμμος dm και η ταχύτητα του βαγονιού είναι v και $v+dv$.

Αν την στιγμή t υπάρχει $M = M_2 - \lambda t$ άμμος στο βαγόνι τότε

$$\underbrace{(M_1 + M - dm)(v+dv)}_{\text{Ορμή βαγονιού τη στιγμή } t+dt} + \underbrace{(v - v_1)dm}_{\text{Ορμή άμμου dm για } t+dt} - \underbrace{(M_1 + M)v}_{\text{Ορμή βαγονιού τη στιγμή } t} = Fdt \Rightarrow$$

$$(M_1 + M)dv - v_1 dm = Fdt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F + \lambda v_1}{M_1 + M_2 - \lambda t} \quad (1).$$

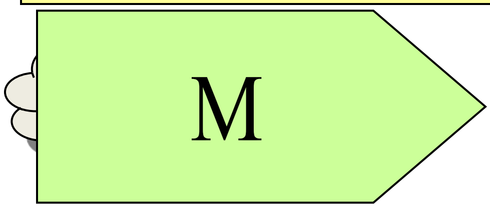
Η (1) είναι η εξίσωση κίνησης του βαγονιού.

β) Ολοκληρώνοντας την εξίσωση κίνησης (1):

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_0^t \frac{F + \lambda v_1}{M_1 + M_2 - \lambda t'} dt' \Rightarrow v(t) - v_0 = \left(\frac{F}{\lambda} + v_1\right) \ln \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 - \lambda t}.$$

ΚΙΝΗΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΩΝ

Διαστημόπλοιο εκτινάσσει καυσαέρια προς τα πίσω με ταχύτητα V_0 ως προς το διαστημόπλοιο. Ο ρυθμός μείωσης της μάζας του διαστημοπλοίου είναι σταθερός και ίσος με α. Θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα του οχήματος, υποθέτοντας ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.



Έστω ότι τις χρονικές στιγμές t και $t+dt$ εκτοξεύονται αέρια μάζας dm $\left(dm=\alpha dt\right)$ και η ταχύτητα του πυραύλου είναι v και $v+dv$.

Αν τη στιγμή t η μάζα του πυραύλου είναι $M=M_0-\alpha t$, τότε έχουμε

$$\underbrace{(M-dm)(v+dv)}_{\text{Ορμή πυραύλου τη στιγμή } t+dt}+\underbrace{(v-V_0)dm}_{\text{Ορμή αερίων dm για } t+dt}-\underbrace{\left(\overbrace{M_0-\alpha t}^{M}\right)v}_{\text{Ορμή πυραύλου τη στιγμή } t}=\overbrace{F}^{0}dt \Rightarrow Mdv-V_0\alpha dt=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv=\frac{V_0\alpha}{M_0-\alpha t}dt.$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\tilde{v}=\int_0^t \frac{V_0\alpha d\tilde{t}}{M_0-\alpha\tilde{t}} \Rightarrow v=v_0+V_0\ln\frac{M_0}{M_0-\alpha t}.$$

10. Ομογενής αλυσίδα μάζας M και μήκους L κρέμεται από ένα τραπέζι. Αν δεν υπάρχουν τριβές υπολογίστε την ταχύτητα της αλυσίδας όταν όλη βρίσκεται στον αέρα. Θεωρείστε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, εκτός του τραπεζιού βρίσκεται τμήμα της αλυσίδας μήκους a.

Λύση

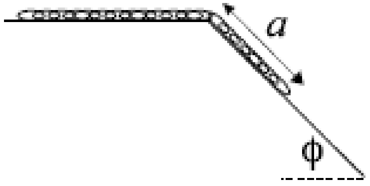
Στο τμήμα της αλυσίδας που βρίσκεται πάνω στο τραπέζι ασκείται το βάρος (αυτού του τμήματος) που εξουδετερώνεται από την αντίδραση του τραπεζιού (δεν υπάρχουν τριβές). Βέβαια υπάρχει και δύναμη, που ασκείται μέσω των κρίκων της αλυσίδας, από το τμήμα που κρέμεται εκτός του τραπεζιού. Αυτή η δύναμη είναι ίση με το βάρος του τμήματος που κρέμεται. Αυτή κινεί και όλο το σύστημα. Επομένως, για τυχαίο τμήμα x που κρέμεται, και έχει μάζα $(M/L)x$,

$$M\frac{dv}{dt} = \frac{M}{L}xg \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{L}xg \Rightarrow \frac{dv}{dx}v = \frac{1}{L}xg \Rightarrow vdv = \frac{x}{L}gdx$$

Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^v vdv = \int_a^L \frac{x}{L}gdx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{L^2 - a^2}{2}\frac{g}{L} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{(L^2 - a^2)g}{L}}$$

11. Ομογενής αλυσίδα μήκους L και μάζας M έχει τμήμα της μήκους a σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ. Να βρεθεί η ταχύτητα που αποκτά η αλυσίδα μόλις βρίσκεται ολόκληρη στο κεκλιμένο επίπεδο. Δεν υπάρχουν τριβές.



