Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς
3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 4/3/2023

Άσκηση 1: Συνιστώσες Μετάδοσης

Ο ΕΟΔΥ σε μια προσπάθεια να προετοιμαστεί για την επόμενη πανδημία αναπνευστικών ιών εκτελεί μελέτες για την εξάπλωση τους. Ο στόχος του είναι να μετρηθεί η ταχύτητα διάδοσης του ιού σε έναν πληθυσμό από τις διάφορες συναντήσεις των μελών του. Έτσι στην εν λόγω μελέτη, ένα ζεύγος μετάδοσης $\{A, B\}$ ορίζεται ως μια συνάντηση των A και B στην οποία υπήρξε μετάδοση του ιού (χωρίς να έχει σημασία η κατεύθυνση, δηλ. αν ο A κόλλησε τον B ή αν ο B κόλλησε τον A). Καθώς στα πλαίσια των καθημερινών δραστηριοτήτων γίνονται όλο και περισσότερες συναντήσεις, ο ιός διαδίδεται σε ολοένα και περισσότερα άτομα με αποτέλεσμα τελικά μία μεγάλη συνιστώσα του πληθυσμού να ασθενεί. Ο ΕΟΔΥ θέλει να μετρήσει μετά από πόσες συναντήσεις η συνιστώσα αυτή θα περιέχει ένα συγκεκριμένο ποσοστό F της κοινότητας.

Για να προστατευθεί η ανωνυμία των ασθενών, τα πραγματικά τους στοιχεία αντικαθίστανται από ψευδοτυχαίους αριθμούς οι οποίοι παράγονται με την παρακάτω διαδικασία:

- Οι 63 πρώτοι $(P_1, \cdots, P_{63})$ δίνονται από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών.
- Οι υπόλοιποι παράγονται από την σχέση $P_i = (P_{i-63} + P_{i-31}) \bmod N$, όπου N είναι το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού και $i \geq 64$.

Έτσι ένα ζεύγος μετάδοσης είναι τελικά οι τιμές $\{P_{2i-1}, P_{2i}\}$.

Λόγω της κατασκευής της, η διαδικασία ανωνυμοποίησης μπορεί να οδηγήσει σε βρόχους, δηλαδή σε ζεύγη με $\{P_{2i-1} = P_{2i}\}$ καθώς και σε δημιουργία του ίδιου ζεύγους πολλές φορές.

Στόχος σας είναι να φτιάξετε ένα πρόγραμμα το οποίο θα μετράει πόσα ζεύγη μετάδοσης απαιτούνται, ώστε τελικά ο ιός να επεκταθεί σε ένα συγκεκριμένο ποσοστό F του συνολικού πληθυσμού. Επίσης το πρόγραμμά σας θα πρέπει να μετράει πόσοι είναι οι βρόχοι και πόσα ζεύγη έχουν δημιουργηθεί περισσότερες φορές.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input 65 θετικούς ακεραίους, έναν ανά γραμμή. Αρχικά θα δίνεται το μέγεθος του συνολικού πληθυσμού N, στη συνέχεια μια ακέραια τιμή για το ποσοστό F και τέλος οι 63 πρώτες τιμές P_i για την ανωνυμοποίηση των ασθενών από την γεννήτρια.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στο standard output τρεις τιμές χωρισμένες με κενό. Η πρώτη θα θα αντιστοιχεί στον αριθμό ζευγών μετάδοσης που χρειάζονται ώστε η διάδοση του ιού να σχηματίζει μια συνεκτική συνιστώσα η οποία περιέχει ποσοστό F του πληθυσμού. Η δεύτερη θα αντιστοιχεί στο πλήθος των ζευγών που έχουν δημιουργηθεί πολλές φορές, ενώ η τρίτη στο πλήθος των βρόχων.

Περιορισμοί:

$100 \leq N \leq 50000$
$1 \leq F \leq 100$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Άσκηση 2: Συντόμευση Διαδρομής

Είμαστε στην αγαπημένη μας παραλία, όπου έχουμε πάει για μια χειμερινή βουτιά, και πρέπει να φτάσουμε σπίτι μας, για μια πολύ σημαντική τηλεδιάσκεψη, σε B ώρες ακριβώς!

