Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 30/4/2023

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 2.4 μον.). Έστω $B = \{0,1\}^*$ το σύνολο των δυαδικών συμβολοσειρών.

1. Να δείξετε ότι το σύνολο B είναι αριθμήσιμο.
2. Εφαρμόζοντας διαγωνιοποίηση, να δείξετε ότι δεν είναι αριθμήσιμο το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των λογικών συναρτήσεων $f : B \to \{0,1\}$ με πεδίο ορισμού το B.
3. Ορίζοντας μια διαδικασία απαρίθμησης, να δείξετε ότι είναι αριθμήσιμο το σύνολο $\mathcal{F}_{\text{fin}} \subset \mathcal{F}$ όλων των λογικών συναρτήσεων $f : B \to \{0,1\}$ στις οποίες η τιμή 1 αποτελεί εικόνα ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του B (δηλ. για κάθε $f \in \mathcal{F}_{\text{fin}}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|\{x \in B : f(x) = 1\}| = k$).
4. Ας υποθέσουμε ότι δοκιμάζουμε να εφαρμόσουμε στο (αριθμήσιμο) σύνολο $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ το επιχείρημα διαγωνιοποίησης που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{F}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Γιατί σε αυτή την περίπτωση δεν οδηγούμαστε σε αντίφαση;

Θέμα 2 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 1.6 μον.). Έστω σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$. Ένα *μαντείο* $A_S : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ για το S είναι ένας αλγόριθμος (που δίνεται ως "μαύρο κουτί", δηλαδή μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε, αλλά δεν γνωρίζουμε τίποτα σχετικά με τη λειτουργία του, εκτός από την εγγύηση ορθότητας) τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \{0,1\}^*$, $A_S(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in S$. Μια *διαδικασία απαρίθμησης* E_S για το S είναι μια αλγοριθμική διαδικασία (η οποία επίσης δίνεται ως "μαύρο κουτί") που λειτουργεί (επ' άπειρον, αν το S είναι άπειρο) και παράγει μια ακολουθία $x_0, x_1, \ldots$ αποτελούμενη από στοιχεία του S και μόνον, χωρίς επαναλήψεις, με την εγγύηση ότι για κάθε $x \in S$, υπάρχει πεπερασμένη θέση $n(x) \in \mathbb{N}$ στην ακολουθία εξόδου της E_S όπου εμφανίζεται το x (με απλά λόγια, η E_S απαριθμεί όλα τα στοιχεία του S και μόνον αυτά).

1. Να δείξετε πως για κάθε σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$, αν έχουμε ένα μαντείο A_S, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαδικασία απαρίθμησης E_S για το σύνολο S και μια διαδικασία απαρίθμησης $E_{\bar{S}}$ για το συμπληρωματικό σύνολο $\bar{S} = \{0,1\}^* \setminus S$.
2. Να δείξετε ότι πως για κάθε σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$, αν έχουμε διαδικασίες απαρίθμησης E_S και $E_{\bar{S}}$ για το σύνολο S και το συμπληρωματικό του $\bar{S} = \{0,1\}^* \setminus S$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαντείο A_S.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P και M και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα T και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των καθηγητών και των μαθημάτων της Σχολής, με το $P(x)$ να δηλώνει ότι *"ο x είναι καθηγητής"*, το $M(x)$ να δηλώνει ότι *"το x είναι μάθημα"*, το $T(x,y)$ να δηλώνει ότι *"ο x διδάσκει το y"*, και το $L(x,y)$ να δηλώνει ότι *"ο x συμπαθεί τον y"*. Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που δηλώνουν ότι:

1. Υπάρχει μάθημα που διδάσκεται από καθηγητή που συμπαθεί όλους τους άλλους καθηγητές.
2. Το ελάχιστο πλήθος μαθημάτων που διδάσκει κάποιος καθηγητής είναι δύο.
3. Ένας καθηγητής συμπαθεί έναν άλλο μόνον αν υπάρχει μάθημα που το διδάσκουν και οι δύο.
4. Αν δυο καθηγητές διδάσκουν τα ίδια ακριβώς μαθήματα, τότε συμπαθούν τους ίδιους ακριβώς καθηγητές.
5. Αν ένας καθηγητής διδάσκει περισσότερα του ενός μαθήματα, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά το συνδιδάσκει με όλους τους άλλους καθηγητές που τον συμπαθούν.

