ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 06/09/2023

ΘΕΜΑ Α (**3 μον**) *Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις*:

(1) Η σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ (α) συγκλίνει στο 2 (β) συγκλίνει στο $\frac{3}{4}$ (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.

Σωστή είναι η (α) διότι $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

(2) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\dots$. (α) συγκλίνει στο e (β)συγκλίνει στο e^2 (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.

Σωστή είναι η (β): $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, ***για κάθε*** $x\in\mathbb{R}$, ***οπότε για*** $x=2$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=e^2$.

(3) Αν $a_n\to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (α) συγκλίνει (β) αποκλίνει (γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν συγκλίνει ή όχι.

Σωστή είναι η (γ): Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ ***αποκλίνει ενώ η σειρά*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ***συγκλίνει.***

(4) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (α) αποκλίνει, (β) συγκλίνει (γ) ταλαντώνεται.

Σωστή είναι η (α): Πράγματι, αν μια σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ***συγκλίνει τότε*** $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ***ή ισοδύναμα αν η*** (a_n) ***δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά*** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ***αποκλίνει. Επειδή λοιπόν,*** $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1\neq 0$ ***η σειρά*** $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ ***αποκλίνει.***

(5) Η ακολουθία $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ (α) συγκλίνει στο 1 (β) συγκλίνει στο e (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.

Σωστή είναι η (β) : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

(6) Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 2$. Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς τότε (α) $R = 2$ (β) $R < 2$ (γ) $R \geq 2$.

Σωστή είναι η (γ): Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ***με*** $|x| < R$ ***και αποκλίνει για όλα τα*** $x \in \mathbb{R}$ ***με*** $|x| > R$***, όπου*** R ***η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Συνεπώς, επειδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για*** $x = 2$***, αποκλείεται να ισχύει*** $2 > R$ ***και άρα θα πρέπει*** $2 \leq R$***.***

<u>ΘΕΜΑ Β</u> (3 μον) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n} x^n$.

(1) **(1 μον)** Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει?

(2) Για κάθε $x \in (-R, R)$ βρείτε τους τύπους (α) **(1 μον)** της παραγώγου $f'(x)$ και (β) **(1 μον)** της ίδιας της $f(x)$.

ΛΥΣΗ (1) Έχουμε $a_n = \frac{1}{4^n n}$ και άρα $\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{4}$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\varrho = 4$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 4$ και αποκλίνει για $|x| > 4$. Ελέγχουμε τώρα τη σύγκλιση στα σημεία -4 και 4. Για $x = -4$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet). Για $x = 4$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-4, 4)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(2) (α) Από το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειράς, έχουμε $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{4^3} + \cdots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = \frac{1}{4 - x}$.

(β) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{4-t}\, dt \overset{u=4-t}{=} -\int_4^{4-x} \frac{1}{u}\, du = \ln 4 - \ln(4-x) = \ln \frac{4}{4-x}$$

Επειδή $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n} x^n |_{x=0} = 0$, έχουμε $f(x) = \ln \frac{4}{4-x}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u> (**4** **μον**)

(1) (**1 μον**) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

(2) (**2** **μον**) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx$.

(3) (**1** **μον**) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = x^y$, όπου $x > 0$ και $y > 0$.

ΛΥΣΗ (1) Έχουμε $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$, οπότε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} &= 3\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= 3\frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

και συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

(2) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx &= \int \frac{x}{x(x^2+1)}\, du + \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, du \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx \\ &= \arctan x + \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$ έχουμε

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, du = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Άρα

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx = \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$