Λύση

Αν στο κεκλιμένο επίπεδο υπάρχει τμήμα της αλυσίδας μήκους x ($L > x > a$), το βάρος αυτού του τμήματος είναι $B_x = (B/L)x$. Η προβολή αυτού του βάρους στο κεκλιμένο επίπεδο τραβά ΟΛΗ την αλυσίδα προς τα κάτω (η προβολή του βάρους στη διεύθυνση την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο εξουδετερώνεται από την αντίδραση του επιπέδου)

$$B_x \sin\phi = M\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{B}{L}x\sin\phi = M\frac{dv}{dt}$$

Αυτό ξαναγράφεται

$$\begin{aligned}
M\frac{dv}{dt} = M\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = M\frac{dv}{dx}v = \frac{B}{L}x\sin\phi \Rightarrow \\
vdv = \frac{B}{ML}x\sin\phi dx = \frac{g}{L}x\sin\phi\, dx \Rightarrow \\
\int_0^v vdv = \int_a^x \frac{g}{L}x\sin\phi\, dx \Rightarrow \\
\frac{1}{2}v^2 = \frac{g}{L}\sin\phi\frac{1}{2}\left(x^2 - a^2\right)
\end{aligned}$$

Για $x = L$ θα έχουμε

$$v^2 = \frac{g}{L}\left(L^2 - a^2\right)\sin\phi$$

Μεταβλητή Μάζα

1. Ένα βαγονάκι κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Καθώς κινείται μια χοάνη από πάνω του το γεμίζει με άμμο σε ρυθμό $dm/dt = \lambda$. Βρείτε την ταχύτητα του βαγονιού ως συνάρτηση του χρόνου αν γνωρίζουμε ότι για $t = 0$ η μάζα είναι $m = m_0$.

ΛΥΣΗ Ας βρούμε πρώτα την $m(t)$

$$\frac{dm}{dt} = \lambda \Rightarrow dm = \lambda\, dt \Rightarrow \int_{m_0}^{m} dm = \int_0^t \lambda\, dt \Rightarrow m - m_0 = \lambda t \Rightarrow m = m_0 + \lambda t$$

Στον κάθετο άξονα οι δυνάμεις ισορροπούν. Θεωρούμε ότι η άμμος που πέφτει έχει μηδενική ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ταχύτητα. Για κάποια τυχαία χρονική στιγμή θεωρούμε το σύστημα του βαγονιού, με ό,τι άμμο έχει μέσα, και την άμμο που θα πέσει δm, στο επόμενο χρονικό διάστημα δt. Η άμμος που θα πέσει έχει μηδενική ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ορμή, οπότε το σύστημά μας έχει ορμή mv. Μετά την πτώση της άμμου η μάζα του βαγονιού γίνεται $m + \delta m$ και η ταχύτητά του $v + \delta v$. Η διαφορά ορμής θα είναι

$$\delta p = (m + \delta m)\,(v + \delta v) - mv = m\delta v + v\delta m$$

Δεν έχουμε τριβή οπότε η χρονική μεταβολή της, δηλαδή η δύναμη, είναι μηδέν

$$\frac{m\delta v + v\delta m}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{\delta v}{dt} + v\frac{\delta m}{dt} = 0$$

Μεταβλητή Μάζα

1. Ένα βαγονάκι κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Καθώς κινείται μια χοάνη από πάνω του το γεμίζει με άμμο σε ρυθμό $dm/dt = \lambda$. Βρείτε την ταχύτητα του βαγονιού ως συνάρτηση του χρόνου αν γνωρίζουμε ότι για $t = 0$ η μάζα είναι $m = m_0$.

και στο όριο $\delta t \to 0$

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + v\lambda = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v(t)} = -\frac{\lambda}{m(t)}dt \Rightarrow \frac{dv}{v(t)} = -\frac{\lambda}{m_0 + \lambda t}\,dt$$

Ολοκληρώνοντας

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{\lambda}{m_0 + \lambda t}\,dt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\ln\frac{m_0 + \lambda t}{m_0} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = \frac{m_0}{m_0 + \lambda t} \Rightarrow v = \frac{v_0 m_0}{m_0 + \lambda t}$$