Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών 2022-23

1η σειρά γραπτών ασκήσεων

(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

Άσκηση 1.

Κατασκευάστε DFA, κανονικές παραστάσεις και κανονικές γραμματικές για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες:

(α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_1 = \{x, y\}$ των οποίων το πλήθος των $'x'$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

(β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_2 = \{a, b\}$ που δεν περιέχουν δύο συνεχόμενα $'ab'$.

Άσκηση 2.

Σχεδιάστε δύο DFA με αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ που να διαβάζουν τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (τα περισσότερο σημαντικά πρώτα, τα λιγότερο σημαντικά τελευταία) δοσμένου σε τριαδικό σύστημα και να αποδέχονται ως εξής:

(α) το πρώτο εάν $n \bmod 3 = 2$,

(β) το δεύτερο εάν $n \bmod 5 = 0$.

Δώστε επίσης τις αντίστοιχες κανονικές παραστάσεις.

Σημείωση: Μπορεί να υπάρχουν αρχικά μηδενικά στον αριθμό εισόδου. Για παράδειγμα, η είσοδος 00202 θα πρέπει να γίνεται αποδεκτή από και από τα δύο αυτόματα ενώ η 120 να γίνεται αποδεκτή μόνο από το δεύτερο.

Άσκηση 3.

Δίνονται οι παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid$ η w περιέχει την συμβολοσειρά $'cab'$ αλλά όχι τη συμβολοσειρά $'acab'\}$.

$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ η w είναι δυαδική αναπαράσταση ακεραίου με τιμή 4^k, για $k \geq 1\}$

Κατασκευάστε DFA με όσο το δυνατόν λιγότερες καταστάσεις για τις γλώσσες L_1 και L_2. Αποδείξτε την ελαχιστότητα του αυτομάτου σας.

Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε και να συνδυάσετε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες (με τουλάχιστον δύο τρόπους).

Άσκηση 4.

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας είτε συνδυασμό τους. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να γράψετε κανονική γραμματική ή να σχεδιάσετε NFA/DFA.

(α) Το συμπλήρωμα της γλώσσας $L_1 = \{(a^n b^2)^2 : n \in N^*\}$

(β) Το συμπλήρωμα της γλώσσας $L_2 = \{a^n b^m c^k : n, m, k \in N^*$ τέτοιοι ώστε $n \neq m$ και $n \neq k\}$

(γ) $L_3 = \{wcx : x \in \{a, b\}^*$ και w υποσυμβολοσειρά της $x\}$.

Άσκηση 5.

Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει καθεμιά από τις παρακάτω γραμματικές:

(α) $G_1 : S \to aA, A \to a \mid aA \mid B, B \to bb \mid bbB$.

(β) $G_2 : S \to aSb \mid bU \mid Ua, U \to bU \mid aU \mid \varepsilon$.

Άσκηση 6.

Να διατυπώσετε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις παρακάτω γλώσσες:

α) $L = \{a^n b^k a^m b : n, m, k \in N^*$ τέτοιοι ώστε $n + m$ περιττός $\}$

β) Το συμπλήρωμα της L

Εξάσκηση σε αυτόματα

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και NFA$_\varepsilon$ χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα `http://automata.discrete.gr/` (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο).

Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού.

Προαιρετικά: ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του interface.

Άσκηση 7. (Υπολογισιμότητα)

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του ελέγχου αν ένα πρόγραμμα τερματίζει με είσοδο την κενή συμβολοσειρά είναι μη επιλύσιμο.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν υπάρχει πρόγραμμα Π_ε που να παίρνει σαν είσοδο ένα οποιοδήποτε πρόγραμμα Π' και να αποφαίνεται αν το Π' τερματίζει με είσοδο την κενή συμβολοσειρά, τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε το Πρόβλημα Τερματισμού τροφοδοτώντας το Π_ε με κατάλληλη είσοδο Π'. Συγκεκριμένα δείξτε πώς, από μια οποιαδήποτε είσοδο (Π, x) του Προβλήματος Τερματισμού, όπου το ερώτημα είναι αν το Π με είσοδο x τερματίζει, μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλο Π'.

