6. Σώμα μάζας m κινείται σε μια διεύθυνση. Στην κίνησή του συναντά αντίσταση της μορφής $mk(v^2+av)$, όπου k και a θετικές σταθερές. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητά του είναι v_0, βρείτε α) το διάστημα που θα διανύσει έως ότου ακινητοποιηθεί και β) ο χρόνος που θα περάσει για να γίνει η ταχύτητά του $v_0/2$.

Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμου του Νεύτωνα έχουμε

$$m\frac{dv}{dt} = -mk\left(v^2+av\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv\left(v+a\right)$$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές

$$\frac{dv}{v(v+a)} = -kdt \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v(v+a)} = -\int_0^t kdt$$

Χρησιμοποιώντας την απλή ταυτότητα

$$\frac{1}{v(v+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+a}\right)$$

$$\frac{1}{v(v+a)} = \frac{A}{v}+\frac{B}{v+a} = \frac{Av+Aa+Bv}{v(v+a)} = \frac{(A+B)v+Aa}{v(v+a)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Aa=1 \end{cases}$$

6. Σώμα μάζας m κινείται σε μια διεύθυνση. Στην κίνησή του συναντά αντίσταση της μορφής $mk(v^2+av)$, όπου k και a θετικές σταθερές. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητά του είναι v_0, βρείτε α) το διάστημα που θα διανύσει έως ότου ακινητοποιηθεί και β) ο χρόνος που θα περάσει για να γίνει η ταχύτητά του $v_0/2$.

η σχέση γράφεται

$$\frac{1}{a}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}-\frac{1}{a}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v+a}=-kt\Rightarrow\frac{1}{a}\ln\frac{v}{v_0}-\frac{1}{a}\ln\frac{v+a}{v_0+a}=-kt\Rightarrow$$

$$\ln\frac{v(v_0+a)}{v_0(v+a)}=-akt\Rightarrow v(v_0+a)=v_0(v+a)e^{-akt}\Rightarrow$$

$$v=\frac{v_0ae^{-akt}}{v_0+a-v_0e^{-akt}}$$

Το διάστημα που θα διανύσει δίνεται από το ολοκλήρωμα της ταχύτητας ως προς το χρόνο

$$s=\int_0^\infty vdt=\int_0^\infty\frac{v_0ae^{-akt}}{v_0+a-v_0e^{-akt}}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{d\left(-v_0e^{-akt}\right)\frac{1}{k}}{v_0+a-v_0e^{-akt}}=\frac{1}{k}\int_0^\infty\frac{d\left(a+v_0-v_0e^{-akt}\right)\frac{1}{k}}{v_0+a-v_0e^{-akt}}=$$

$$=\frac{1}{k}\ln\left(v_0+a-v_0e^{-akt}\right)\Big|_0^\infty=\frac{1}{k}\ln\frac{a+v_0}{a}$$

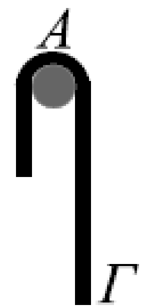
6. Σώμα μάζας m κινείται σε μια διεύθυνση. Στην κίνησή του συναντά αντίσταση της μορφής $mk(v^2+av)$, όπου k και a θετικές σταθερές. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητά του είναι v_0, βρείτε α) το διάστημα που θα διανύσει έως ότου ακινητοποιηθεί και β) ο χρόνος που θα περάσει για να γίνει η ταχύτητά του $v_0/2$.

Από τη σχέση που δίνει την ταχύτητα βρίσκουμε τον χρόνο για να μειωθεί στη μισή της αρχικής

$$\frac{v_0}{2} = \frac{v_0 a e^{-akt}}{v_0 + a - v_0 e^{-akt}} \Rightarrow v_0 + a - v_0 e^{-akt} = 2ae^{-akt} \Rightarrow$$

$$e^{-akt} = \frac{v_0 + a}{2a + v_0} \Rightarrow t = -\frac{1}{ak}\ln\frac{v_0 + a}{2a + v_0} = \frac{1}{ak}\ln\frac{2a + v_0}{v_0 + a}$$

7. Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας M και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχ.). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)$=b$ ($b > L/2$). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν (ΑΓ)$=2L/3$.