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). (α) Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω κατηγορήματα:

$$\mathrm{prime}(n) = (1 < n) \land \forall k \forall \ell (n = k \cdot \ell \to k = 1 \lor \ell = 1)$$
$$\mathrm{cons\_primes}(n, m) = (n < m) \land \mathrm{prime}(n) \land \mathrm{prime}(m) \land \forall k (\mathrm{prime}(k) \to k \leq n \lor m \leq k),$$

και θεωρώντας την ερμηνεία των φυσικών αριθμών, να συμπληρώσετε την παρακάτω ισοδυναμία ώστε αυτή να εκφράζει ότι το κατηγόρημα $P(k, n)$ δηλώνει ότι το n είναι ο k-οστός μικρότερος (στη συνήθη διάταξη των φυσικών) πρώτος αριθμός:

$$\forall n \forall k \Big(P(k, n) \leftrightarrow \dots \Big)$$

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(x \neq y \to P(x, y) \lor P(y, x) \Big) \to \exists x \forall y \Big(x \neq y \to P(y, x) \lor \exists z \big(P(y, z) \land P(z, x) \big) \Big)$$

1. Να διατυπώσετε (σε φυσική γλώσσα, απλά και κατανοητά) το νόημα του τύπου φ. Αν βοηθάει να θεωρήσετε συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας, σκεφτείτε απλά κατευθυνόμενα γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το $P(x, y)$ δηλώνει την ύπαρξη ακμής από την κορυφή x προς την κορυφή y.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι ο φ αληθεύει σε κάθε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.

Θέμα 5 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1.0 μον.). Θεωρούμε ακολουθία $(a_1, \dots, a_n)$ αποτελούμενη από n φυσικούς αριθμούς. Για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ θέλουμε να υπολογίσουμε (α) το μήκος $\mathrm{LIS}(i)$ της μεγαλύτερης αύξουσας υπακολουθίας που έχει ως τελευταίο στοιχείο το a_i, και (β) το μέγιστο άθροισμα $\mathrm{MISum}(i)$ που μπορεί να προκύψει από στοιχεία μιας αύξουσας υπακολουθίας που έχει ως τελευταίο στοιχείο το a_i. Να διατυπώσετε αναδρομικές σχέσεις που επιτρέπουν τον υπολογισμό των $\mathrm{LIS}(i)$ και $\mathrm{MISum}(i)$ για όλες τις τιμές του $i = 0, 1, \dots, n$ από τα στοιχεία της ακολουθίας $(a_1, \dots, a_n)$.

Θέμα 6 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1.0 μον.). Θεωρούμε κοινοβούλιο με κατανομή εδρών $w_1, w_2, \dots, w_n$ σε n κόμματα, στο οποίο για να εγκριθούν κάποιες σημαντικές μεταρρυθμίσεις χρειάζονται τουλάχιστον Q θετικές ψήφοι. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την επίδραση κάθε κόμματος σε αυτή την διαδικασία με βάση τον δείκτη ισχύος Banzhaf (δείτε π.χ. `http://en.wikipedia.org/wiki/Banzhaf_power_index`). Ο δείκτης ισχύος Banzhaf για το κόμμα i είναι ανάλογος του πλήθους των συνασπισμών κομμάτων στους οποίους μετέχει το κόμμα i και συγκεντρώνουν τουλάχιστον Q έδρες, αλλά αν το κόμμα i αποσκιρτήσει, οι έδρες γίνονται λιγότερες από Q. Πιο συγκεκριμένα, έστω $N = \{1, \dots, n\}$ το σύνολο των κομμάτων, έστω $w(S) = \sum_{j \in S} w_j$ το σύνολο των εδρών ενός συνασπισμού $S \subseteq N$, και έστω

$$b_i = \Big| \{ S \subseteq N : i \in S \land w(S) \geq Q \land w(S \setminus \{i\}) < Q \} \Big|$$

το πλήθος των συνασπισμών όπου η συμμετοχή του κόμματος i είναι κρίσιμη για τη συγκέντρωση Q εδρών. Ο δείκτης ισχύος Banzhaf για το κόμμα i είναι

$$B_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \,.$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για τον υπολογισμό του δείκτη ισχύος Banzhaf είναι ο υπολογισμός του πλήθους $C(k, W)$ των υποσυνόλων $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ με σύνολο εδρών $w(S) = W$, για όλες τις τιμές των k και W. Να διατυπώσετε αναδρομική σχέση που επιτρέπει τον υπολογισμό των $(n + 1)(Q + 1)$ τιμών $C(k, W)$, για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και κάθε $W = 0, \dots, Q$, από τα $w_1, \dots, w_n$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=893` μέχρι τα μεσάνυχτα της Κυριακής 30 Απριλίου.

Καλή Επιτυχία!