Άσκηση 8. (Λογική και Αλγόριθμοι)

Διατυπώστε αποδοτικό αλγόριθμο που να δέχεται σαν είσοδο οποιονδήποτε τύπο της προτασιακής λογικής σε μορφή Horn και να αποφαίνεται αν είναι ικανοποιήσιμος. Σε περίπτωση που είναι θα πρέπει να επιστρέφει μία ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τον τύπο.

Π.χ. με είσοδο $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_5 \vee \neg x_6) \wedge (x_6)$ θα πρέπει να επιστρέφει 'Ναι' και μία από τις αναθέσεις αληθοτιμών στις $(x_1, \ldots, x_6)$ που ικανοποιούν τον τύπο, π.χ. την ανάθεση $(\mathsf{True}, \mathsf{False}, \mathsf{True}, \mathsf{False}, \mathsf{True}, \mathsf{True})$ ενώ με είσοδο $(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2)$ θα πρέπει να επιστρέφει 'Όχι'.

Θεωρήστε ότι όλες οι μεταβλητές ενός τύπου δίνονται στη μορφή x_n, όπου n ένας φυσικός αριθμός.

Άσκηση 9. (Πολυπλοκότητα: αναγωγές προς απόδειξη δυσκολίας)

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. **Κάλυμμα κορυφών (Vertex Cover)** λέγεται ένα υποσύνολο των κορυφών $V' \subseteq V$ που περιέχει τουλάχιστον ένα άκρο κάθε ακμής του γραφήματος (λέμε ότι το άκρο αυτό *καλύπτει* την ακμή). Ένα σύνολο κορυφών του G λέγεται **ανεξάρτητο σύνολο** αν κάθε δύο κορυφές του δε συνδέονται με ακμή.

Θεωρήστε τα προβλήματα απόφασης: (i) **Independent Set (IS)**, στο οποίο, δεδομένης εισόδου (G, k) αποδεχόμαστε την είσοδο αν και μόνο αν το γράφημα G περιέχει κάποιο ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον k, και (ii) **Vertex Cover (VC)**, στο οποίο, δεδομένης εισόδου (G, r) αποδεχόμαστε την είσοδο αν και μόνο αν το γράφημα G περιέχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ r.

(α) Δώστε τουλάχιστον 3 παραδείγματα εισόδων για το κάθε πρόβλημα και αποφανθείτε αν η απάντηση για κάθε μία από αυτές είναι θετική ή αρνητική.

(β) Δημιουργήστε τουλάχιστον 4 ζεύγη εισόδων της μορφής (G, k), $(G, |V| - k)$, όπου η πρώτη είσοδος κάθε ζεύγους θα αφορά στο πρόβλημα **IS** και η δεύτερη στο πρόβλημα **VC** (δηλαδή σε κάθε ζεύγος εισόδων το γράφημα είναι ίδιο, ενώ τα μεγέθη των αναζητούμενων συνόλων έχουν άθροισμα όσο το πλήθος των κορφυρών). Τι παρατηρείτε;

(γ) Δείξτε ότι αν είναι γνωστό ότι το πρόβλημα **VC** είναι NP-πλήρες, τότε και το πρόβλημα **IS** είναι NP-πλήρες.

(δ) Μπορείτε να τροποποιήσετε την αναγωγή του (α) για να αποδείξετε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν **IS** είναι NP-πλήρες, τότε και το **VC** είναι NP-πλήρες;

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Η σειρά αυτή θα συμπληρωθεί σύντομα με κάποιες ασκήσεις ακόμη. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 19/11/2022, αποκλειστικά σε ηλεκτρονική μορφή, στο Helios (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <5MB συνολικά).

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητ(ρι)ες σας). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας (διαδικτυακά) σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση `focs@corelab.ntua.gr`.