Γνωρίζουμε το οδικό δίκτυο της χώρας, το οποίο αποτελείται από N πόλεις (αριθμημένες από 1 μέχρι N) και M δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε δρόμος $e = (u, v)$ μας επιτρέπει να ταξιδέψουμε από την πόλη u, στη μία άκρη του, στην πόλη v, στην άλλη άκρη, σε $\ell(e)$ ώρες. Η αγαπημένη μας παραλία βρίσκεται στην πόλη s και το σπίτι μας στην πόλη t. Υπό κανονικές συνθήκες, φαίνεται αδύνατον να διανύσουμε την απόσταση από την πόλη s στην πόλη t σε B μόλις ώρες. Ευτυχώς, όμως, το υπερσύγχρονο αυτοκίνητό μας έχει τη δυνατότητα να κινηθεί αστραπιαία κατά μήκος ενός δρόμου. Όταν συμβαίνει αυτό σε έναν δρόμο $e = (u, v)$, διανύουμε την απόσταση από την πόλη u στην πόλη v σε ελάχιστα λεπτά, μηδενίζοντας πρακτικά το $\ell(e)$. Δυστυχώς αυτή η δυνατότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί λίγες φορές σε όλη τη διάρκεια ζωής του αυτοκινήτου μας.

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος δρόμων, όπου αν κινηθούμε αστραπιαία, μηδενίζοντας πρακτικά το χρόνο που χρειάζεται για να τους διασχίσουμε, θα καταφέρουμε να φτάσουμε από την αγαπημένη μας παραλία, στην πόλη s, στο σπίτι μας, στην πόλη t, σε B ώρες το πολύ, ώστε να είμαστε στην ώρα μας για την τηλεδιάσκεψη.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input ένα κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά το οδικό δίκτυο της χώρας, τις πόλεις s και t, και το χρόνο B που έχουμε στη διάθεσή μας. Στην πρώτη γραμμή, θα δίνονται 5 φυσικοί αριθμοί, το πλήθος N των πόλεων, το πλήθος M των δρόμων, η πόλη s όπου βρίσκεται η αγαπημένη μας παραλία, η πόλη t όπου βρίσκεται το σπίτι μας, και ο χρόνος B (σε ώρες) που έχουμε στη διάθεσή μας. Θα ακολουθούν M γραμμές που περιγράφουν έναν δρόμο μονής κατεύθυνσης η κάθε μία. Στην i-οστή γραμμή, θα δίνονται 3 φυσικοί αριθμοί, που αντιστοιχούν στην αρχική πόλη u_i και στην τελική πόλη v_i του i-οστού δρόμου, και στη χρονική διάρκεια ℓ_i (σε ώρες) που χρειάζεται για να διανύσουμε τον i-οστό δρόμο $e_i = (u_i, v_i)$.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλήθος δρόμων, όπου αν κινηθούμε με πολύ μεγάλη ταχύτητα, θα καταφέρουμε να φτάσουμε από την πόλη s στην πόλη t, σε B ώρες το πολύ.

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 1.000$
$3 \leq M \leq 10.000$
$1 \leq B \leq 10^9$
$1 \leq \ell_i \leq 10^6$
$1 \leq s, t \leq N$, $s \neq t$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
6 9 3 6 15
2 1 4
3 2 7
4 5 6
1 3 8
1 4 4
5 2 8
5 6 10
1 5 5
4 2 5
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
2
```

Σε testcases[1] που αντιστοιχούν στο 25% της βαθμολογίας, θα υπάρχει ακριβώς μία διαδρομή από την s στην t.
Σε testcases που αντιστοιχούν στο 25% της βαθμολογίας, θα είναι $N \leq 100$ και $M \leq 1000$.

[1] **Εξήγηση Παραδείγματος:** Θέλουμε να πάμε από την πόλη 3 στην πόλη 6 και έχουμε 15 ώρες στη διάθεσή μας. Αν κινηθούμε αστραπιαία στους δρόμους $(3, 2)$ και $(2, 1)$, ουσιαστικά μηδενίζοντας τα αντίστοιχα μήκη, μπορούμε να φτάσουμε στην πόλη 6 σε 15 ώρες ακριβώς. Υπάρχουν και άλλοι συνδυασμοί ζευγαριών δρόμων στους οποίους αν κινηθούμε αστραπιαία, θα φτάσουμε έγκαιρα στην πόλη 6 (π.χ., $\{(1, 5), (5, 6)\}$ ή $\{(3, 2), (5, 6)\}$). Δεν υπάρχει όμως τρόπος να φτάσουμε έγκαιρα στην πόλη 6 κινούμενοι αστραπιαία σε έναν μόνο δρόμο.