ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 30 ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2021

ΟΜΑΔΑ Α

1) Να απαντήσετε σε ακριβώς 3(ΤΡΙΑ) από τα παρακάτω 4 θέματα. 2) Να γράψετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) (1,5 μον) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$ συγκλίνει.

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

(γ) (1 μον) Εξετάστε αν είναι σωστή ή λάθος η εξής πρόταση δικαιολογώντας την απάντησή σας: Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = -1, +1$.

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \dfrac{3^n}{n} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/3$.

Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 1/3$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| < 1/3 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| > 1/3 \Leftrightarrow x < 2/3$ ή $x > 4/3$. Για $x = 2/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα για $x = 4/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{4}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά και αποκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

(β) Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης ορίου λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(γ) Έστω (ϵ_n) ακολουθία με $\epsilon_n \in \{-1, +1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$. Η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ είναι συγκλίνουσα επειδή είναι απολύτως συγκλίνουσα. Πράγματι, αφού $a_n > 0$ έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και από υπόθεση η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 2. (α) (2 μον) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

(i) Αν $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ βρείτε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(0,0)$.

(ii) Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$?

(β) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

ΛΥΣΗ: (α) (i) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu_1,0+tu_2)-f(0,0)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^5u_1^2u_2^3}{t^4u_1^4+t^6u_2^6}}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{t^5u_1^2u_2^3}{t^5(u_1^4+t^2u_2^6)}=\lim_{t\to 0}\frac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+t^2u_2^6}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1=u_2=0$ αφού $u_1^2+u_2^2=1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_1=0$. Τότε $|u_2|=1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{0}{t^2}=\lim_{t\to 0}0=0$.

(β) $u_1\neq 0$. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+t^2u_2^6}=\dfrac{u_1^2u_2^3}{u_1^4}=\dfrac{u_2^3}{u_1^2}$.

(ii) Για $x=t$ και $y=0$ έχουμε $\lim_{t\to 0}f(t,0)=\lim_{t\to 0}0=0$ ενώ για $x=t>0$ και $y^3=x^2\Leftrightarrow y=t^{2/3}$,

$$\lim_{t\to 0}f(t,t^{2/3})=\lim_{t\to 0}\frac{t^2t^2}{t^4+t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{2t^4}=\frac{1}{2}$$

και άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ δεν υπάρχει. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}=0$$

Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, θέτοντας $g(x,y)=\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}$ για $x=y=t\neq 0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0}g(x,y)=\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{|t\cdot t|}{t^2+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ενώ για $x=t$ και $y=0$,

$$\lim_{t\to 0}g(t,0)=0.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) υπάρχει $C > 0$ με $C \geq |f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και (ii) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Δείξτε ότι ισχύουν τα επόμενα:

(α) (2 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_x(x,y)| \leq C\,(|x| + |y|)$ και ομοίως $|f_y(x,y)| \leq C\,(|x| + |y|)$.

(β) (1,5 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{C}{2}\,(|x| + |y|)^2$.

ΛΥΣΗ: (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τις συναρτήσεις f_x και f_y. Για την ανισότητα $|f_x(x,y)| \leq C\,(|x| + |y|)$ έχουμε τα εξής: Για $(x,y) = (0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} |f_x(x,y)| = |f_x(x,y) - f_x(0,0)| &= (f_x)_x(\xi,\eta)(x-0) + (f_x)_y(\xi,\eta)(y-0) \\ &= |f_{xx}(\xi,\eta)x + f_{xy}(\xi,\eta)y| \\ &\leq |f_{xx}(\xi,\eta)| \cdot |x| + |f_{xy}(\xi,\eta)| \cdot |y| \leq C\,(|x| + |y|)\,. \end{aligned}$$

Για την f_y εργαζόμαστε ομοίως χρησιμοποιώντας επιπλέον ότι $f_{xy} = f_{yx}$ που ισχύει λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων.

(β) Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Όπως στο (α) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{1}{2}\left(|f_{xx}(\xi,\eta)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi,\eta)| \cdot |xy| + |f_{yy}(\xi,\eta)|y^2\right) \\ &\leq \frac{C}{2}\left(x^2 + 2|xy| + y^2\right) = \frac{C}{2}\,(|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4. (α) (1,5 μον.) Εξετάστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x - y)^3$.

(β) (1,5 μον.) Εξετάστε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to (0, +\infty)$, όπου I ένα ανοικτό υποδιάστημα του $(0, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$, με τις ιδιότητες $f(x) = x^{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και $f(1) = f'(1) = 1$.

ΛΥΣΗ: (α) Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 3(x - y)^2 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3(x - y)^2 \\ f_{xx}(x, y) &= 6x - 6(x - y) \\ f_{yy}(x, y) &= 6y + 6(x - y) \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 6(x - y) \end{aligned}$$

όλες συνεχείς.

Βρίσκουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 3(x - y)^2 = 0 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3(x - y)^2 = 0 \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^2 + y^2 = 0$ και άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0)$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0, 0) = 0$,

(β) για κάθε $x = y > 0$, είναι $f(x, y) = 2x^3 > 0$ και

(γ) για κάθε $x = y < 0$ είναι $f(x, y) = 2x^3 < 0$.

Συνεπώς σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

(β) Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = x^y \Leftrightarrow x^y - y = 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y) = x^y - y$ (όπου $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$). Είναι εύκολο να δούμε ότι η F είναι C^1. Πράγματι $F_x(x, y) = yx^{y-1}$ και $F_y(x, y) = \ln x \cdot x^y - 1$. Επίσης, $F(1, 1) = 0$ και $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$. Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται τοπικά στο $(1, 1)$ ως προς y. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I \subseteq (0, +\infty)$ και $J \subseteq (0, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$ και μια C^1 συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$, για κάθε $(x, y) \in I \times J$. Συνεπώς $f(1) = 1$ και $F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^{f(x)} - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^{f(x)}$, για κάθε $x \in I$. Τέλος, $f'(1) = -\dfrac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 0)} = -\dfrac{1}{-1} = 1$.