Λύση
Υπενθυμίζουμε την απλή περίπτωση με την αβαρή τροχαλία, το αβαρές σχοινί και τις δύο μάζες. Αν το σύστημα κινείται με (κοινή) επιτάχυνση a, εφαρμόζοντας το νόμου του Νεύτωνα για τις δυό μάζες παίρνουμε

$$T_2 - b_2 = m_2 a, \qquad B_1 - T_1 = m_1 a, \qquad T_1 = T_2$$

οπότε, η επιτάχυνση δίνεται

$$a = \frac{B_1 - B_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

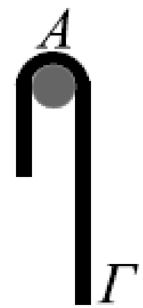
Ανάλογα στην περίπτωσή μας, οι μάζες των δύο τμημάτων του σχοινιού είναι ανάλογα του μήκους τους

$$m_1 = \frac{M}{L}\, x, \qquad m_2 = \frac{M}{L}\,(L - x)$$

και η επιτάχυνση

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g = \frac{M}{L}\,\frac{2x - L}{M}\, g = \left(2\frac{x}{L} - 1\right) g$$

7. Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας M και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχ.). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)=b ($b > L/2$). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν (ΑΓ)=$2L/3$.



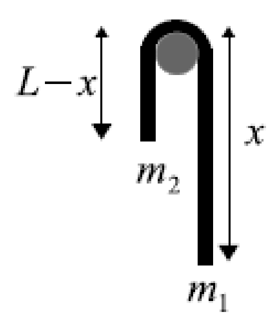
Όταν $x = 2L/3$ η επιτάχυνση θα είναι

$$a = \left(2\frac{2L/3}{L} - 1\right) g = \frac{g}{3}$$

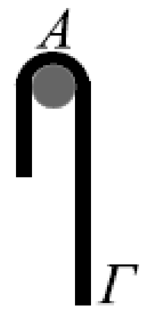
Για να βρούμε την ταχύτητα σ' αυτήν την θέση, θα εκφράσουμε την επιτάχυνση ως συνάρτηση της θέσης

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow adx = vdv$$

και ολοκληρώνοντας



7. Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας M και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχ.). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)=b ($b > L/2$). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν (ΑΓ)=$2L/3$.



$$\int_b^{2L/3} a dx = \int_0^v v dv \Rightarrow \int_b^{2L/3} \left(2\frac{x}{L} - 1\right) g\, dx = \frac{v^2}{2} \Rightarrow$$

$$g\left(\frac{2}{L}\frac{x^2}{2} - x)\right)\Big|_b^{2L/3} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\left(b - \frac{b^2}{L} - \frac{2L}{9}\right)}$$

8. Σηκώνουμε μια ομογενή αλυσίδα μάζας M και μήκους L εφαρμόζοντας μια κάθετη προς τα πάνω δύναμη F. βρείτε την εξάρτηση του μέτρου της δύναμης αυτής από το ύψος που έχει φτάσει η αλυσίδα, αν θέλουμε η ταχύτητα του τμήματος της αλυσίδας που είναι στον αέρα να είναι σταθερή.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ότι το πάνω άκρο της αλυσίδας έχει φτάσει σε ύψος y ($< L$), οπότε και η μάζα του τμήματος που είναι στον αέρα είναι $m_y = (M]L)y$. Στο τμήμα αυτό αυτό της αλυσίδας ασκούνται το βάρος της $B_y = m_y g$, προς τα κάτω βέβαια, και η δύναμη F προς τα πάνω. Από το νόμου του Νεύτωνα έχουμε (v θεωρούμε τη σταθερή ταχύτητα της αλυσίδας)

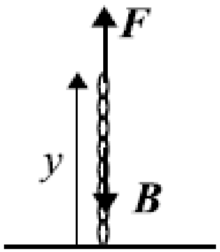
$$
\begin{aligned}
F - B_y = \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}(m_y v) \Rightarrow \\
F - \frac{M}{L} g y &= v \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{L} y\right) \Rightarrow \\
F - \frac{M}{L} g y &= v \frac{M}{L} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \\
F - \frac{M}{L} g y &= v^2 \frac{M}{L}
\end{aligned}
$$

μιας και dy/dt είναι η ταχύτητα του άκρου της αλυσίδας που είναι σταθερή και ίση με v (όπως και για όλο το τμήμα της αλυσίδας που βρίσκεται στον αέρα). Επομένως

$$F = \frac{M}{L} g y + \frac{M}{L} v^2, \quad \text{για } y \le L$$

8. Σηκώνουμε μια ομογενή αλυσίδα μάζας M και μήκους L εφαρμόζοντας μια κάθετη προς τα πάνω δύναμη F. βρείτε την εξάρτηση του μέτρου της δύναμης αυτής από το ύψος που έχει φτάσει η αλυσίδα, αν θέλουμε η ταχύτητα του τμήματος της αλυσίδας που είναι στον αέρα να είναι σταθερή.

Φυσικά, $y \geq L$, οπότε όλη η αλυσίδα είναι στον αέρα και κινείται με σταθερή ταχύτητα, η δύναμη που απαιτείται είναι ίση με το βάρος όλης της αλυσίδας.



Παρατήρηση: Η συνολική μεταβολή της ενέργειας της αλυσίδας είναι

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg\frac{L}{2}$$

Αυτή τη διαφορά την έδωσε η δύναμη F. Το έργο της είναι Βλέπουμε ότι, το έργο της δύναμης είναι μεγαλύτερο από την μεταβολή της ενέργειας της αλυσίδας κατά το ήμισυ της κινητικής ενέργειας. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι δεχτήκαμε ότι το τμήμα της αλυσίδας που ξεκινά να ανυψώνεται αποκτά ΑΚΑΡΙΑΙΑ την σταθερή ταχύτητα v της αλυσίδας.

9. Σφαίρα χαλαζιού πέφτει κατακόρυφα χωρίς αντίσταση αλλά η ακτίνα της αυξάνει: $dr/dt = \lambda r$. Αν για $t = 0$ η μάζα είναι m_0, η ακτίνα r_0 και η ταχύτητα $v_0 = 0$, βρείτε την μάζα ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και την οριακή ταχύτητα που πιάνει η σφαίρα.

Λύση

Βρίσκουμε αρχικά την ακτίνα ως συνάρτηση του χρόνου $r(t)$

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r \Rightarrow \frac{dr}{r} = \lambda dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = \int_0^{t} dt \Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = \lambda t \Rightarrow r = r_0 e^{\lambda t}$$

και η μάζα γίνεται

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho e^{3\lambda t} = m_0 e^{3\lambda t}$$

με ρ η πυκνότητα μάζας.

Η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος της σφαίρας. Οπότε

$$mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$$

Χρησιμοποιώντας την $m(t)$ που βρήκαμε, η τελευταία σχέση ξαναγράφεται

$$m_0 e^{3\lambda t} = 3\lambda v m_0 e^{3\lambda t} + m_0 e^{3\lambda t}\frac{dv}{dt} \Rightarrow g = 3\lambda v + \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - 3\lambda v \Rightarrow \frac{dv}{g - 3\lambda v} = dt$$

9. Σφαίρα χαλαζιού πέφτει κατακόρυφα χωρίς αντίσταση αλλά η ακτίνα της αυξάνει: $dr/dt = \lambda r$. Αν για $t = 0$ η μάζα είναι m_0, η ακτίνα r_0 και η ταχύτητα $v_0 = 0$, βρείτε την μάζα ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και την οριακή ταχύτητα που πιάνει η σφαίρα.

Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^v \frac{dv}{g-3\lambda v} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{3\lambda}\ln(g-3\lambda v)\Big|_0^v = t \Rightarrow \ln\frac{g-3\lambda v}{g} = -3\lambda t \Rightarrow \frac{g-3\lambda v}{g} = e^{-3\lambda t}$$

και τελικά

$$v = \frac{g}{3\lambda}\left[1-e^{-3\lambda t}\right]$$

Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$ η ταχύτητα τείνει στην τιμή

$$v_\infty = \frac{g}{3\lambda}$$